
इकाई 1 अंकगणित का संक्षिप्त परिचय

इकाई की संरचना

- 1.0 उद्देश्य
- 1.1 प्रस्तावना
- 1.2 अंकगणित का संक्षिप्त परिचय
 - 1.2.1 संकलन
 - 1.2.2 व्यवकलन
 - 1.2.3 गुणन
 - 1.2.4 भाजन
 - 1.2.5 वर्गकर्म
 - 1.2.6 वर्गमूल
 - 1.2.7 घनकर्म
 - 1.2.8 घनमूल
 - 1.2.9 शून्य परिकर्म
 - 1.2.10 व्यस्त विधि
 - 1.2.11 इष्टकर्म
 - 1.2.12 संक्रमण गणित
 - 1.2.13 गुणकर्म
 - 1.2.14 त्रैशिक
 - 1.2.15 मिश्रक गणित
 - 1.2.16 क्षेत्रव्यवहार
 - 1.2.17 खातगणित
 - 1.2.18 क्रकचगणित
 - 1.2.18 राशि एवं छायागणित
 - 1.2.19 कुट्टकगणित
 - 1.2.20 अड्कपाश
- 1.3 सरांश
- 1.4 पारिभाषिक शब्दावली
- 1.5 बोध प्रश्न
- 1.6 सन्दर्भ ग्रन्थसूची

1.0 उद्देश्य

प्रस्तुत इकाई का अध्ययन करने के बाद आप :

- इस इकाई के अध्ययन से आप भारतीय अड्कगणित के इतिहास एवं परम्परा को जान सकेंगे।

ignou
THE PEOPLE'S
UNIVERSITY

- विविध उदाहरणों के माध्यम से विविध गणितीय समस्याओं को हल करने में दक्षता प्राप्त होगी।
- किसी भी गणितीय समस्या को विविध प्रकार से हल करने में दक्षता प्राप्त होगी।
- विविध ग्रन्थों में विश्लेषित विविध गणितीय संक्रियाओं को विश्लेषण दक्षता प्राप्त होगी।

1.1 प्रस्तावना

प्रिय जिज्ञासुओं! आज हम एम.ए. ज्योतिष के इस पाठ्यक्रम में अंकगणित के संक्षिप्त परिचय को पढ़ेंगे। जैसा कि हमें गत कक्षाओं में यह ज्ञात हो चुका है कि ग्रह नक्षत्रों से सम्बन्धित शास्त्र को ज्योतिषशास्त्र की संज्ञा दी गई है। ज्योतिषशास्त्र के सामान्य रूप से तीन स्कन्ध हैं। (1) सिद्धान्त (2) संहिता (3) होरा। आचार्य वाराहमिहिर भी अपने ग्रन्थ बृहत्संहिता के प्रारम्भ में ही स्पष्ट कर देते हैं कि-

“ज्योतिषशास्त्रमनेकभेदविषयं स्कन्धत्रयाधिष्ठितम्” इन तीन स्कन्धों का परिचय भी हमें पूर्व में ही प्राप्त हो चुका है। सिद्धान्त स्कन्ध के परिचय में ही बताया गया है कि अंकगणित एवं बीजगणित ये दोनों ही सिद्धान्त स्कन्ध के विभाग हैं। अंकगणित को व्यक्त गणित तथा बीजगणित को अव्यक्त गणित के नाम से अभिहित किया गया है।

आचार्य भास्कर ज्योतिषशास्त्र को पढ़ने के लिए जिस योग्यता का निर्धारण करते हैं उसमें पहले पायदान पर गणित के ज्ञान को रखते हैं, और लिखते हैं-

द्विविधगणिमुक्तं व्यक्तमव्यक्तयुक्तं
तदवगमनिष्ठः शब्दशास्त्रे पटीष्ठः।
यदि भवति तदेदं ज्योतिषं भूरिभेदं
प्रपठितुमधिकारी सोन्यशा नामधारी॥

अर्थात् व्यक्त एवं अव्यक्त दो प्रकार के गणित बताए गए हैं। इन दो प्रकार के गणित को जानने वाला तथा साथ-साथ व्याकरण शास्त्र को जानने वाला ही ज्योतिषशास्त्र को पढ़ने का अधिकारी है अथवा वह केवल नाममात्र का दैवज्ञ है।

इन प्रमाणों से ज्ञात होता है की दैवज्ञ होने के लिए पहली योग्यता अंक गणित एवं बीजगणित का ज्ञान एवं दूसरी योग्यता शब्दशास्त्र का ज्ञान रखी गई। अंक गणित के अंतर्गत संख्याओं की परस्पर संक्रियाएं संपादित की जाती हैं। प्रायः यह माना जाता है कि अंकगणित ही गणित शास्त्र की प्राचीनतम शाखा है। अंकगणित को प्राचीन काल में पाटी गणित अथवा धूली कर्म कहा जाता था। अंक गणित के अंतर्गत सर्वप्रथम हम मुद्रा, काल, दूरी, लंबाई आदि के परिभाषाओं को जानते हैं उसके बाद संख्यामान, स्थानीय मान, अष्ट परिकर्म (जिसके अंतर्गत जोड़ना, घटाना, गुणा करना, भाग देना, वर्ग, वर्गमूल, घन एवं घनमूल) शून्य परिकर्म, व्यस्त विधि, इष्ट कर्म, संक्रमण गणित, गुण कर्म, त्रैशिक, मिश्रक गणित, क्षेत्र व्यवहार, खात गणित, क्रकच गणित, राशि एवं छाया गणित, कुट्टक गणित, अंकपाश इत्यादि का अध्ययन किया जाता है। अब हम इनसे सम्बन्धित जानकारी इस पाठ में प्राप्त करेंगे।

