इकाई 3 परिकल्पना परीक्षण : विहंगावलोकन*

इकाई की रूपरेखा

3.0 उद्देश्य

3.1 विषय–प्रवेश

3.2 परिकल्पना परीक्षण की प्रक्रिया

3.3 आकलन विधियाँ

3.4 अस्वीकृति क्षेत्र और त्रुटियों के प्रकार

3.4.1 वृहद प्रतिदर्शों के लिए अस्वीकृति क्षेत्र

3.4.2 एक–पुच्छ और दो–पुच्छ परीक्षण

3.4.1 लघु प्रतिदर्शों के लिए अस्वीकृति क्षेत्र

3.5 त्रुटियों के प्रकार

3.6 परीक्षण की शक्ति

3.7 प्राचल आकलन के उपागम

3.7.1 सार्थकता का परीक्षण उपागम

3.7.2 विश्वस्तता अंतराल उपागम

3.8 सार–संक्षेप

3.9 बोध प्रश्नों के उत्तर अथवा संकेत

3.0 उद्देश्य

प्रस्तुत इकाई को पढ़ने के बाद आप इस योग्य होंगे कि –

- परिकल्पना परीक्षण की संकल्पना और सार्थकता पर प्रकाश डाल सकें;
- किसी परीक्षण प्रतिदर्शज के अनुप्रयोगों का वर्णन कर सकें;
- समष्टि प्राचल संबंधी परिकल्पना के परीक्षण की प्रक्रिया स्पष्ट कर सकें;
- टाइप–I और टाइप–II त्रुटियों के बीच अंतर स्पष्ट कर सकें; तथा
- दो भिन्न–भिन्न प्रतिदर्शों से प्राचलों की तुलना करने के लिए परीक्षण व्यवहार में ला सकें।

3.1 विषय–प्रवेश

सांख्यिकीय अनुमिति का मूल उद्देश्य समष्टि प्राचलों के विषय में निर्णय लेने के लिए किसी प्रतिदर्श का प्रयोग करना ही होता है। परिकल्पना परीक्षण की संकल्पना किसी प्रतिदर्श का प्रयोग कर समष्टि प्राचलों के मान का पूर्वानुमान किए जाने के लिए अत्यंत महत्वपूर्ण मानी जाती है। समष्टि माध्य और विचरण से संबंधित परिकल्पनाओं का परीक्षण करने के लिए विभिन्न परीक्षण प्रतिदर्शजों का प्रयोग किया जाता है। परिकल्पना परीक्षण का प्रयोग कर दो भिन्न–भिन्न प्रतिदर्शों के विचरण की तुलना भी की जा सकती है।

परिकल्पना के परीक्षण के लिए दो उपागम प्रचलन में हैं –

(i) सार्थकता का परीक्षण उपागम, और

(ii) विश्वस्तता अंतराल उपागम।

* डॉ. पूजा शर्मा, असिस्टेंट प्रोफेसर, दौलत राम कॉलेज, दिल्ली विश्वविद्यालय।

किसी भी परिकल्पना का परीक्षण करते समय दो प्रकार की त्रुटियाँ होने की संभावना होती है – (i) टाइप–I त्रुटि, और (ii) टाइप–II त्रुटि।

इस इकाई में हम परिकल्पना परीक्षण की प्रक्रिया के बारे में विस्तार से जानेंगे, और समुचित परीक्षण प्रतिदर्शज के आधार पर शून्य–स्तरीय परिकल्पना को अस्वीकार करने की विधि की व्याख्या करेंगे।

3.2 परिकल्पना परीक्षण की प्रक्रिया

हम आर्थिक सिद्धांत अथवा तर्क के आधार पर ही किसी परिकल्पना का निर्माण करते हैं। कोई भी परिकल्पना किसी समष्टि के कुछ विशिष्ट अभिलक्षणों के विषय में कोई अस्थायी समुक्ति होता है। जैसा कि हम जानते हैं, किसी भी समष्टि का वर्णन उसके प्राचलों (जैसे माध्य, मानक विचलन, आदि) द्वारा किया जाता है। तदनुसार, कोई भी परिकल्पना किसी समष्टि प्राचल के विषय में कोई अवधारणा होती है। कोई परिकल्पना सत्य हो भी सकती है और नहीं भी। इसी बात का पता लगाने के लिए कि हम एक विशिष्ट अर्थमितीय विधि से किसी परिकल्पना का परीक्षण करते हैं।

किसी भी परिकल्पना के निर्माण में इस विषय में कोई पूर्व निर्णय अथवा अपेक्षा शामिल होती है कि कोई विशिष्ट प्राचल क्या मान ले सकता है। उदाहरण के लिए, पूर्व ज्ञान अथवा किसी विशेषज्ञ की राय ही हमें बताती है कि स्थानीय शेयर बाजार में वास्तविक औसत कीमत और कमाई (P/E) का अनुपात 20 है। तदनुसार हमारी परिकल्पना यह होगी है कि P/E अनुपात 20 के बराबर होता है।

इस परिकल्पना का परीक्षण करने के लिए मान लीजिए कि हम शेयरों का एक यादृच्छिक प्रतिदर्श एकत्र करते हैं और पाते हैं कि औसत P/E अनुपात 23 है। क्या यह 23 का आँकड़ा सांख्यिकीय रूप से 20 से भिन्न है?

