इकाई 13 सांख्यिकीय आकलन*

इकाई की रूपरेखा

13.0 उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद, आपः

- प्रतिचयन त्रुटि और गैर–प्रतिचयन त्रुटि के बीच के संबंध को स्पष्ट कर सकेंगे;
- प्रतिदर्श बंटन की संकल्पना को व्यक्त कर सकेंगे;
- मानक त्रुटि की संकल्पना को समझा सकेंगे;
- आकलन की संकल्पना को व्यक्त कर सकेंगे;
- बिंदु आकलन और अंतराल आकलन के बीच अंतर को स्पष्ट कर सकेंगे;
- प्राचल के लिए विश्वस्यता–अंतराल का का आकलन कर सकेंगे; और
- विश्वस्यता–स्तर की संकल्पना की व्याख्या कर सकेंगे।

* प्रो॰ कौस्तुभ बारिक, इंदिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय।

13.1 विषय प्रवेश

कई बार कुछ सीमाओं, जैसे अपर्याप्त निधि या श्रम शक्ति का अभाव या समय की कमी के कारण हम समष्टि की सभी इकाइयों का सर्वेक्षण नहीं कर पाते। ऐसी स्थिति में हम प्रतिचयन का सहारा लेते हैं अर्थात हम समष्टि के किन्हीं अंशों का ही सर्वेक्षण करते हैं। प्रतिदर्श में शामिल सूचना के आधार पर हम समष्टि के बारे में निष्कर्ष निकालते हैं। यह प्रक्रिया सांख्यिकीय अनुमिति कहलाती है। हमारा यकीन है कि सांख्यिकीय अनुमिति का अर्थशास्त्र के साथ–साथ अन्य अनेक क्षेत्रों, जैसे समाजशास्त्र, मनोविज्ञान, राजनीति विज्ञान, आयुर्विज्ञान आदि में भी बड़े पैमाने पर इस्तेमाल किया जाता है। उदाहरण के लिए चुनाव की प्रक्रिया शुरू होने से पहले या चुनाव परिणामों की घोषणा होने से ठीक पहले अनेक समाचार पत्र और दूरदर्शन के चैनल चुनाव सर्वेक्षण या एक्जिट पोल का संचालन करते हैं। इनका उद्देश्य वास्तविक परिणाम घोषित होने से पहले चुनावी परिणामों के बारे में पूर्वानुमान लगाना है। उस स्थिति में सर्वेक्षणकर्ताओं के लिए सभी मतदाताओं से उनके पसंद के प्रत्याशी के बारे में जान पाना संभव नहीं होता। यह समयावधि बहुत छोटी होती है, संसाधन बहुत सीमित होते हैं, पर्याप्त संख्या में इस काम के लिए व्यक्ति उपलब्ध नहीं होते हैं और चुनाव से पहले पूर्ण रूप से सर्वेक्षण करने से चुनाव का मूल उद्देश्य ही समाप्त हो जाता है।

उपर्युक्त उदाहरण में सर्वेक्षणकर्ता वास्तव में उस परिणाम के बारे में नहीं जानता है, जो मतदाता के मतदान के फलस्वरूप दिखाई देगा। यहाँ पर सभी मतदाताओं की कुल संख्या से समष्टि का निर्माण होता है। इस संदर्भ में सर्वेक्षणकर्ता समष्टि के 'प्रतिनिधि' प्रतिदर्श से आँकड़े इकट्ठा करता है, सभी मतदाताओं से नहीं। प्रतिदर्श से प्राप्त सूचना के आधार पर सर्वेक्षणकर्ता समग्र समष्टि के बारे में अपना पूर्वानुमान व्यक्त करता है।