1.2 अंकगणित का संक्षिप्त परिचय

भारतीय संस्कृति में गणित का प्रयोग प्राचीनकाल से ही प्रचलित है। वेदों में अनेक स्थलों पर अंकगणितीय संक्रियाओं की भरपूर चर्चा हुई है। संहिताओं के बाद ब्राह्मण ग्रंथों में अंकगणित के महत्त्व को बताते हुए लिखा गया “यादसे गणकम्”। इसके अनन्तर परवर्ती आचार्यों ने भी इस परम्परा को आगे बढ़ाया। स्वतंत्र रूप से स्थानांग सूत्र (350 ई.पू.) भगवती सूत्रकार (300 ई.पू.) तथा आचार्य आर्यभट्ट (499) ने अपने ग्रंथ आर्यभट्टीयम् में अंकगणित के विषय वस्तुओं को स्पष्ट किया वहीं पाँचवीं सदी में आचार्य वराहमिहिर ने पञ्चसिद्धान्तिका, सातवीं शताब्दी में आचार्य ब्रह्मगुप्त ने ब्रह्मस्फुटसिद्धान्त और उसके बाद भास्कर आदि आचार्यों ने अपने विभिन्न ग्रन्थों के माध्यम से गणित की इस परम्परा को आगे बढ़ाया।

प्रायः इन सभी आचार्यों ने ग्रन्थ को मंगलाचरण से आरम्भ कर सर्वप्रथम अपने समय में प्रचलित विविध मापन के परिभाषाओं को बताया है। जैसे वराटक, वंश, योजन, सुवर्ण आदि। इसके बाद संख्या पद्धति का वर्णन किया है। भास्कर प्रभृति आचार्यों ने इकाई, दहाई आदि संख्याओं के स्थानीय मानों का प्रतिपादन करते हुए गणितीय प्रक्रिया को आगे बढ़ाया है। गणितीय प्रक्रिया के क्रम में आचार्यों ने मुख्यरूप से निम्नलिखित विषयों का प्रतिपादन किया है।

1.2.1 अष्ट परिकर्म

1.2.1.1 संकलन

संकलन का शाब्दिक अर्थ है इकट्ठा करना या जोड़ना। इसे अंग्रेजी में Addition कहा जाता है। प्राचीन काल में जोड़ने या घटाने की अनेकों विधियाँ प्रचलित थीं। उदाहरण के लिए भास्कराचार्य का अधोलिखित सूत्र देखते हैं-

“कार्य क्रमादुत्क्रमतोथवांक योगो यथास्थानकमन्तरं वा”

अर्थात् स्थान के अनुरूप क्रम से अथवा उत्क्रम से संख्याओं का योग अथवा ऋण करना चाहिए। इसी प्रकार संख्याओं के क्रमिक योग के लिए गणित कौमुदीकार ने बताया कि

“सैकपदाहतपददलमेकादिचयेन भवति संकलितम्।”

अर्थात् अन्तिम संख्या में एक जोड़कर अन्तिम संख्या से गुणा करें तथा गुणनफल को आधा करने पर एकादि क्रमिक संख्याओं का योग प्राप्त होता है।

इसे सामान्य रूप में अधोलिखित प्रकार से देख सकते हैं-

$$1+2+3+\dots\text{ अन्तिम पद (n) तक का योग} = \frac{n(n+1)}{2}$$

1.2.1.2 व्यवकलन:

व्यवकलन का तात्पर्य घटाने (Subtraction) से है। उपरोक्त प्रकार से ही क्रमसे या व्युत्क्रम से संख्याओं का अन्तर भी प्राप्त किया जा सकता है। पाटी गणित में क्रमिक संख्याओं के अन्तर को भी प्राप्त करने का सूत्र बताया गया है।

सैकं व्यवकलिपदं संकलितपदे निधाय संगुणयेत्।
पदयोर्विवरेण भवेद् दलीकृतं व्यवकलितशेषम्॥

अर्थात् व्यवकलित पद (m) में एक जोड़ कर संकलित पद (n) के साथ जोड़े। योगफल को संकलित पद तथा व्यवकलित पद के अन्तर के साथ गुणा करें। जो फल प्राप्त हुआ उसे आधा करने पर व्यवकलित शेष अर्थात् अंतर (Subtraction) प्राप्त होता है।

सूत्रात्मक रूप में इसे निम्न प्रकार से लिख सकते हैं-

$$\text{व्यवकलित शेष} = \frac{(n-m)(n+m+1)}{2}$$

उदाहरण के द्वारा इसे निम्न प्रकार से समझा जा सकता है।

1 + 2 + 100 तथा 1 + 2 + 3 +10 का अंतर ज्ञात करना है।

$$1 + 2 + \dots + 100 = 5050$$

$$1 + 2 + \dots + 10 = 55$$

$$\text{सूत्र के अनुसार } \frac{90 \times 111}{2} = 4995 \text{ उत्तर}$$

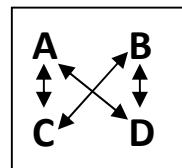
1.2.1.3 गुणन

गुणक संख्या एवं तुल्यस्थान स्थित गुण्यों का योग ही गुणनफल कहलाता है। पाटी गणित के विविध आचार्यों ने गुणा करने के अलग-अलग विधियों को बताया है। भास्कराचार्य लीलावती में गुणन के पाँच प्रकारों को बताते हैं। यथा-