प्रतिदर्शन विचरण के कारण प्रतिदर्श आकलन और उसके समष्टिक मान के बीच अंतर होने की संभावना है। यह संभव है कि सांख्यिकीय रूप से संख्या 23 संख्या 20 से बहुत भिन्न न हो। यदि ऐसा ही है तो हमें इस परिकल्पना को अस्वीकार नहीं करना चाहिए कि औसत P/E अनुपात 20 होता है।

परिकल्पना परीक्षण में चार महत्वपूर्ण घटक होते हैं –

i) शून्य–स्तरीय परिकल्पना,

ii) वैकल्पिक परिकल्पना,

iii) परीक्षण प्रतिदर्शज, और

iv) परिणामों की व्याख्या।

आइए, अब हम इन घटकों के विषय में विस्तार से जानते हैं।

(i) **शून्य–स्तरीय और वैकल्पिक परिकल्पनाओं का निर्माण** : परिकल्पनाएँ दो प्रकार की होती हैं, यथा शून्य–स्तरीय परिकल्पना और वैकल्पिक परिकल्पना। इनमें 'शून्य–स्तरीय परिकल्पना' वह समुक्ति होती है जिसे हम समष्टि के विषय में सत्य मानते हैं। इसे 'शून्य–स्तरीय' कहा जाता है, जिसका अर्थ होता है – निरर्थक या रिक्त। उदाहरण के लिए, एक शून्य–स्तरीय परिकल्पना यह हो सकती है कि रोजगार और शिक्षा के बीच कोई संबंध नहीं होता। अतएव, यदि हम शिक्षा पर रोजगार का समाश्रयण करते हैं तो समाश्रयण गुणांक शून्य होना चाहिए। आमतौर पर हम शून्य–स्तरीय परिकल्पना को H_0 से निरूपित करते हैं। वैकल्पिक परिकल्पना शून्य–स्तरीय परिकल्पना के विपरीत होती है।

वैकल्पिक परिकल्पना को आमतौर पर H_1 से निरूपित किया जाता है। यह ध्यान देने की बात है कि H_0 और H_1 'परस्पर अनन्य' होते हैं; वे संपाती रूप से विद्यमान नहीं हो सकते।

(ii) **परीक्षण प्रतिदर्शज की पहचान** : शून्य–स्तरीय परिकल्पना का परीक्षण किसी परीक्षण प्रतिदर्शज से किया जाता है। अर्थमिति में अनेक परीक्षण प्रतिदर्शज (यथा t, F, काई–वर्ग, आदि) उपलब्ध हैं। हमें अपने लिए उपयुक्त परीक्षण प्रतिदर्शज की पहचान करनी होती है।

(iii) **परीक्षण प्रतिदर्शज के मान के आधार पर परिणामों की व्याख्या** : अपना परीक्षण पूरा करने के बाद हम परिणामों की व्याख्या करते हैं। जब हम परीक्षण प्रतिदर्शज को हमारे पास उपलब्ध प्रतिदर्श आँकड़ों पर प्रयोग करते हैं तो हमें परीक्षण प्रतिदर्शज का एक निश्चित मान ज्ञात होता है (उदाहरण के लिए, 2.535 का t–अनुपात)। परिणामों की व्याख्या में परीक्षण प्रतिदर्शजों के इन दो मानों की तुलना शामिल होती है – तालिकाबद्ध मान और संगणित मान। यदि हमारी तुलना में संगणित मान तालिकाबद्ध मान से अधिक हो तो हम शून्य–स्तरीय परिकल्पना को अस्वीकार कर देते हैं।

शून्य–स्तरीय परिकल्पना के तहत किसी भी परीक्षण प्रतिदर्शज का प्रतिदर्शन बंटन 'शून्य–स्तरीय बंटन' कहलाता है। जब आँकड़े शून्य–स्तरीय परिकल्पना के विरुद्ध प्रबल साक्ष्य दर्शाते हों तो परीक्षण प्रतिदर्शज का मान बहुत अधिक हो जाता है। परीक्षण प्रतिदर्शज के संगणित मान को देखकर ही हम अपने निष्कर्ष निकालते हैं।

परीक्षण प्रतिदर्शज के अलावा अर्थमितीय सॉफ्टवेयर एक p–मान भी प्रदान करता है। यह प्रायिकता p–मान ही दर्शाता है कि शून्य–स्तरीय परिकल्पना सत्य है। इस प्रकार, यदि हम 0.04 का p–मान ज्ञात करते हैं तो इसके अनुसार शून्य–स्तरीय परिकल्पना के सत्य होने की संभावना 0.04 या 4 प्रतिशत होगी। अतएव, यदि हम सार्थकता का 5 प्रतिशत स्तर लेते हैं तो हम शून्य–स्तरीय परिकल्पना को अस्वीकार कर देते हैं।