इस इकाई में सांख्यिकीय अनुमिति की संकल्पना और सांख्यिकीय आकलन की विधियों के बारे में अध्ययन करेंगे। प्रांचल, जैसा कि आप जानते हैं, समष्टि इकाइयों का एक फलन है जबकि प्रतिदर्शज प्रतिदर्शी इकाइयों का फलन है। प्राचल और संगत प्रतिदर्शजों की संख्या काफी हो सकती है। लेकिन, अपनी प्रस्तुति को आसान बनाने के लिए हम इसे केवल समांतर माध्य तक ही सीमित रखेंगे।

13.2 सांख्यिकीय पृष्ठभूमि

पिछले दो इकाईयाँ में हमने दो महत्वपूर्ण पहलुओं की चर्चा की हैः सैद्धांतिक प्रायिकता बंटन और प्रतिदर्श तकनीक। ये दो पहलू बुनियादी सांख्यिकीय अनुमिति का निर्माण करते हैं।

इकाई 10 में हमने यादृच्छिक चर की संकल्पना का वर्णन किया था। हमने सीखा कि X एक यादृच्छिक चर है, इसके मान $x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots, x_n$ और संगत प्रायिकताएँ $p_1, p_2, \ldots\ldots, p_n$ हैं। यहाँ x_1 के उपभने की प्रायिकता p_1 है तो x_2 की प्रायिकता p_2 है। यदि मान $x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots, x_n$ असंतत हैं तो x के वियुक्त मानो (isolated values) की प्रायिकता ज्ञात हो सकती है। दूसरी तरफ X यदि सतत् यादृच्छिक चर हो तो निश्चित परिसर के भीतर X की प्रायिकता ज्ञात की जाएगी जैसा कि $P(a \le X \le b) = p_1$ ण

इकाई 10 और 11 में हमने सैद्धांतिक असतत् प्रायिकता बंटन (जैसे कि द्विपद और पाइसो) और सतत् प्रायिकता बंटन (जैसेकि प्रसामान्य और t) की चर्चा की। हमने सीख कि यदि X की प्रसर अनंत हो, तब ये प्रायिकता बंटन, प्रसामान्य बंटन का अनुसरण करते हैं।

अतः प्रसामान्य बंटन इन प्रायिकता बंटनों की परिसीमित स्थिति है और इसे एक आदर्श प्रायिकता बंटन माना जा सकता है।

प्रसामान्य बंटन को दो प्राचलों द्वारा परिभाषित किया जाता है। ये हैंः माध्य μ और मानक विचलन σ । यदि यादृच्छिक चर से संबंद्ध प्रायिकताएँ, प्रसामान्य बंटन के आधार पर बंटित हों (इसका अर्थ है कि यदि X, प्रसामान्य बंटन का अनुसरण करता है) तब इसके प्रायकिता बंटन फलन के लिए समीकरण का प्रयोग करते हुए हम $P(a \le X \le b) = p_1$ प्रायिकता ज्ञात कर सकते हैं।

यहाँ हमारे समक्ष एक समस्या है कि μ और σ कोई भी मान ग्रहण कर सकते हैं और संगत प्रायिकता ज्ञात करने में काफी समय लगता है। इस समस्या का समाधान है कि प्रसामान्य चर से μ को घटाना ओर इसे σ से विभाजित करना। इस तरह हम मानक प्रसामान्य विचर, $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ प्राप्त करते हैं, जिसका माध्य = 0 और मानक विचलन = 1 है। आलेख पर z के विभिन्न मानों के लिए प्रायिकताओं के आलेखन से हम 'मानक प्रसामान्य वक्र' (standard normal curve) को प्राप्त करते हैं, जो सममित है और वक्र के नीचे का क्षेत्र = 1 है। ध्यान रखें कि मानक प्रसामान्य वक्र के मामले में हम x-अक्ष पर $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ को मापते हैं और y-अक्ष पर x के उभरने की प्रायिकता अर्थात $p(z)$ है। अतः मान लीजिए यदि हम प्रसामान्य वक्र के किसी विशेष भाग (जैसे z के दो मानों से बद्ध, मान लीजिए, z_1 और z_2) पर विचार करें तो वक्र के नीचे का क्षेत्र इसकी प्रायिकता हमें देगा। ध्यान रखें कि इस पाठ्यक्रम के इकाई 2 में वर्णित बारम्बारता वक्र से प्रसामान्य वक्र भिन्न होता है। प्रसामान्य वक्र के नीचे के क्षेत्रफल से बारम्बारता प्राप्त नहीं होती। इससे हम प्रायिकताओं की प्राप्ति करते हैं।