गुण्यान्त्यमंकं गुणकेन हन्यादुत्सारितेनैवमुपान्तिमादीन
गुण्यस्त्वधोधो गुणखण्डतुल्यस्तैः खण्डकैः संगुणितो युतो वा।
भक्तोगुणः शुध्यति येन तेन लब्ध्या च गुण्यो गुणितः फलं वा
द्विधा भवेद्रूपविभाग एवं स्थानैः पृथग्वा गुणितः समेतः।
इष्टोनयुक्तेन गुणेन निध्नोऽभीष्टध्न गुण्यान्वित वर्जितो वा॥

इसी प्रकार वैदिक गणित में गुणन की अनेक सरल विधियाँ बताई गई हैं। जैसे-
“ऊर्ध्वतीर्यग्भ्याम्”

इस सूत्र का स्वरूप इसप्रकार होगा



प्रथम अवस्था में B को D से गुणा करेंगे। पुनः A को D से तथा B को C से गुणा कर के योग कर लेंगे। इसके बाद A से C गुणा कर लिख देंगे।

1.2.1.4 भाजनः

भाजन का तात्पर्य भाग से है। भाग का अर्थ है किसी संख्या का विभाग करना। भाजन के क्रम में जिस संख्या में भाग दिया जाता है वह भाज्य, जिस संख्या से भाग दिया जाता है वह भाजक तथा भाग देने के बाद जो फल प्राप्त होता है, उसे भागफल तथा पूर्ण भाग न लग पाने की अवस्था में यदि कुछ संख्या बच जाती है, तो उसे शेष कहा जाता है। उदाहरणार्थ-

$$23/4 = 5 \text{ भागफल तथा } 3 \text{ शेष}$$

भाजन के लिए भी वैदिक गणित, लीलावती त्रिशतिका, गणित कौमुदी आदि ग्रन्थों में अनेक उत्तम सूत्र आचार्यों ने दिये हैं।

1.2.1.5 वर्गकर्मः

वर्ग की परिभाषा है 'समद्विघातः कृतिरुच्यते' अर्थात् किसी संख्या को उसी संख्या से गुणा करने पर जो गुणनफल प्राप्त होता है, वह वर्ग कहलाता है। वर्ग करने की विधियों पर अलग-अलग आचार्यों ने प्रकाश डाला है तथा सौ से अधिक विधियाँ बताई हैं। आचार्य भास्कर ने ही लीलावती में एक ही श्लोक में चार विधियों को बताया है:

समद्विघातः कृतिरुच्यतेऽथ
स्थाप्योन्त्यवर्गो द्विगुणान्त्यनिघ्नाः ।
स्वस्वोपरिष्ठाच्च तथाऽपरेऽङ्काः
त्यक्त्वान्त्य मुत्सार्य पुनश्च राशिम ॥
खण्डद्वयस्याभिहतिर्द्विनिघ्नी
तत्खण्ड वर्गैक्ययुता कृतिर्वा ।
इष्टोनयुग्राशिवधः कृतिः स्यात्
इष्टस्य वर्गेण समन्वितो वा ॥

वर्गमूलः- अर्थात् किसी भी वर्ग संख्या की वह संख्या जिससे उस वर्ग का निर्माण होता है। वर्गमूल कहलाती है।

घनः- किसी भी संख्या को उसी संख्या से तीन बार गुणा करने पर प्राप्त गुणनफल घन कहलाता है। जैसे- 3 का घन = $3 \times 3 \times 3 = 27$ इसी परिभाषा को भास्कराचार्य भी कहते हैं कि "समत्रिघातश्च घनः प्रदिष्टः"

घनमूलः- वर्गमूल के ही प्रकार से किसी भी घन संख्या की वह मूल संख्या जिससे वह घन संख्या बन है, घनमूल कहलाती है। यहाँ 27 का घनमूल 3 होगा। इस प्रकार घन, ऋण, गुणन, भाजन, वर्ग, वर्गमूल, घन तथा घनमूल इन आठ कर्मों को अष्ट परिकर्म की संज्ञा दी गई है।

इन आठों संक्रियाओं को जब अभिन्न संख्याओं के साथ किया जाता है तो इसे अभिन्न परिकर्माष्टक की संज्ञा दी जाती है, तथा जब इन संक्रियाओं को भिन्नात्मक संख्याओं के साथ किया जाता है तो ये संक्रियाएँ भिन्न परिकर्माष्टक कहलाती हैं। भिन्न संख्याओं के साथ

भी इन आठ परिकर्मों को सम्पादित करने के लिए लीलावती आदि ग्रन्थों में अनेक सूत्र बताए गए हैं।

1.2.2 शून्य परिकर्म

शून्य परिकर्म में भी शून्य के साथ आठ संक्रियाएँ बताई गई हैं। जैसा कि भिन्न एवं अभिन्न परिकर्म में बताया गया है। आचार्य भास्कर इन संक्रियाओं के संबन्ध में लिखते हैं –