3.3 आकलन विधियाँ

इस पाठ्यक्रम की इकाई 2 में हमने दो अवधारणाओं का वर्णन किया है, यथा बिंदु आकलन और अंतराल आकलन। वहाँ हमने कुछ प्रायिकता बंटन फलनों जैसे कि सामान्य, t, F और काई–वर्ग के विषय में भी चर्चा की है।

आकलन की मूल रूप से तीन विधियाँ प्रचलन में हैं –

(i) न्यूनतम वर्ग,

(ii) अधिकतम संभावना, और

(iii) आघूर्ण विधि।

इस पाठ्यक्रम में हम न्यूनतम–वर्ग आकलन विधि का ही व्यापक रूप से प्रयोग करेंगे। आगे इकाई 7 में हम अधिकतम–संभावना विधि से परिचित होंगे। इस पाठ्यक्रम में, बहरहाल, हमारा परिचय 'आघूर्ण विधि' से नहीं कराया जाएगा। इससे इतर, पाठ्यक्रम "BECC 107: इकाई 5' में हमने समाश्रयण की अवधारणा पर चर्चा की है। उस इकाई के पाठांश 5.9 में हमने उल्लेख किया है कि समाश्रयण में त्रुटि चर को न्यूनतम किया जाना चाहिए। इस उद्देश्य से ही हमने त्रुटि पदों के वर्गों के योगफल ($\sum u_i^2$) को न्यूनतम किया।

अब आप अनुमान लगा सकते हैं कि इसे न्यूनतम वर्ग विधि क्यों कहा जाता है। इस पाठ्यक्रम में हम साधारण न्यूनतम वर्ग (OLS) विधि तक ही सीमित रहेंगे। इस विधि (OLS) में सबसे पहले हम दो–चर उदाहरण लेंगे। तदंतर हम इसे दो से अधिक चरों तक बढ़ाएँगे। यह हमें बहु समाश्रयण मॉडल की ओर ले जाएगा।

'साधारण न्यूनतम वर्ग' (OLS) नाम से ही ज्ञात होता है कि यह न्यूनतम वर्ग विधियों में सबसे सरल है। इसका तात्पर्य यह है कि आगे की जटिलताओं को भी इस (OLS) विधि के अंतर्गत लाया जा

सकता है। यथातथ्य रूप से ऐसा ही है; सामान्यीकृत न्यूनतम वर्ग (GLS), दो–चरण न्यूनतम वर्ग (2SLS), तीन–चरण न्यूनतम वर्ग (3SLS), आदि विधियाँ उपलब्ध हैं। इसीलिए, जब कभी हम न्यूनतम वर्ग विधि के विषय में पढ़ें तो सावधान रहें – इस बात पर ध्यान दें कि पाठ किस विधि का जिक्र कर रहा है।

जब कभी आप किसी प्रसंग में सामान्यीकृत न्यूनतम वर्ग (GLS) पदबंध से परिचित हों तो इसे साधारण न्यूनतम वर्ग (OLS) समझकर भ्रमित न हों – ये दोनों विधियाँ परस्पर भिन्न हैं।

उक्त दोनों (OLS और GLS) विधियों में त्रुटि पदों के वर्गों का योगफल न्यूनतम होता है (इसीलिए दोनों का न्यूनतम वर्ग विधि के रूप में संदर्भ दिया जाता है) परंतु परवर्ती (GLS) के उदाहरण में

समाश्रयण मॉडल का कुछ रूपांतरण होता है।

इस पाठ्यक्रम में न्यूनतम वर्गों की उन्नत विधियों पर विचार नहीं किया गया है।

याद रखें कि न्यूनतम वर्ग विधि का क्रियान्वयन करने के लिए आपको चरों के विषय में कोई समाश्रयण बंटन फलन मानकर चलने की आवश्यकता नहीं पड़ती है।

अधिकतम संभावना (ML) विधि चरों के विषय में कोई संभाव्यता बंटन मानकर चलती है। प्रसामान्य बंटन अधिकतम संभावना आकलन में सर्वाधिक प्रयुक्त प्रायिकता बंटन फलन है। अधिकतम संभावना (ML) विधि में हम एक संभावना फलन बनाते हैं, जो कि प्रायिकता बंटन फलन से अवकलित होता है।

यह ध्यान देने की बात है कि अर्थमिति में हमें आँकड़े दिए जाते हैं – ये आँकड़े किसी प्रतिदर्श सर्वेक्षण से प्राप्त किए जाते हैं। हम समाश्रयण मॉडल के प्राचलों का आकलन इस अवधारणा के तहत करते हैं कि आँकड़े किसी प्रायिकता बंटन फलन (उदाहरण के लिए, प्रसामान्य बंटन) का अनुसरण करते हैं।

प्रायिकता फलन किसी भी प्रायिकता बंटन फलन का अनुसरण कर सकता है; सिर्फ प्रसामान्य बंटन का ही नहीं। अपने सांख्यिकी पाठ्यक्रम से याद करें कि प्रायिकता बंटन फलन में हमें प्राचल दिए जाते हैं और हम किसी विशिष्ट आँकड़ा समुच्चय की विद्यमानता की संभावना का पता लगाते हैं। अधिकतम संभावना (ML) विधि में हम इसके विपरीत करते हैं, यथा हमें आँकड़े दिए जाते हैं और हम किन्हीं प्राचलों का आकलन कर रहे होते हैं।

