
इकाई 4 वृत्त

इकाई की रूपरेखा

- 4.0 उद्देश्य
- 4.1 वृत्त की परिभाषा
- 4.2 वृत्त के अंग
- 4.3 वृत्त का क्षेत्रफल
- 4.4 वृत्त की जीवा के गुण
- 4.5 वृत्त के प्रकार
- 4.6 सारांश
- 4.7 शब्दावली
- 4.8 कुछ उपयोगी पुस्तकें
- 4.9 बोध/अभ्यास प्रश्नों के उत्तर

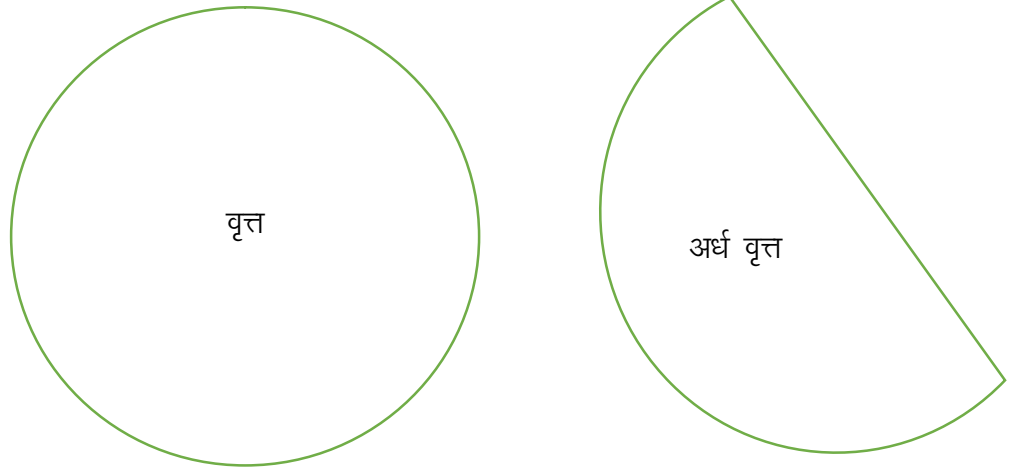
4.0 उद्देश्य

इस इकाई का उद्देश्य है कुछ ज्यामितीय एवं त्रिकोणमितीय आकारों से परिचित करवाना है जिनके आधार पर ज्ञान की ये शाखाएँ अपना विस्तार करती हैं। ज्यामिति बहुत ही व्यापक और अनेक क्षेत्रों में उपयोग की विद्या है। जिसे हम जाने अनजाने उपयोग करते रहते हैं। दूसरे शब्दों में, जितनी भी संभव आकृतियाँ हैं सभी ज्यामितीय आकृतियाँ ही हैं। जब उन आकृतियों का लेखा-जोखा होने लगता है तो वहाँ ज्यामिति आ जाती है, चाहे वह यज्ञ की वेदी का निर्माण हो, भवन हो, सड़क हो, कुआँ हो या कोई भी निर्माण, ज्यामिति और उनकी आकृतियों की आवश्यकता होती है।

4.1 वृत्त की परिभाषा

किसी एक निश्चित बिंदु से समान दूरी पर स्थित बिंदुओं का बिन्दुपथ वृत्त कहलाता है। यह निश्चित बिंदु, वृत्त का केंद्र कहलाता है, केंद्र और वृत्त की परिधि के किसी भी बिन्दु के बीच की दूरी वृत्त की त्रिज्या कहलाती है। वृत्त एक साधारण बंद वक्र होता है जो समतल को दो क्षेत्रों में विभाजित करता है: एक आंतरिक और एक बाहरी।

वृत्त एक प्रकार का शांकव (शंकु परिच्छेद) होता है जिसकी उत्केंद्रता शून्य होती है अर्थात् नियता समतल में अनंत पर स्थित होती है। एक वृत्त को एक विशेष प्रकार के दीर्घवृत्त के रूप में भी परिभाषित किया जा सकता है जिसमें दोनों नाभियाँ संपाती होती हैं और उत्केंद्रता 0 होती है। यूक्लिड के अनुसार, 'वृत्त एक रेखा से घिरा हुआ एकविमीय समतल होता है और किसी निश्चित बिंदु से लेकर उस बंधरेखा तक खींची गई सभी रेखाएं बराबर होती हैं। इस बंधरेखा को परिधि और इस निश्चित बिंदु को वृत्त का केंद्र कहते हैं।