13.3 कुछ संकल्पनाएँ

प्रतिचयन सिद्धांत में आमतौर पर प्रयुक्त कुछ संकल्पनाएँ इस प्रकार हैंः

13.3.1 प्राचल

आंकड़ों की छानबीन करने में, हमारा ध्यान मुख्य रूप से समष्टि की एक या अधिक विशेषताओं पर केंद्रित रहता है। ऐसी विशेषता के माप को प्राचल (parameter) कहते हैं। उदाहरण के रूप में, हम किसी विशेष वर्ष के लिए कुछ क्षेत्रों के व्यक्तियों की माध्य आय जानना चाहते हैं। हम इन व्यक्तियों की आमदनी का मानक विचलन भी जानना चाहेंगे। यहाँ, माध्य और मानक विचलन अर्थात् दोनों प्राचल हैं।

प्राचलों को हम सुविधा के लिए ग्रीक अक्षरों में दर्शाते हैं। जैसे समष्टि माध्य को μ और समष्टि मानक विचलन को σ द्वारा दर्शाया जाता है।

यहाँ सभी समष्टि प्रेक्षणों से प्राचल का मान परिकलित करना अत्यंत महत्वपूर्ण है। अतः प्राचल 'माध्य आय' ऐसे सभी विभिन्न व्यक्तियों की आमदनी संबंधी आंकडों से परिकलित की जा सकती है जो समष्टि का गठन करते हैं। इसी तरह, 'ऊँचाई और भार संबंधी सहसंबंध गुणांक' प्राचल की गणना के लिए हमें समष्टि के ऊँचाई एवं भार संबंधी सभी युग्मों के मानों की प्राप्ति की आवश्यकता है। अतः, हम प्राचल को समष्टि मानों के फलन के रूप में परिभाषित कर सकते हैं। यदि θ प्राचल है जिसे हमें समष्टि मानों से प्राप्त करना है, $X_1, X_2, X_3, \ldots\ldots, X_N$ तब

$$\theta = f(X_1, X_2, X_3, \ldots\ldots, X_N)$$

13.3.2 प्रतिदर्शज

जनगणना और प्रतिदर्श सर्वेक्षण की चर्चा करते समय, हमने देखा कि विभिन्न मौजूद अवरोधों के कारण, कभी कभार समष्टि के बारे में सूचना एकत्रित करना कठिन होता है। अन्य शब्दों में, समष्टि प्राचल अभिकलित करना सदैव संभव नहीं होता। ऐसी स्थितियों में, प्रतिदर्श से प्राप्त सूचना से हम प्राचल का अनुमान बना सकते हैं। प्रतिदर्श संबंधी यह सूचना, प्रतिदर्शज (statistic) के रूप में संक्षिप्त कर दी जाती है। उदाहरण स्वरूप, प्रतिदर्श माध्य या प्रतिदर्श माध्यिका या प्रतिदर्श बहुलक को प्रतिदर्शज कहते हैं। अतः प्रतिदर्शज की गणना, इकाइयों के ऐसे मानों से की जाती है जो प्रतिदर्श में शामिल किए जाते हैं। इसलिए प्रतिदर्शज को प्रतिदर्श मानों के फलन के रूप में परिभाषित किया जा सकता है। आसानी से समझने के लिए, प्रतिदर्शज को रोमन वर्ण माला के अक्षरों द्वारा दर्शाया जाता है। प्रतिदर्श माध्य को $\bar{x}$ और प्रतिदर्श मानक विचलन को s से दर्शाया जा सकता है। यदि T ऐसा प्रतिदर्शज है जिसे हमें $x_1, x_2, \ldots, x_n$ प्रतिदर्श मानों से प्राप्त करना हैं, तब $T = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