आघूर्ण विधि (MOM) आघूर्ण जनक फलन (MGF) गुणधर्मों का प्रयोग करती है। 'आघूर्ण' की अवधारणा से परिचय BECC 107 की इकाई 4 में कराया गया है। कुछ प्रायिकता बंटनों के आघूर्ण जनक फलन का प्रयोग प्राचलों के आकलन के लिए किया जाता है। आघूर्ण विधि काफी उन्नत है और इस पाठ्यक्रम के विषय–क्षेत्र से बाहर है।

3.4 अस्वीकृति क्षेत्र और त्रुटियों के प्रकार

पिछली इकाई में हमने बिंदु आकलन और अंतराल आकलन के विषय में चर्चा की थी। परिकल्पना परीक्षण और अंतराल आकलन के पीछे अंतर्निहित विचार एक ही है। स्मरण करें कि किसी भी

विश्वास्यता अंतराल का निर्माण किसी नियत विश्वास्यता स्तर वाले प्रतिदर्श माध्य के इर्दगिर्द ही किया जाता है। तदनुसार, 95 प्रतिशत के विश्वास्यता स्तर का तात्पर्य यह होगा है कि 95 प्रतिशत उदाहरणों में समष्टि माध्य प्रतिदर्श माध्य से आकलित विश्वास्यता अंतराल में ही रहेगा। इसमें यह निहित है कि 5 प्रतिशत मामलों में समष्टि माध्य विश्वास्यता अंतराल के भीतर नहीं रहेगा।

यहाँ ध्यान दें कि जब समष्टि माध्य विश्वास्यता अंतराल के भीतर नहीं रहता है तो हमारे परीक्षण प्रतिदर्शज द्वारा शून्य–स्तरीय परिकल्पना को अस्वीकार कर दिया जाना चाहिए।

3.4.1 वृहद प्रतिदर्शों के लिए अस्वीकृति क्षेत्र

आइए, अब हम क्रांतिक क्षेत्र की अवधारणा की व्याख्या करते हैं। प्रतिदर्श माध्य ($\bar{x}$) का प्रतिदर्शन बंटन माध्य μ और मानक विचलन $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ के साथ प्रसामान्य बंटन का अनुसरण करता है। प्रतिदर्शन बंटन के मानक विचलन को ही 'मानक त्रुटि' के रूप में जाना जाता है।

तदनुसार, $\bar{x}$ को एक मानक सामान्य चर, z, में परिवर्तित किया जा सकता है, ताकि यह माध्य 0 और मानक विचलन 1 के साथ प्रसामान्य बंटन का अनुसरण करे।

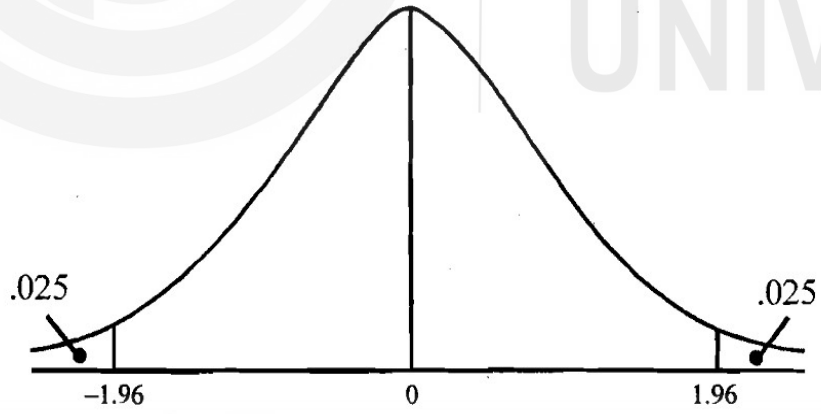
संकेताक्षरों में,

$$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \text{ और}$$

$$z \sim N(0,1)$$

याद करें कि मानक सामान्य वक्र के तहत क्षेत्र चर z द्वारा ग्रहण किए गए मानों की भिन्न श्रेणी के लिए प्रायिकता दर्शाता है। इन प्रायिकताओं को मानक सामान्य वक्र के तहत क्षेत्र के रूप में प्रस्तुत किया जाता है।

आइए, नीचे चित्र 3.1 में दिए गए मानक सामान्य वक्र के माध्यम से क्रांतिक क्षेत्र या अस्वीकृति क्षेत्र की अवधारणा की व्याख्या करें। जब हमारे पास 95 प्रतिशत का कोई विश्वास्यता गुणांक होता है तो मानक सामान्य वक्र के अंतर्गत आने वाला क्षेत्र भी 95 प्रतिशत ही होता है। तदनुसार, वक्र के नीचे का 95 प्रतिशत क्षेत्र $-1.96 \le z \le 1.96$ से घिरा है। शेष 5 प्रतिशत क्षेत्र $z \le -1.96$ और $z \ge 1.96$ द्वारा आच्छादित है। इस प्रकार मानक सामान्य वक्र के दोनों ओर 2.5 प्रतिशत क्षेत्र अस्वीकृति क्षेत्र का निर्माण करता है। यह क्षेत्र चित्र 3.1 में स्पष्ट दर्शाया गया है। यदि प्रतिदर्श माध्य अस्वीकृति क्षेत्र में आता है तो हम शून्य–स्तरीय परिकल्पना को अस्वीकार कर देते हैं।