4.2 वृत्त के अंग

चाप (Arc): वृत्त की परिधि का कोई भी भाग।

केंद्र (Centre): वृत्त पर स्थित सभी बिंदुओं से समदूरस्थ बिंदु।

जीवा (Chord): एक रेखाखंड, जो वृत्त पर स्थित किन्हीं दो बिंदुओं को मिलने पर बनता है। एक जीवा वृत्त को दो वृत्तखंडों में विभाजित करती है।

परिधि (Circumference): वृत्त के चारों ओर की वक्र लंबाई।

व्यास (Diameter): एक रेखाखंड जिसके अंतबिन्दु वृत्त पर स्थित होते हैं और जो केंद्र से गुजरता है या वृत्त के किन्हीं दो बिंदुओं के बीच की अधिकतम दूरी है। यह वृत्त की सबसे बड़ी जीवा होती है और यह त्रिज्या की दोगुनी होती है।

डिस्क (Disc): एक वृत्त से घिरा अन्तः समतलीय क्षेत्र।

त्रिज्या (Radius): वृत्त के केंद्र से वृत्त की परिधि के किसी भी बिंदु तक का एक रेखाखंड, जो व्यास का आधा होता है।



चाप (Arc), त्रिज्याखंड (Sector) एवं वृत्तखंड (Segment)

त्रिज्याखंड (Sector): किन्हीं दो त्रिज्याओं के बीच एक चाप से घिरा क्षेत्र।

वृत्तखण्ड (Segment): एक क्षेत्र जो वृत्त की एक जीवा और एक चाप से घिरा होता है। एक जीवा वृत्त को दो वृत्तखंडों में विभाजित करती है।

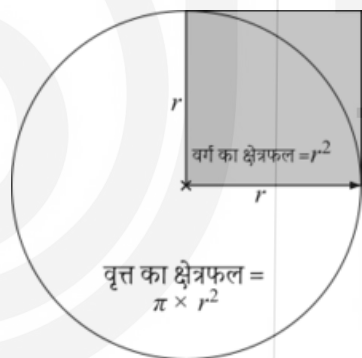
छेदन रेखा या छेदिका (Secant): एक विस्तारित जीवा, जो वृत्त के समतलीय होती है तथा वृत्त को दो बिन्दुओं पर प्रतिच्छेदित करती है।

स्पर्शी या स्पर्श रेखा (Tangent): वृत्त के समतलीय सीधी रेखा जो एक बिंदु पर वृत्त को स्पर्श करती है।

अर्धवृत्त (Semicircle): वृत्त के व्यास तथा व्यास के अंतबिन्दुओं से बने चाप के मध्य का क्षेत्र अर्धवृत्त होता है। अर्धवृत्त का क्षेत्रफल, वृत्त के सम्पूर्ण क्षेत्रफल का आधा होता है।

- वृत्त के एक बिन्दु पर एक और केवल एक स्पर्श रेखा होती है।
- किसी वृत्त की स्पर्श रेखा छेदक रेखा की एक विशिष्ट दशा है जब संगत जीवा के दोनों सिरे संपाती हो जाएँ।
- स्पर्श रेखा और वृत्त के कॉमन प्वांट (उभयनिष्ठ बिन्दु) को स्पर्श बिन्दु (point of contact) कहते हैं। तथा स्पर्श रेखा को वृत्त के उभयनिष्ठ बिन्दु पर स्पर्श करना कहते हैं।
- वृत्त के अंदर स्थित किसी बिन्दु से जाने वाली वृत्त पर कोई स्पर्श रेखा नहीं है।
- वृत्त पर स्थित किसी बिन्दु से वृत्त पर एक और केवल एक स्पर्श रेखा है।
- वृत्त के बाहर स्थित किसी बिन्दु से जाने वाली वृत्त पर दो और केवल दो स्पर्श रेखाएँ हैं।
- बाह्य बिन्दु P से वृत्त के स्पर्श बिन्दु तक स्पर्श रेखा खंड की लम्बाई को बिन्दु P से वृत्त पर स्पर्श रेखा की लम्बाई कहते हैं।