13.3.3 आकलक एवं आकल

प्रतिदर्शज का मूल उद्देश्य कुछ समष्टि प्राचलों का अनुमान लगाना है। इस संदर्भ में अनुकूल विधि या प्रतिदर्शज परिकलन में प्रयुक्त सूत्र को आकलक (estimator) कहते हैं और परिकलित किया गया प्रतिदर्शज का मान आकल (estimate) कहलाता है।

प्रतिदर्शज परिकलन के लिए हम $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ सूत्र का प्रयोग करते हैं। यह सूत्र आकलक है। इसके बाद, यदि हम इस सूत्र का प्रयोग करते हैं और $\bar{x} = 10$ प्राप्त करते हैं तब '10' आकल होगा।

13.3.4 प्रतिदर्शी बंटन

अभी तक आपको स्पष्ट हो चुका होगा कि आमतौर पर मूल समष्टि की तुलना में प्रतिदर्श का आकार अपेक्षाकृत काफी छोटा होता है। जिसके परिणामस्वरूप समान समष्टि से ऐसे बहुत से प्रतिदर्शों का चयन किया जा सकता है जो एक–दूसरे से भिन्न होते हैं। चूंकि प्राचल का आकल, प्रतिदर्श मानों पर निर्भर करता है और ये मान, एक प्रतिदर्श से दूसरे प्रतिदर्श में बदलते रहते हैं। इसलिए समान प्राचल के लिए प्रतिदर्शज के आकल या मान भी अलग–अलग हो सकते हैं। मानों में ऐसे बदलाव को प्रतिचयन उच्चावचन कहते हैं। मान लीजिए, हम N आकार की समष्टि से बहुत से प्रतिदर्शों, जिनमें से प्रत्येक n आकार का है, प्राप्ति करते हैं और प्रत्येक प्रतिदर्श के लिए, प्रतिदर्शज का मान परिकलित किया जाता है। यदि प्रतिदर्शों की संख्या बड़ी है तो सापेक्षिक बारंबारता बंटन के रूप में इन मानों को व्यवस्थित किया जा सकता है। जब प्रतिदर्शों की संख्या अनन्त (infinity) की ओर प्रवृत्त हो तो प्रतिदर्शज के मानों की परिणामी सापेक्षिक बारंबारता बंटन, दिए गए प्रतिदर्शज का प्रतिदर्शी बंटन (sampling distribution) कहलाएगी।

मान लीजिए, हम समष्टि माध्य को आकलित करने के इच्छुक हैं (जो कि प्राचल है) और जिसे μ द्वारा दर्शाया जाता है। इस समष्टि (N आकार की) से n आकार के यादृच्छिक प्रतिदर्शों का चयन किया जाता है। प्रतिदर्श माध्य $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum x_i$ प्रतिदर्शज है जो समष्टि माध्य μ के तदनुरूपी है। ध्यान दीजिए कि यादृच्छिक चर है, इसके मान एक प्रतिदर्श से दूसरे में प्रायिकता के रूप में बदलते रहते हैं।

उदाहरण 13.1

यदि किसी समष्टि में 5 इकाइयाँ, 2, 4, 6, 8 और 10 शामिल हैं तो मान लीजिए इसमें से बिना प्रतिस्थापन वाली सरल यादृच्छिक प्रतिचयन की विधि से 2 आकार वाले प्रतिदर्शों का चयन हमें करना है। हम प्रतिदर्श माध्य का प्रतिदर्शों बंटन और इसकी मानक त्रुटि की प्राप्ति करना चाहते हैं।