योगे खं क्षेपसमं, वर्गादौ खं, खभाजितो राशिः।

खहरः स्यात्, खगुणः खं, खगुणश्चिन्त्यश्च शेषविधौ॥

शून्ये गुणके जाते, खं हारश्चेत् पुनस्तदा राशिः।

अविकृत एव ज्ञेयस्तथैव खेनोनितश्च युतः॥

1.2.3 व्यस्तविधि

जहां गणितीय प्रक्रिया में अंकज्ञान के लिए ज्ञात अंक में हर को गुणा तथा गुणा को हर, वर्ग को मूल तथा मूल को वर्ग, धन को ऋण तथा ऋण को धन बना कर अंत में संख्या प्राप्त होती है ऐसे विलोम प्रक्रिया वाले गणित को व्यस्त गणित या इस विधि को व्यस्त विधि कहते हैं। सूत्र भी है –

छेदं गुणं गुणं छेदं वर्गं मूलं पदं कृतिम् ।

ऋणं स्वं स्वमृणं कुर्यात् दृश्ये राशिप्रसिद्धये ॥

अथ स्वांशाधिकोने तु लवाद्योनो हरो हरः ।

अंशस्त्वविकृतस्तत्रविलोमे शेषमुक्तवत् ॥४६॥

एक उदाहरण से इस प्रकार के गणित को समझने का प्रयास करते हैं-

वह कौन सी संख्या है जिसे 3 से गुणा कर अपना 2/4 जोड़ देते हैं फिर 7 का भाग देते हैं तथा अपना 1/3 घटा देते हैं फिर उसका वर्ग करते हैं एवं उसमें 52 घटा कर मूल लेते हैं , अब जो प्राप्त हो उसमें 8जोड़ कर 10 का भाग देते हैं तो भागफल 2 प्राप्त होता है? यदि आप व्यस्त विधि में प्रवीण हो तो ऐसी संख्या को बताओ?

1.2.4 इष्टकर्म

इस प्रकार के गणितीय संक्रियाओं में इष्ट अंक की कल्पना कर के शेष गणित की प्रक्रिया आगे बढ़ती है। इसके भी अलग-अलग भेद हैं। एक सूत्र से इसे समझने का प्रयास करते हैं। सूत्र-

उद्देशकलापवदिष्टराशिः क्षुणो हतौंशै रहितो युतो वा।

इष्टाहतं दृष्टमनेन भक्तं राशिर्भवेत् प्रोक्तमितीष्टकर्म॥

प्रश्न में जो क्रियाएं कहीं गई हैं उसे ईष्ट राशि में करने के बाद जो राशि प्राप्त हो उससे किसी कल्पित ईष्ट गुणित कथित संख्या(दृष्ट) को भाग देने पर जो फल प्राप्त होता है वही अभीष्ट संख्या होती है। किसी कल्पित ईष्ट संख्या के द्वारा फल का साधन किया जाता है, इस कारण से इसे इष्टकर्म कहा गया है। लीलावती के सूत्रार्थ प्रकाशिका टीका में एक बड़ा सुन्दर उदाहरण दिया गया है। जैसे यदि किसी ने प्रश्न किया कि “वह कौन सी संख्या है जिसे 5 से गुणा कर 3 से

भाग देकर जो फल प्राप्त हो उसमें उसी का पंचमांश घटा देने पर शेष 8 प्राप्त होता है।”

इसके उदाहरण का एक प्रश्न अंकगणित में अति प्रसिद्ध है-

अमलकमलराशेऽत्र्यंशपंचांशषष्ठै
स्त्रिनयनहरिसूर्या येन तुर्येण चार्या।
गुरुपदमथ षडभिः पूजितं शेषपद्मैः
सकलकमलसंख्यां क्षीप्रमाख्याहि तस्य॥

अर्थात् किसी भक्त ने कमल के समूहों में से $\frac{1}{3}$ भाग से भगवान् शिव की, $\frac{1}{5}$ भाग से विष्णु की, $\frac{1}{6}$ भाग से सूर्य की और $\frac{1}{4}$ भाग से मां भगवती की पूजा की तथा उसके पास 6 पुष्प बच गए जिससे उसने अपने गुरु जी की पूजा की। तो बताओ उस कमल के समूह में कितने कमल के पुष्प थे।

1.2.5 संक्रमण गणित

जहाँ दो संख्याओं का योग तथा अंतर दे कर यदि मूल संख्या पूछी जाए वहाँ संक्रमण गणित का प्रयोग किया जाता है। भास्कराचार्य लीलावती से पूछते हैं कि-

ययोर्योगः शतं सैकं वियोगः पञ्चविंशतिः।
तौ राशी वद में वत्स! वेत्सि संक्रमणं यदि॥

अर्थात् जिन दो संख्याओं का योग 101 तथा अंतर 25 हो उन दो संख्याओं को बताओं। हे लीलावती यदि तुम संक्रमण के गणित को जानती हो तो।

1.2.6 गुणकर्म

जहाँ कोई राशि अपने इष्ट अंक गुणित मूल से कम या युक्त होकर दृश्य हुई हो ऐसे स्थान पर गुणकर्म का प्रयोग करते हैं। इसे अधोलिखित उदाहरण के द्वारा समझने का प्रयास करते हैं-

प्रश्न:- वह कौन सी संख्या है जिसमें पाँच गुना मूल घटाने से चौदह बचता है ?