4.3 वृत्त का क्षेत्रफल:



वृत्त का क्षेत्रफल = $\pi \times$ छायांकित वर्ग का क्षेत्रफल

आर्किमिडीज ने वृत्त के क्षेत्रफल मापन में सिद्ध किया कि एक वृत्त का क्षेत्रफल, एक त्रिभुज के क्षेत्रफल के बराबर है, जिसका आधार वृत्त की परिधि की लंबाई के बराबर और इसकी ऊंचाई वृत्त की त्रिज्या के बराबर होती है। अतः π तथा त्रिज्या के वर्ग का गुणनफल, वृत्त के क्षेत्रफल के बराबर होता है।

4.4 वृत्त की जीवा के गुण

- केंद्र से होकर जाने वाली जीवा उस वृत्त की सबसे बड़ी जीवा होती है। इसे 'व्यास' (वपुःसमजमत) कहते हैं।
- किसी वृत्त का व्यास उस वृत्त को दो समान भागों में विभक्त करता है।
- व्यास, त्रिज्या का दोगुना होता है। अर्थात् व्यास = 2 (त्रिज्या)
- किसी वृत्त में केंद्र से समान दूरी पर खींची गयी जीवाओं की लंबाई समान होती है।

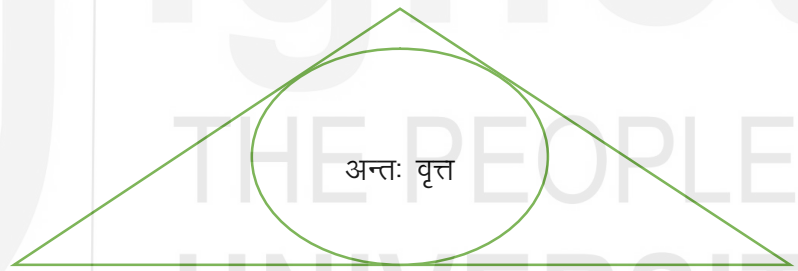
- किसी वृत्त में समान लंबाई की जीवाएं केंद्र से समान दूरी पर होती हैं।

4.5 वृत्त के प्रकार

ज्यामिति में किसी बहुभुज का परिवृत्त (circumscribed circle) ऐसा वृत्त होता है जो उस बहुभुज के हर शीर्ष से गुजरता हो। इस वृत्त के केन्द्र को परिकेन्द्र (circumcenter) और त्रिज्या (radius) को परित्रिज्या (circumradius) कहते हैं। प्रत्येक बहुभुज ऐसा नहीं होता कि उसके लिए एक परिगत वृत्त बनाया जा सके और जिसके लिए परिगत वृत्त सम्भव होता है उसे वृत्तीय बहुभुज (cyclic polygon) कहा जाता है। सारे सम-सरल बहुभुज (regular simple polygon), त्रिभुज और आयत वृत्तीय होते हैं। त्रिभुज के अंतवृत्त के लिए उसकी तीनों भुजाओं की माध्यिकाओं के कटान बिंदु से भुजा पर डाले गए लम्ब को त्रिज्या मानकर बनाते हैं।

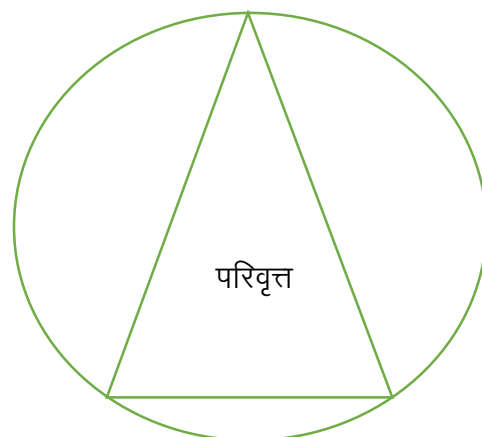
किसी त्रिभुज का परिवृत्त उस त्रिभुज के तीनों शीर्षों से होकर जाता है। इस वृत्त का केन्द्र परिकेन्द्र कहलाता है। परिकेन्द्र निकालने के लिए किन्हीं दो भुजाओं का लम्बार्धक खींचते हैं, जहाँ ये दोनों लम्बार्धक मिलते हैं वही उस त्रिभुज का परिकेन्द्र होगा। परिकेन्द्र से तीनों शीर्षों की दूरी समान होगी, जिसे परित्रिज्या (R) कहते हैं।