बिना प्रतिस्थापन के चुने जाने वाले प्रतिदर्शों की संख्या

$$= {}^{N}c_n = {}^{5}c_2 = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5!}{2!\,3!} = \frac{5\times 4}{2\times 1} = \frac{20}{2} = 10.$$

संगत प्रतिदर्श माध्य $\left(\bar{x}\right)$ सहित संभावित प्रतिदर्शों को तालिका 13.1 में दर्शाया गया है।

तालिका 13.1: संभावित प्रतिदर्श और प्रतिदर्श माध्य

प्रतिदर्श	प्रतिदर्श माध्य $\left(\bar{x}\right)$
(2, 4)	3
(2, 6)	4
(2, 8)	5
(2, 10)	6
(4, 6)	5
(4, 8)	6
(4, 10)	7
(6, 8)	7
(6, 10)	8
(8, 10)	9

अब हम प्रतिदर्श माध्य के बारंबारता बंटन की प्राप्ति कर सकते हैं:

सारणी 13.2: प्रतिदर्श माध्यों का बारंबारता बंटन

प्रतिदर्श माध्य $\left(\bar{x}\right)$	बारंबारता (f)
3	1
4	1
5	2
6	2
7	2
8	1
9	1

तालिका 13.2 में दिए गए बारंबारता बंटन से, जैसा कि तालिका 13.3 में दर्शाया गया है, हम प्रतिदर्श माध्य के प्रायिकता बंटन को दर्शा सकते हैं।

तालिका 13.3ः प्रतिदर्श माध्यों का प्रतिदर्शी बंटन

प्रतिदर्श माध्य $(\bar{x})$	प्रायिकता $\left(\frac{f}{\Sigma f}\right)$
3	$\frac{1}{10}$
4	$\frac{1}{10}$
5	$\frac{2}{10}$
6	$\frac{2}{10}$
7	$\frac{2}{10}$
8	$\frac{1}{10}$
9	$\frac{1}{10}$

ध्यान दीजिए कि $\sum f$ जो पहले दर्शाए गए प्रतिदर्श माध्य का बारंबारता बंटन है, 10 के बराबर है। तालिका 13.3 में, हमने प्रायिकताओं के परिकलन के लिए सापेक्षिक बारंबारता का प्रयोग करती है।

13.3.5 प्रतिदर्शज की मानक त्रुटि

पिछले अनुभाग में हमने सीखा था कि समष्टि और प्रतिदर्श आकारों के आधार पर हम विविध प्रतिदर्शों की प्राप्ति कर सकते हैं। प्रत्येक प्रतिदर्शज से, हम अपेक्षित प्रतिदर्शज के लिए अलग–अलग मानों की प्राप्ति कर सकते हैं। इन मानों को प्रायिकता बंटन के रूप में व्यवस्थित कर सकते हैं, जिसे संबद्ध प्रतिदर्शज का प्रतिदर्शी बंटन कहते हैं। प्रतिदर्शज भी यादृच्छिक चर की ही भांति होता है। क्योंकि इसके द्वारा प्राप्त प्रत्येक मान से प्रायिकता जुड़ी रहती है। पिछले अनुभाग की तालिका 13.3 में हमने प्रतिदर्शज व उसकी प्रायिकता को दर्शाया है।

इकाई 10 में हमने सीखा था कि यादृच्छिक चर की गणितीय प्रत्याशा, इसके समांतर माध्य के बराबर होती है। आइए, प्रतिदर्शी बंटन के मानक विचलन और गणितीय प्रत्याश का आकलन करें।

प्रतिदर्शी बंटन के दो महत्वपूर्ण गुणधर्मों पर ध्यान दीजिए।

1) प्रतिदर्शज के बंटन की प्रत्याशा, समष्टि प्राचल के बराबर होती है। यदि हम प्रतिदर्श माध्यों का प्रतिदर्शी बंटन प्राप्त करते हैं तब इसका प्रत्याशित मान, समष्टि माध्य के बराबर होता है। सांकेतिक रूप से $E(\bar{x}) = \mu$.