1.2.7 त्रैराशिक

प्रमाण, प्रमणाफल और इच्छा इन तीन राशियों को जानकर इच्छाफल जानने की क्रिया को त्रैराशिक कहते हैं। आचार्य भास्कर त्रैराशिक गणित को ही पाटी गणित का मूल कहते हुये लिखते हैं-

अस्ति त्रैराशिकं पाटी बीजं च विमला मतिः।
किमज्ञातं सुबुद्धीनामतो मन्दार्थमुच्यते॥

अर्थात् त्रैराशिक ही पाटी गणित है और निर्मल बुद्धि ही बीजगणित है। जिनकी बुद्धि सुबुद्ध है अर्थात् तीव्र है और गुणग्राही है, उनके लिए कौन सी वस्तु अज्ञात है।

त्रैराशिक के ज्ञान के लिए भास्कराचार्य सूत्र देते हैं कि-

प्रमाणमिच्छा च समानजाती
आद्यन्योस्तत्फलमन्यजाति।
मध्ये तदिच्छाहतमाद्यहत् स्यात्
इच्छाफलं व्यस्तविधिर्विलोमे॥

अर्थात् प्रमाण और इच्छा ये दोनो एक जाति की होती है अतः इन दोनों को आदि एवं अन्त में रखा जाता है तथा प्रमाण भिन्न जाति का होता है अतः उसे मध्य में रखा जाता है। प्रमणाफल और इच्छा को गुणा करके प्रमाण से भाग देने पर लब्धि इच्छाफल प्राप्त होता है। उदाहरणार्थ किसी ने पूछा पाँच रू. में 100 आम मिलते हैं तो 7 रू. में कितने मिलेंगे? यहाँ प्रश्न में 5 रू. प्रमाण और 100 प्रमाणफल हैं तथा 7 इच्छा है। जहाँ प्रमाण और इच्छा एक जाति अर्थात् रू. में है तथा फल भिन्न जाति का है। अतः सूत्रानुसार-

$$\frac{100 \times 7}{5} = 140 \text{ आम}$$

इसी प्रकार से जन्तुओं के आयु के मूल्य में उत्तम के साथ अधम मोल वाले तौल में, किसी संख्या में भिन्न-भिन्न भाजक से भाग देने में व्यस्त त्रैराशिक का प्रयोग किया जाता है। त्रैराशिक के ही प्राकर से पंचराशिक, सप्तराशिक तथा नवराशिक को भी बताया गया है।

1.2.8 मिश्रक-गणित

मूलधन एवं व्याज के मिश्रण और अन्य मिश्रित मान से सम्बन्धित गणितीय समस्याओं को जिस गणितीय परिक्रिया के द्वारा साधन किया जाता है वह मिश्रक गणित कहा जाता है।

उदाहरण से इसे समझने का प्रयास करते हैं- 1 माह में रू.100 के 5 रू. व्याज के हिसाब से यदि बारह मास में मूलधन सहित व्याज 1000 रू. हो गया तो मूलधन एवं व्याज अलग-अलग बताएँ। इस प्रकार के गणितीय व्यवहार को मिश्रक गणित में स्पष्ट किया गया है।

1.2.9 क्षेत्रव्यवहार

पाटी गणित या अंक गणित में क्षेत्र व्यवहार अध्याय का विशेष प्रतिपादन किया गया है। क्षेत्रव्यवहार में ज्यामिति के समस्त अवयवों का वर्णन किया गया है। जैसे- आयत, वर्ग, त्रिभुज, वृत्त, घनफल, विविध भुजीय क्षेत्र इत्यादि। इन सभी रैखिक क्षेत्रों के विविध इकाइयों यथा क्षेत्रफल आदि के आनयन क्षेत्र व्यवहार अध्याय में प्रतिपादित है।

1.2.10 खातगणित

खात गणित या खात व्यवहार से तात्पर्य विभिन्न आकार के बनावट वाले गड्ढे से है। उदाहरण से समझते हैं कि यदि किसी गड्ढे में टेढ़े होने के कारण दैर्घ्यमान 10,11 और 12 हाथ है तथा तीन स्थान में विस्तार भी 5,6,7 हाथ तीन प्रकार है। तो उस खात में कितने घन हस्त होंगे? इस प्रकार के प्रश्नों के समाधान के लिए आचार्य सूत्र बताते हैं-

गणयित्वा विस्तारं बहुषु स्थानेषु तद्युतिर्भाज्या
स्थानकमित्या सममित्तिरेवं दैर्घ्ये च वेधे च।
क्षेत्रफलं वेधगुणं खाते घनहस्तसंख्या स्यात्।

अर्थात् जिस गड्ढे की लम्बाई सर्वत्र सामान नहीं हो अथवा चौड़ाई या गहराई भी सर्वत्र सामान नहीं हो वहां चौड़ाई को अनेक स्थान पर माप कर उसके योग में स्थान संख्या (अर्थात् जितने जगह चौड़ाई मापी गई हो उस संख्या) से भाग देने से चौड़ाई का मान प्राप्त होता है। इसी प्रकार लम्बाई और गहराई को भी समरूप बना लेते हैं। फिर क्षेत्रफल को गहराई से गुणा करने पर घनहस्त का मान प्राप्त होता है।

1.2.11 क्रकच-गणित

क्रकच गणित व्यवहार में मुख्य रूप से चिति ज्ञान, लकड़ी के गट्टे का ज्ञान इत्यादि वर्णित होते हैं। जैसे किसी ईंट के दीवाल में कितने ईंट हैं अथवा कितने ईंटों से किस लम्बाई चौड़ाई की दीवार बनाई जा सकती है। इस विषय को क्रकच गणित के द्वारा जाना जा सकता है। उदाहरण स्वरूप भास्कराचार्य के एक प्रश्न को लेते हैं-