चित्र 3.1: क्रांतिक क्षेत्र

3.4.2 एक–पुच्छ और दो–पुच्छ परीक्षण

चित्र 3.1 में हमने मानक सामान्य वक्र के दोनों ओर अस्वीकृति क्षेत्र दर्शाया है। तथापि, अनेक उदाहरणों में हम मानक सामान्य वक्र के एक ओर (या तो बाएँ या फिर दाएँ) अस्वीकृति क्षेत्र रख सकते हैं। याद रखें कि यदि सार्थकता का स्तर α हो तो दो–पुच्छ परीक्षण के लिए मानक

सामान्य वक्र के दोनों ओर $\frac{\alpha}{2}$ क्षेत्र रखा जाता है। दूसरी ओर, यदि हमारा परीक्षण एक–पुच्छ परीक्षण हो तो α क्षेत्र को मानक सामान्य वक्र के एक ओर ही रखा जाता है। इस प्रकार एक–पुच्छ और दो–पुच्छ परीक्षण के लिए क्रांतिक मान भिन्न–भिन्न होते हैं।

एक–पुच्छ अथवा दो–पुच्छ परीक्षण का चयन वैकल्पिक परिकल्पना के निर्माण पर निर्भर करता है। जब वैकल्पिक परिकल्पना $H_A : \bar{x} \neq \mu$ प्रकार की होती है तो हमारे पास दो–पुच्छ परीक्षण होता है क्योंकि $\bar{x}$ का मान चर μ से अधिक अथवा कम हो सकता है। दूसरी ओर, यदि वैकल्पिक परिकल्पना $H_A : \bar{x} < \mu$ प्रकार की हो तो संपूर्ण अस्वीकृति मानक सामान्य वक्र के बाईं ओर होती है। इसी प्रकार, यदि वैकल्पिक परिकल्पना $H_A : \bar{x} > \mu$ प्रकार की हो तो संपूर्ण अस्वीकृति मानक सामान्य वक्र के दाईं ओर होती है।

चर *z* के लिए क्रांतिक मान सार्थकता के स्तर पर निर्भर करते हैं। इस पुस्तक के अंत में परिशिष्ट तालिका 14.1 में सार्थकता के कुछ निर्दिष्ट स्तरों (α) के लिए ये क्रांतिक मान दिए गए हैं।

3.4.3 लघु प्रतिदर्शों के लिए अस्वीकृति क्षेत्र

लघु प्रतिदर्शों ($n \leq 30$) के उदाहरण में यदि समष्टि मानक विचलन ज्ञात हो तो हम परिकल्पना परीक्षण के लिए *z*–प्रतिदर्शज प्रयोग करते हैं। दूसरी ओर, यदि समष्टि मानक विचलन ज्ञात न हो तो हम *t*–प्रतिदर्शज प्रयोग करते हैं। यही मानदंड परिकल्पना परीक्षण पर भी लागू होते हैं।

लघु प्रतिदर्शों के उदाहरण में यदि समष्टि मानक विचलन ज्ञात हो तो परीक्षण प्रतिदर्शज निम्नवत् होगा –

$$z = \frac{|\bar{x} - \mu|}{\sigma/\sqrt{n}} \qquad \text{... (3.1)}$$

दूसरी ओर, यदि समष्टि मानक विचलन ज्ञात न हो तो परीक्षण प्रतिदर्शज निम्नवत् होगा –

$$t = \frac{|\bar{x} - \mu|}{s/\sqrt{n}} \qquad \text{... (3.2)}$$

बहरहाल, *t*–बंटन के उदाहरण में वक्र के नीचे का क्षेत्र (जिसका अर्थ प्रायिकता होता है) स्वतंत्रता की कोटि के अनुसार बदलता रहता है। तदनुसार, चर *t* का क्रांतिक मान ज्ञात करते समय हमें स्वतंत्रता की कोटि को ध्यान में रखना चाहिए। निष्कर्षतः चर *t* का क्रांतिक मान ज्ञात करते समय हमें दो बातें याद रखनी चाहिए, यथा – i) सार्थकता का स्तर, और ii) स्वतंत्रता की कोटि।

3.5 त्रुटियों के प्रकार

परिकल्पना परीक्षण में हम विश्वास्यता की कोटि विशेष तक ही किसी परिकल्पना को अस्वीकार करते हैं अथवा अस्वीकार नहीं करते हैं। जैसा कि हम जानते हैं, 0.95 के विश्वास्यता गुणांक का अर्थ होता है कि 100 प्रतिदर्शों में से 95 प्रतिदर्शों में प्राचल स्वीकृति क्षेत्र के भीतर रहता है और 5 प्रतिशत प्रतिदर्शों में प्राचल अस्वीकृति क्षेत्र में रहता है। इस प्रकार 5 प्रतिशत उदाहरणों में प्रतिदर्श समष्टि से लिया जाता है परंतु प्रतिदर्श माध्य समष्टि माध्य से बहुत भिन्नता दर्शाता है। ऐसे उदाहरणों में प्रतिदर्श समष्टि का होता है परंतु हमारी परीक्षण प्रक्रिया इसे निरस्त कर देती है।