2) प्रतिदर्शी बंटन का मानक, चलन, संबंद्ध प्रतिदर्शज की ''मानक त्रुटि'' (standard error) कहलाता है। अतः यदि हमें प्रतिदर्श माध्य का प्रतिदर्शी बंटन प्राप्त है तब इसका मानक विचलन, प्रतिदर्श माध्य की मानक त्रुटि'' कहलाएगा। अतः मानक त्रुटि समष्टि माध्य के गिर्द प्रतिदर्श माध्य के फैलाव को दर्शाता है।

इकाई 14 में हम देखेंगे कि मानक त्रुटि का प्रयोग परिकल्पना परीक्षण और सांख्यिकीय आकलन के लिए किया जाता है।

उदाहरण 13.2

तालिका 13.3 में दिए गए प्रतिदर्शी बंटन की मानक त्रुटि ज्ञात कीजिए।

हम जानते हैं कि प्रतिदर्श माध्य की मानक त्रुटि, प्रतिदर्शी बंटन का मानक विचलन है। अतः,

$$\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{E\left(\bar{x}\right)^2 - \left[E\left(\bar{x}\right)\right]^2}$$

अब,

$$E\left(\bar{x}\right) = 3\times\frac{1}{10} + 4\times\frac{1}{10} + 5\times\frac{2}{10} + 6\times\frac{2}{10} + 7\times\frac{2}{10} + 8\times\frac{1}{10} + 9\times\frac{1}{10} = \frac{60}{10} = 6$$

और

$$E\left(\bar{x}\right)^2 = 9\times\frac{1}{10} + 16\times\frac{1}{10} + 25\times\frac{2}{10} + 36\times\frac{2}{10} + 49\times\frac{2}{10} + 64\times\frac{1}{10} + 81\times\frac{1}{10} = \frac{390}{10}$$

$$= 39.$$

$$\therefore \sqrt{E\left(\bar{x}\right)^2 - \left[E\left(\bar{x}\right)\right]^2} = \sqrt{39-36} = \sqrt{3} = 1.73.$$

अतः इस मामले में प्रतिदर्श माध्य की मानक त्रुटि 1.73 है।

अब आपके मस्तिष्क में प्रश्न उठ रहा होगा कि, क्या मानक त्रुटि ज्ञात करने के लिए, हमें सभी संभावित प्रतिदर्शों को प्राप्त करना होगा? उपर्युक्त उदाहरण 13.2 में हमने सर्वप्रथम सभी संभावित प्रतिदर्शों को नोट किया, उन्हें आपेक्षिक बारंबारता बंटन के रूप में व्यवस्थित किया और तत्पश्चात् मानक त्रुटि को परिकलित किया। उदाहरण 13.2 में समष्टि का आकार और प्रतिदर्श आकार काफी छोटा था और इसी वजह से कार्य नियंत्रित दायरे में संपन्न किया जा सकता था। लेकिन, क्या आप कल्पना कर सकते हैं कि जब हमारे पास बड़े आकार की समष्टि और प्रतिदर्श हो तो? क्या होगा यह कार्य न केवल जटिल है बल्कि थकाऊ भी होगा। दरअसल, प्रतिचयन का समग्र लाभ लुप्त हो जाएगा यदि हम सभी संभावित प्रतिदर्शों का चयन शुरू कर देंगे।