अष्टादशांगुल दैर्घ्यं विस्तारो द्वादशांगुलः।

उच्छ्रितिस्रयंगुला यस्यामिष्टिकास्ताश्चितौ किला।

अर्थात् जिस ईंट की लम्बाई 18 अंगुल, चौड़ाई 12 अंगुल, ऊँचाई 3 अंगुल है, इस प्रकार के ईंट की एक दीवार है। जिसकी चौड़ाई 5 हाथ, लम्बाई 8 हाथ और ऊँचाई 3 हाथ है उस दीवार में ईंट की संख्या कितनी है तथा कितने पंक्तियों में ईंट लगाए गए हैं। ऐसे प्रश्नों को हल करने के लिए आचार्य भास्कर सूत्र लिखते हैं-

उच्छ्रयेण गुणितः चितेः किल क्षेत्रसम्भवफलं घनं भवेत्।

इष्टिकाघनहते घने चितेरिष्टिकापरिमितिश्च लभ्यते॥

इष्टिकोच्छ्रयहदुच्छ्रितिश्रितेःस्यु स्तराश्च दृषदां चितेरति।

अर्थात् चिति के क्षेत्रफल को चिति के ऊँचाई से गुणा करने से चिति का घनफल होता है। चिति के घनफल में ईंट के घन से भाग देने से ईंटों की संख्या होती है और चिति की ऊँचाई में ईंट की ऊँचाई से भाग देने से लब्धि स्तर की संख्या होती है।

1.2.12 राशि एवं छायागणित

राशि व्यवहार का तात्पर्य धान्य आदि के परिमाण से संबन्धित गणित से है। इस प्रकार के गणित में भूमि पर वृत्ताकार क्षेत्र में रखे हुये धान्य के परिमाण को ज्ञात किया जाता है। जिसे इस प्रश्न को उदाहरण स्वरूप लेते हैं-

समभुवि किल राशिर्यः स्थितः स्थूलधान्यः

परिधिनपरिमितिः स्याद्भस्तषष्टिर्यदीया।

प्रवद गणक! खार्यः किं मिताः सन्ति तस्मि

न्नथ पृथगगुधान्यैः शूकधान्यैश्च शीघ्रम्॥

अर्थात् समतल भूमि पर रखे हुए स्थूल धान्य की परिधि यदि 60 हाथ है तो उसमें कितने घनहस्त होंगे? तथा सूक्ष्म धान्य और शूक धान्य की परिधि भी यदि 60 हाथ हो तो उसमें अलग अलग खारी प्रमाण बताओं? इसी प्रकार छाया गणित व्यवहार में छाया के मान का ज्ञान तथा छाया के माध्यम से ही ऊँचाई का ज्ञान किया जाता है। इस सम्बन्ध में लीलावती में पूछा

हुआ आचार्य भास्कर का उदाहरण प्रसिद्ध है। -

शंकोर्भाकमितांगुलस्य समुते! दृष्टा किलाष्तांगुला
छायाग्राभिमुखे करद्वयमिते न्यस्तस्य देशे पुनः।
तस्यैवार्कमितांगुला यदि तदा छायाप्रदीपान्तरं
दीपौच्यं च कियद्वद व्यवहृतिं छायाभिधां वेत्सि चेत्॥

अर्थात् हे समुति! अगर तुम छाया गणित को जानती हो तो बताओ कि यदि बारह अंगुल के शंकु की छाया 8 अंगुल थी, फिर उसी शंकु को छायाग्र की तरफ 2 हाथ बढ़ाकर रखने से दूसरी छाया 16 अंगुल हुई तो छायाग्र और दीपतल का अंतर भूमि मान बताओं। तथा दीप की ऊँचाई कितनी होगी?

1.2.13 कुट्टकगणित

अंक गणित की यह पद्धति अति विशिष्ट है। किसी दी हुई संख्या का इस प्रकार का गुणक का ज्ञान करना जिससे गुणित निर्दिष्ट संख्या में निर्दिष्ट हर के भाग देने से निश्शेष लब्धि हो इस प्रकार के गणित को कुट्टक कहते हैं। उदाहरण के माध्यम से इस तथ्य को समझते हैं- 221 को जिस संख्या से गुणन करके 65 जोड़कर 195 के भाग देने से निश्शेष हो उस गुणक को ज्ञात करें। ऐसे प्रश्नों को हल करने की अनेकों विधियाँ आचार्यों ने बताई हैं। जैसे-

मिथो भजेत् तौ दृढभाज्यहारौ यावद्विभाज्ये भवतीह रूपम्।
फलान्यधोऽधस्तदधो निवेश्यः क्षेपस्तथान्ते समुपान्तिमेन॥
स्वोर्ध्वे हतेऽत्येन युते तदन्त्यं ज्यजेन्मुहुः स्यादिति राशियुग्मम्।
ऊर्ध्वो विभाज्येन दृढेन तष्टः फलं गुणः स्यादधरो हरेण॥
एवं तदैवाऽत्र यदा समास्ताः स्युर्लब्धयश्चेद्विषमास्तदानीम्।
यदागतौ लब्धिगुणौ विशोध्यौ स्वतक्षणाच्छेषमितौ तु तौ स्तः॥

इसी प्रकार के अनेकों समस्याओं तथा उनके साधनार्थ सूत्रों को आचार्यों ने कुट्टक के प्रश्न में बताया है।