स्पष्टतः हम एक ऐसी त्रुटि करते हैं कि H_0 सत्य सिद्ध होता है परंतु फिर भी उसे अस्वीकार कर दिया जाता है। इसे ही 'टाइप–I त्रुटि' कहा जाता है। इसी प्रकार, ऐसी परिस्थितियाँ भी हो सकती

हैं जब H_0 सत्य सिद्ध न हो, परंतु प्रतिदर्श जानकारी के आधार पर हम इसे अस्वीकार नहीं करते हैं। इस प्रकार की त्रुटि को 'टाइप–II त्रुटि' कहा जाता है (देखें तालिका 3.1)।

यहाँ ध्यान दें कि टाइप–I त्रुटि यह निर्दिष्ट करती है कि हम किस सीमा तक त्रुटि को सहन करने की स्थिति में हैं। टाइप–I त्रुटि सार्थकता के स्तर के बराबर होती है, और इसे चर α से दर्शाया जाता है। याद रखें कि विश्वास्यता गुणांक $1-\alpha$ के बराबर होता है।

तालिका 3.1: त्रुटियों के प्रकार

	H_0 **सत्य**	H_0 **सत्य नहीं**
H_0 **निरस्त करें**	टाइप–I त्रुटि	सही निर्णय
H_0 **निरस्त न करें**	सही निर्णय	टाइप–II त्रुटि

किसी भी टाइप–I त्रुटि करने की प्रायिकता को चर α से निरूपित किया जाता है और इसे 'सार्थकता का स्तर' कहा जाता है। दूसरी ओर, टाइप–II त्रुटि करने की प्रायिकता को बीटा (β) कहा जाता है। तदनुसार,

टाइप–I त्रुटि $= \alpha =$ प्रायिकता (H_0 | H_0 का अस्वीकरण सत्य है)

टाइप–II त्रुटि $= \beta =$ प्रायिकता (H_0 | H_0 का स्वीकरण असत्य है)

बोध प्रश्न 1

1) एक–पुच्छ परीक्षण और दो–पुच्छ परीक्षण के बीच अंतर स्पष्ट करें।

.....

.....

.....

.....

2) टाइप–I त्रुटि और टाइप–II त्रुटि के बीच अंतर स्पष्ट करें।

.....

.....

.....

.....

3) मान लीजिए कि किसी व्यक्ति का कोलेस्ट्रॉल स्तर सामान्य रूप से 180 के माध्य और 20 के मानक विचलन के साथ बंटित किया जाता है। मान 225 से अधिक के कोलेस्ट्रॉल स्तर को 'स्वस्थ नहीं' मानकर रोग निर्णय किया जाता है।

a) यहाँ टाइप–I त्रुटि होने की प्रायिकता क्या है?

.....

.....

.....

.....

b) यदि हम चाहते हों कि टाइप–I त्रुटि की प्रायिकता 2% हो तो लोगों को किस स्तर पर 'स्वस्थ नहीं' माना जाना चाहिए?

.....

.....

.....

.....

3.6 परीक्षण की शक्ति

जैसा कि ऊपर बताया गया है, परिकल्पना परीक्षण में टाइप–I और टाइप–II त्रुटियाँ पाई जाती हैं। तदनुसार, दो प्रकार के जोखिम सामने आते हैं, यथा –

(i) हानिभय α जो कि यह प्रायिकता निरूपित करता है कि जब शून्य–स्तरीय परिकल्पना सत्य हो और निरस्त नहीं की जानी चाहिए तो भी उसे निरस्त कर दिया जाता है।

(ii) हानिभय β जो कि यह प्रायिकता निरूपित करता है कि जब शून्य–स्तरीय परिकल्पना वास्तव में असत्य हो तो भी उसे निरस्त नहीं किया जाता है।

परीक्षण की शक्ति का संदर्भ $(1 - \beta)$ के रूप में दिया जाता है, जो कि β का संपूरक होता है। यह मूल रूप से टाइप–II त्रुटि न करने की प्रायिकता होती है।

किसी भी 95% विश्वास्यता गुणांक का अर्थ होता है कि हम टाइप–I त्रुटि करने की अधिकतम 5% संभावना को ही स्वीकार करने के लिए तैयार होंगे। किसी भी सत्य परिकल्पना को हम 100 में से 5 से अधिक बार अस्वीकार नहीं करना चाहेंगे। इसे ही 'सार्थकता का 5 प्रतिशत स्तर' कहा जाता है।

परीक्षण की शक्ति वास्तविक समष्टि माध्य और परिकल्पित माध्य के बीच अंतर की सीमा पर निर्भर करती है। यदि अंतर बड़ा है तो परीक्षण की शक्ति अंतर के छोटे होने की तुलना में बहुत अधिक होगी।