ज्यामिति में, किसी त्रिभुज का अन्तवृत्त (या, अन्तःवृत्त) वह बड़ा से बड़ा वृत्त है जो उस त्रिभुज के अन्दर बनाया जा सकता है। वस्तुतः, अन्तःवृत्त तीनों भुजाओं को स्पर्श करता है। इसका केन्द्र 'अन्तःकेन्द्र' कहलाता है।



किसी त्रिभुज के तीन बहिर्वृत्त (excircle या escribed circle) होते हैं। ये तीनों वृत्त उस त्रिभुज के बाहर होते हैं। इनमें से प्रत्येक वृत्त, त्रिभुज की किसी एक भुजा को तथा शेष दो भुजाओं को आगे बढ़ाने से बनी दो रेखाओं को स्पर्श करता है।

किसी त्रिभुज के तीनों शीर्षों से होकर जाने वाले वृत्त को उस त्रिभुज का परिवृत्त (Circumcircle) कहते हैं।



बोध/अभ्यास प्रश्न

1. केंद्र और परिधि के किसी भी बिन्दु के बीच की दूरी को क्या कहते हैं?
2. वृत्त पर स्थित सभी बिंदुओं से समदूरस्थ बिंदु क्या कहलाता है?
3. त्रिज्या व्यास का होती है।
4. वृत्त के समतलीय सीधी रेखा जो एक बिंदु पर वृत्त को स्पर्श करती है, उसका नाम है –
5. अन्तःवृत्त त्रिभुज की कितनी भुजाओं को स्पर्श करती है?

3.5 सारांश

इस इकाई के विधिवत् अध्ययन से आप वृत्त की परिभाषा, वृत्त के अंग और उसका क्षेत्रफल समबंधी परिचय प्राप्त कर चुके हैं। यह जान चुके हैं ज्यामिति बहुत ही व्यापक और अनेक क्षेत्रों में उपयोग की विद्या है। परिवृत्त, परिकेन्द्र, परित्रिज्या, वृत्तीय बहुभुज आदि शब्दों से परिचित हो चुके हैं। आप जान चुके हैं कि वृत्त की जीवा के गुण क्या हैं, वृत्त के प्रकार आदि।

4.7 शब्दावली

अन्तर्वृत्त – किसी त्रिभुज का अन्तर्वृत्त (या, अन्तःवृत्त) वह बड़ा से बड़ा वृत्त है जो उस त्रिभुज के अन्दर बनाया जा सकता है।

परिवृत्त – किसी त्रिभुज के तीनों शीर्षों से होकर जाने वाले वृत्त को उस त्रिभुज का परिवृत्त (Circumcircle) कहते हैं।

केंद्र (Centre): वृत्त पर स्थित सभी बिंदुओं से समदूरस्थ बिंदु।

4.8 कुछ उपयोगी पुस्तकें

- सरस्वती टी. ए., प्राचीन और मध्य कालीन भारत में ज्यामिति, दिल्ली
- आचार्य सुद्युम्न, गणित शास्त्र के विकास की भारतीय परम्परा, दिल्ली, मोतीलाल बनारसीदास, 2006
- शर्मा महेन्द्र, भारत के महान गणितज्ञ, दिल्ली, प्रभात प्रकाशन, 2019
- ब्रज मोहन, गणित का इतिहास, लखनऊ, उत्तर प्रदेश, हिन्दी समिति, सूचना विभाग
- श्रीवास्तव सी. एम., वैदिक गणित पद्धति, मनोज पब्लिकेशन्स, दिल्ली, 2022
- वेताल आनन्द, वैदिक गणित, दिव्य ज्योति प्रकाशन, जयपुर, 1995

4.9 बोध/अभ्यास प्रश्नों के उत्तर

1. त्रिज्या
2. केन्द्र
3. आधा
4. स्पर्श रेखा
5. तीनों