1.2.14 अंकपाश

वर्तमान गणित की प्रक्रिया में अंकपाश को ही क्रमचय तथा संचय के नाम से जाना जाता है। इसके अंतर्गत अंकों के विविध क्रम या अंकों के प्रकारों की गणना की जाती है। भास्कराचार्य के अनुसार इस प्रक्रिया में गुणा, भाग, वर्ग आदि किसी भी प्रक्रिया का प्रयोग नहीं किया जाता है फिर भी इस गणित में अभिमानियों का अभिमान दूर हो जाता है। प्राचीन काल में जैन गणितज्ञों ने इसे खूब महत्व दिया। स्थानांग सूत्र में इसे इसे भंग के नाम से बताया गया है तथा भगवती सूत्र में इसे एक संयोग, द्विक संयोग आदि के नाम से अभिहित किया गया है। शिलांक सूरी इसे विकल्प के नाम से प्रतिपादित करते हैं। इसके लिए शिलांक सूरी सूत्र बताते हैं कि-

एकाद्या गच्छपर्यन्ता परस्परसमाहताः।
राशयस्तद्धि विज्ञेयं विकल्प गणिते फलम्॥

अर्थात् एक से लेकर जहां तक की संख्या का मान ज्ञात करना अभीष्ट हो वहां तक परस्पर गुणा करने से प्राप्त राशि विकल्प गणित का फल होती है।

उदाहरण के द्वारा हम समझने का प्रयास करते हैं यदि भगवान विष्णु के 4 हाथों में गधा, चक्र, कमल और संख को परस्पर बदल कर एक दूसरे हाथ में रखने से कुल कितने प्रकार के मूर्तियों के भेद बनेंगे?

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$$

सूत्र का प्रयोग करते हुए इसका भेद प्राप्त करना आसान है।

इस प्रकार आचार्यों ने इन विषयों का प्रतिपादन अपने अपने ग्रंथों में विविध प्रकार से किया है।

1.3 सारांश

प्रिय जिज्ञासुओं ! अभी हमने अंकगणित को समझा और इसका परिचय प्राप्त किया। यदि सार रूप में इसे समझा जाए तो ज्योतिषशास्त्र के सिद्धांत स्कंध के अंतर्गत दो प्रकार के गणित की चर्चा की गई है। प्रथम अंकगणित एवं द्वितीय बीजगणित। अंकगणित को ही पाटीगणित कहा जाता है। अंक गणित के अन्य विविध नाम भी देखने को मिलते हैं जैसे धूली कर्म इत्यादि। साक्षात् अंको से सन्दर्भित गणितीय संक्रियाओं को गणित के जिस स्कंध में प्रतिपादित किया गया है उसे आचार्यों ने अंकगणित कहा है। ज्योतिषशास्त्र को पढ़ने का अधिकारी भी वही है जिसे व्याकरण के साथ-साथ यह दो प्रकार के गणित आते हैं। इन दो प्रकार के गणितों को ना जानने वाला दैवज्ञ केवल नाम मात्र का दैवज्ञ है।

अंकगणित के अन्तर्गत विविध गणितीय विधियां बताई गई हैं जिससे मानव जीवन के विविध समस्याओं का गणितीय समाधान प्राप्त किया जा सकता है। जैसे विविध अंको को भिन्न-भिन्न प्रकार से यथा क्रम से अथवा व्युत्क्रम से जोड़ने के लिए संकलन की विविध विधियां बताई गई है उसी प्रकार से संख्याओं के अंतर को क्रम अथवा व्युत्क्रम से प्राप्त करने के लिए व्यवकलन की विधियां बताई गई हैं। आचार्यों ने संख्याओं का गुणनफल प्राप्त करने के लिए गुणा करने के अनेक नियम बताए जिसमें ऊर्ध्व तिर्यग्भ्याम्, एकाधिकेन पूर्वेण तथा भास्कराचार्य द्वारा बतायी गयी विविध विधियां आज भी सबसे अधिक व्यवहार में हैं।

इसी प्रकार संख्याओं के वर्ग को बताने के लिए अथवा उनके ज्ञान के लिए आचार्यों ने वर्ग कर्म के दस से भी अधिक सूत्र गणित कौमुदी, लीलावती, गणित सार संग्रह आदि ग्रंथों में बताया है। इसी प्रकार से बड़े-बड़े संख्याओं के वर्गमूल को प्राप्त करने की विधियां आचार्यों ने बहुत ही सहज प्रकार से बताया है।

जैसा कि हम जानते हैं की शून्य एक विशिष्ट प्रकार की संख्या है। अतः इसके धन, ऋण, गुणन एवं भजन की विधियां भी भिन्न हैं। इसे भास्कर प्रभृति आचार्यों ने शून्य कर्म के रूप में अलग से अपने ग्रंथ में या अंकगणित के प्रतिपादन के क्रम में बताया है।

इसके बाद अभीष्ट अंक की कल्पना कर शेष गणितीय संक्रिया के ज्ञान के लिए आचार्यों ने ईस्ट कर्म को बताया है।

इसके बाद जिस भी गणितीय समस्या में जहां दो संख्याओं का योग तथा अंतर देकर यदि मूल

संख्या पूछी गई हो ऐसे प्रश्नों के समाधान में संक्रमण गणित को बहुत ही उपयोगी प्रकार से समझाया है।

जहां कोई राशि अपने इष्ट अंक गुणित मूल से कम या युक्त होकर दृश्य होती हो ऐसे स्थानों पर आचार्यों ने गुण कर्म के प्रयोग को उचित माना है तथा इसका विधिवत प्रतिपादन किया है।

भास्कर आदि आचार्य यह बात कहते हैं कि त्रैराशिक से प्रायः सभी गणितीय समस्याओं का हल जाना जा सकता है तथा त्रैराशिक गणित ही पाटी गणित है। अतः इसकी विशेषता को देखते हुए आचार्यों ने त्रैराशिक, व्यस्त त्रैराशिक, पंचराशिक, नवराशिक आदि को बताया है।