इसीलिए, सार्थकता के स्तर α का चयन बहुत महत्वपूर्ण होता है। चर α के बड़े मान का चयन करना शून्य–स्तरीय परिकल्पना को अस्वीकार करना सरल बना देता है, जिससे परीक्षण की शक्ति $(1 - \beta)$ बढ़ जाती है।

इसके साथ ही प्रतिदर्श आमाप बढ़ने से आकलों में सटीकता बढ़ जाती है और समष्टि प्राचल और प्रतिदर्श के बीच अंतर का पता लगाने की क्षमता बढ़ जाती है, जिससे परीक्षण की शक्ति बढ़ जाती है।

3.7 प्राचल आकलन के उपागम

सांख्यिकीय परिकल्पना परीक्षण में आकलन सिद्धांत ऐसे अनुभवजन्य आँकड़ों के मापन पर आधारित प्राचलों के मानों का आकलन करने से संबंध रखता है जिसमें कोई यादृच्छिक घटक विद्यमान होता है। आकलन की विधि के लिए किसी शून्य–स्तरीय परिकल्पना और किसी अनुरूप वैकल्पिक परिकल्पना को सूत्र के रूप में व्यक्त किए जाने की आवश्यकता होती है, जिसे शून्य–स्तरीय परिकल्पना के संबंध में निर्णय लेने के लिए प्रयोग किए जाने वाले दो उपागमों के आधार पर आगे निरस्त कर दिया जाता है अथवा अस्वीकार नहीं किया जाता है। अगले पाठांश में ऐसी ही दो विधियों का वर्णन किया गया है।

3.7.1 सार्थकता का परीक्षण उपागम

परिकल्पना परीक्षण हेतु 'सार्थकता का परीक्षण' उपागम के लिए किसी भी परीक्षण प्रतिदर्शज का प्रयोग किया जा सकता है। चलिए, यहाँ हम t–प्रतिदर्शज पर विचार करते हैं।

$$t = \frac{\dot{X} - \mu_X}{\frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}} \quad \text{... (3.3)}$$

यदि $\dot{X}$ और μ_X के बीच का अंतर कम है तो पद | t | का मान भी कम ही होगा, जहाँ | t | ही t–प्रतिदर्शज का निरपेक्ष मान होगा। यह ध्यान देने की बात है कि यदि $\dot{X} = \mu_X$ हो तो $t = 0$ होगा। इस उदाहरण में हम शून्य–स्तरीय परिकल्पना को अस्वीकार नहीं करते हैं। जब | t | बड़ा हो जाता है तो हम शून्य–स्तरीय परिकल्पना को अस्वीकार करने के लिए अधिक इच्छुक हो सकते हैं।

उदाहरण : मान लीजिए कि किसी आँकड़ा समुच्चय $\dot{X} = 23.25$, $S_X = 4.49$ और $n = 28$ के लिए हमारी शून्य–स्तरीय और वैकल्पिक परिकल्पनाएँ निम्नवत् हैं –

H_0: $\mu_X = 18.5$ और H_A: $\mu_X \neq 18.5$

$$\therefore \quad t = \frac{23.25 - 1\ .5}{9.49/\sqrt{28}} = 2.6486 \quad \text{... (3.4)}$$

अब हमें शून्य–स्तरीय परिकल्पना को अस्वीकार करने की प्रायिकता, यथा α (टाइप–I त्रुटि किए जाने की प्रायिकता) को निर्दिष्ट करने की आवश्यकता है। चलिए, चर α को 5% पर तय कर लेते हैं।

H_0: $\mu_X = 18.5$

H_A: $\mu_X \neq 18.5$ (दो–पुच्छ परीक्षण)

चूँकि परिकलित t–मान 2.6486 है, यह मान t–बंटन के दाईं पुच्छ वाले क्रांतिक क्षेत्र में स्थित है। अतएव हम इस शून्य–स्तरीय परिकल्पना (H_0) को अस्वीकार कर देते हैं कि वास्तविक समष्टि माध्य 18.5 है।

किसी परीक्षण के सांख्यिकीय रूप से सार्थक होने का अर्थ होगा कि हम शून्य–स्तरीय परिकल्पना को अस्वीकार कर सकते हैं। इसमें यह अर्थ निहित है कि प्रतिदर्श मान और सार्थकता मान (जिसे तालिकाबद्ध मान भी कहा जाता है) के बीच देखे गए अंतर की प्रायिकता कम नहीं है और ऐसा संयोगवश नहीं है। दूसरी ओर, किसी परीक्षण के सांख्यिकीय रूप से सार्थक न होने का अर्थ होगा कि हम शून्य–स्तरीय परिकल्पना को अस्वीकार नहीं करते हैं। यहाँ प्रतिदर्श मान और सार्थकता मान के बीच अंतर प्रतिदर्शन विचरण अथवा संयोगवश हो सकता है।

3.7.2 विश्वस्तता अंतराल उपागम

चलिए, मान लेते हैं कि सार्थकता का स्तर या टाइप–I त्रुटि आने की संभावना $\alpha = 5\%$ पर तय की गई है। यह भी मान लीजिए कि वैकल्पिक परिकल्पना द्विपक्षीय है। अब मान लें कि हम t–बंटन प्रयोग करते हैं क्योंकि विचरण ज्ञात नहीं है। दी गई t–तालिका से हम t का क्रांतिक मान स्वतंत्रता की 8 कोटि के साथ $\alpha = 5\%$ पर $(n-K) = (10-2)$ पाते हैं। हम यह मान 2.360 पाते हैं। इस प्रकार हम विश्वास्यता अंतराल का निर्माण निम्नवत् करते हैं –

$$P(-2.360 \leq t \leq 2.306) = 0.95 \quad \text{... (3.5)}$$

यह प्रायिकता कि t–मान सीमाओं ($-2.360 \leq t \leq 2.360$) के बीच अवस्थित है, 0.95 अथवा 95% है। मान –2.360 और 2.360 ही क्रांतिक t–मान हैं।

यदि हम समीकरण (3.2) से t को प्रतिस्थापित करते हैं तो हमें प्राप्त होता है –

$$P\left(-2.306 \leq \frac{b_2-\beta_2}{\mathrm{SE}(b_2)} \leq 2.306\right) = 0.95 \quad \text{... (3.6)}$$

जैसा कि हम इकाई 4 में देखेंगे, मानक त्रुटि (SE) (b_2) का मान $\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{\Sigma x_i^2}}$ होता है।

यदि हम उपर्युक्त मान को समीकरण (3.6) में प्रतिस्थापित करते हैं और हमें प्राप्त होने वाले पदों को फिर से व्यवस्थित करते हैं तो हमें यह समीकरण प्राप्त होता है –

$$P\left(b_2 - 2.306\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{\Sigma x_i^2}} \leq \beta_2 \leq b_2 + 2.306\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{\Sigma x_i^2}}\right) = 0.95 \quad \text{... (3.7)}$$

समीकरण (3.7) प्राचल β_2 के लिए एक 95% विश्वास्यता अंतराल प्रदान करता है। इस प्रकार के विश्वास्यता अंतराल को स्वीकृति के क्षेत्र (H_0) के रूप में जाना जाता है। विश्वास्यता अंतराल के बाहर के क्षेत्र को अस्वीकृति क्षेत्र (H_A) के रूप में जाना जाता है।

यदि विश्वास्यता अंतराल में प्राचल β_2 का मान शामिल हो तो हम परिकल्पना को अस्वीकार नहीं करते हैं। किंतु यदि प्राचल विश्वास्यता अंतराल के बाहर अवस्थित हो तो हम शून्य–स्तरीय परिकल्पना को अस्वीकार कर देते हैं।

बोध प्रश्न 2

1) परीक्षण की शक्ति से आप क्या समझते हैं?

.....

.....

.....

.....

2) विश्वास्यता अंतराल का निर्माण कैसे होता है? स्पष्ट करें।

.....

.....

.....

.....

3.8 सार–संक्षेप

इस इकाई में समष्टि प्राचलों के संबंध में सांख्यिकीय अनुमिति की प्रक्रिया का विस्तृत वर्णन किया गया। समष्टि प्राचलों के परिकल्पना परीक्षण के लिए दो उपागम प्रचलन में हैं – सार्थकता का परीक्षण उपागम और विश्वास्यता अंतराल उपागम।

इकाई में यह भी बताया गया कि परिकल्पना के परीक्षण में त्रुटियाँ भी शामिल होती हैं। किसी भी परिकल्पना की स्वीकृति अथवा अस्वीकृति के संबंध में निर्णय लेते समय दो प्रकार की त्रुटियाँ हो सकती हैं – टाइप–I त्रुटि और टाइप–II त्रुटि।

परीक्षण की शक्ति कोई भी टाइप–II त्रुटि न करने की प्रायिकता $(1 - \beta)$ होती है।

3.9 बोध प्रश्नों के उत्तर अथवा संकेत

बोध प्रश्न 1

1. पाठांश 3.4.2 पढ़ें और उत्तर दें।
2. त्रुटियों के प्रकार हमने तालिका 3.1 में दर्शाए हैं। आप उन्हीं को विस्तार से समझाएँ।
3. a) इसका परीक्षण करने के लिए हम *z*–प्रतिदर्शज का प्रयोग करते हैं, यथा

   $z = (X - \mu) / \sigma$,
   $z = (225 - 180) / 20 = 2.25$
   b) मान 2.25 के *z*–मान के अनुरूप क्षेत्र 0.0122 है, जो कि टाइप–I त्रुटि होने की प्रायिकता दर्शाता है। मान 2% के रूप में पुच्छ का क्षेत्र $Z = 2.05$ से मेल खाता है।

   $Z = (X - \mu)/\sigma$

   $2.05 = (X - \mu)/ 20$,

   यथा $(X - \mu) = 2.05 * 20 = 41$

   $X = 41 + 180 = 221$

बोध प्रश्न 2

1. पाठांश 3.6 पढ़ें और उत्तर दें।
2. पाठांश 3.7.2 पढ़ें और उत्तर दें।