इसी प्रकार मूलधन एवं ब्याज के मिश्रण और अन्य मिश्रित मान से सम्बन्धित गणितीय समस्याओं को सुलझाने के लिए मिश्रक गणित को उपयुक्त माना है।

अंकगणित के अंतर्गत प्रायः सभी आचार्यों ने ज्यामिति को भी लिया है तथा ज्यामिति से सन्दर्भित सूत्रों के सन्दर्भ में विशिष्ट चर्चाएं प्राप्त होती हैं। जिसे क्षेत्र व्यवहार के नाम से सामान्यतः जाना जाता है।

इसी प्रकार गड्ढे से सन्दर्भित या खात से सन्दर्भित गणित को आचार्यों ने खात व्यवहार तथा दीवार से सम्बन्धित गणितीय समस्याओं को क्रकच गणित के अन्तर्गत बताया है।

भारत एक कृषि प्रधान देश है अतः धान्य एवं राशि आदि के मान तथा परिमाण से सन्दर्भित समस्याओं को सुलझाने के लिए राशि गणित को आचार्यों ने बताया तथा छाया एवं प्रकाश की ऊंचाई को जानने के लिए छाया गणित को बताया। आचार्य भास्कर का एक बड़ा ही सुन्दर प्रश्न है। वह लीलावती से पूछते हैं कि "यदि 12 अंगुल के शंकु की छाया 8 अंगुल थी फिर उसी शंकु को छाया के अग्रभाग की ओर दो हाथ बढ़ाकर रखने से दूसरी छाया 16 अंगुल हुई तो छाया के अग्रभाग और दीपक का अंतर बताओ तथा दीप की ऊंचाई कितनी होगी यह भी बताओ। अगर तुम छाया की गणित को जानती हो!" इस प्रकार के गणितीय समस्याओं को आचार्यों ने छाया गणित के अंतर्गत प्रतिपादित किया है।

किसी दी हुई संख्या का ऐसा गुणक का ज्ञान करना जिससे गुणित निर्दिष्ट संख्या में निर्दिष्ट हर के भाग देने से निःशेष लब्धि हो। इस प्रकार के गणित को कुट्टक गणित कहा गया है। कुट्टक का अर्थ होता है बार-बार कूटना या उसे तोड़ना।

इस प्रकार अंक गणित के विविध विषय अंक गणित के प्रमुख पुस्तकों यथा आर्यभट्टीय, पंच सिद्धांतिका, ब्रह्मस्फुट सिद्धान्त, गणित सार संग्रह, गणित कौमुदी, लीलावती आदि में विस्तृत रूप से बताया गया है। इस प्रकार अंकगणित को हम इन पुस्तकों में भी विशेष रूप से पढ़ सकते हैं तथा भारतीय ज्ञान परम्परा को आगे बढ़ा सकते हैं। इसी प्रकार मानव जीवन की समस्याओं को गणित के माध्यम से सुलझा सकते हैं।

1.4 पारिभाषिक पद

- गणितीय संक्रियाएं : अंकों के साथ विविध धन ऋण आदि क्रियाएं।
- दैवज्ञ : ज्योतिषशास्त्र को जानने वाला शास्त्रवेत्ता।
- कृति : वर्ग का ही दूसरा नाम कृति है।

- राशि : संख्या
- अष्ट परिकर्म: जोड़ना, घटाना, गुणा करना, भाग देना, वर्ग, वर्गमूल, घन एवं घनमूल को सम्मिलित रूप से अष्ट परिकर्म की संज्ञा दी गई है।
- धूलीकर्म: प्राचीन काल में आचार्यों ने गणित को ही धूली कर्म कहा है क्योंकि जमीन पर अर्थात् धूल पर गणितीय संक्रियाएं को संपादित कर उसे पुनः पुनः मिटा दिया जाता था।

1.5 सन्दर्भ ग्रन्थ

1. आर्यभट्टीयम- आर्यभट – चौखम्बा सुरभारती प्रकाशन
2. लीलावती – भास्कराचार्य- चौखम्बा सुरभारती प्रकाशन
3. गणित कौमुदी- नारायण पंडित – प्रिंसेस ऑफ़ वेल्स सीरीज, सरस्वती भवन पुस्तकालय
4. त्रिशतिका- श्रीधराचार्य (सुकुशेमा अनुवाद- प्रो. सुद्युम्न आचार्य)- राष्ट्रिय संस्कृत संस्थान
5. गणित सार संग्रह- महावीराचार्य (सम्पादन- रंगाचार्य) –राजकीय मुद्राक्षरशाला, मद्रास
6. ब्रह्म स्फुट सिद्धांत – ब्रह्मगुप्त (सम्पादन- पण्डित राम स्वरूप शर्मा) – इंडियन इंस्टिट्यूट ऑफ़ एस्ट्रोनॉमिकल एंड संस्कृत रिसर्च

1.6 बोध प्रश्न

1. अंक गणित से क्या समझते हैं, स्पष्ट करें?
2. शून्य परिकर्म क्या है? विस्तार से लिखिए।
3. क्षेत्र व्यवहार से आप क्या समझते हैं? व्याख्या कीजिए।
4. अंकगणित के मुख्य विषयों का प्रतिपादन करें?
5. कुट्टक गणित किस प्रकार की गणितीय समस्या में प्रयुक्त किया जाता है ?