दूसरे, क्या प्रतिदर्शी के लिए सैद्धांतिक प्रायिकता बंटन को फिट करना संभव है? दरअसल केंद्रीय सीमा प्रमेय (central limit theorem) के अनुसार, यदि किसी समष्टि से n आकार के प्रतिदर्श लिए जाते हैं तो n के बड़े मानों के लिए प्रतिदर्श माध्य सन्निकटतः प्रसामान्य रूप से बंटित हैं। इसलिए समष्टि का बंटन चाहो कुछ भी हो, $\bar{x}$ का प्रतिदर्शी बंटन, पर्याप्त रूप से बड़े प्रतिदर्शी आकारों के लिए सन्निकटतः रूप से प्रसामान्य होगा। यदि समष्टि प्रसामान्य है तब $\bar{x}$ का प्रतिदर्शी बंटन किसी भी प्रतिदर्श आकार के लिए प्रसामान्य होगा। यदि समष्टि प्रसामान्य रूप अलग बंटित है तक $\bar{x}$ का प्रतिदर्शी बंटन, यहाँ तक कि छोटे प्रतिदर्श आकारों के लिए भी लगभग प्रसामान्य होगा। इसके अलावा, यदि समष्टि प्रसामान्य रूप से बंटित नहीं भी है तब भी $\bar{x}$ का प्रतिदर्शी बंटन बड़े प्रतिदर्श आकारों के लिए सन्निकटतः प्रसामान्य होगा। तीसरे, ऐसी समष्टि जिससे प्रतिदर्श लिए गए हैं, के मानक विचलन σ और $\bar{x}$ की मानक त्रुटि के बीच क्या संबंध है? निस्संदेह, समष्टि इकाइयों के प्रसार की तुलना में $\bar{x}$ का प्रसार कम होगा। $\bar{x}$ की मानक त्रुटि हैः

$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ जहाँ $\sigma_{\bar{x}}$ $\bar{x}$ की मानक त्रुटि है और σ मूल समष्टि का मानक विचलन है।

अतः मानक त्रुटि का मान, समष्टि के मानक विचलन की तुलना में सदैव छोटा होता है क्योंकि मानक त्रुटि, प्रतिदर्श आकार के वर्ग मूल द्वारा विभाजित समष्टि के मानक विचलन के बराबर होती है।

उपर्युक्त कथन प्रतिस्थापन सहित सरल यादृच्छिक प्रतिचयन के मामले में सत्य हैं। जब प्रतिचयन बिना प्रतिस्थापन के हो तो ऐसे मामले में कुछ परिमित समष्टि शुद्धिकरण (finite population corection) करना होगा और मानक त्रुटि होगी $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \times \frac{N-n}{N-1}$. जब अनुपात $\frac{n}{N}$ काफी कम हो तो दोनों क्रियाविधियाँ एक जैसा ही परिणाम देती हैं। लेकिन जब समष्टि के आकार की तुलना में प्रतिदर्श आकार भी काफी बड़ा हो तो संशोधन गुणक को लागू करना जरूरी होता है।

मानक त्रुटि को हम कैसे व्यक्त करें? जैसा कि पहले बात हुई है, इससे प्रतिदर्शज के फैलाव का पता चलता है। लेकिन यदि मानक त्रुटि छोटी है तब ये अधिक संभावना होती है कि आकाल, संबद्ध प्राचल के सन्निकट है।

बोध प्रश्न 1

1) निम्नलिखित संकल्पनाओं को परिभाषित कीजिए:

   क) समष्टि

   ख) प्रतिदर्श

   ग) प्राचल

   घ) प्रतिदर्शज

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

2) निम्नलिखित के बीच के अंतर को स्पष्ट कीजिए:

   क) आकलक और आकल

   ख) जनगणना और प्रतिदर्श सर्वेक्षण

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

3) निम्नलिखित संकल्पनाओं को परिभाषित कीजिएः

क) प्रतिदर्शी बंटन

ख) मानक त्रुटि

....

....

....

....

....

4) समष्टि 2, 4, 6 है। मान लीजिए बिना प्रतिस्थापन वाली यादृच्छिक प्रतिचयन विधि का प्रयोग करते हुए आकार 2 के प्रतिदर्श का चयन हमें इस समष्टि से करना है।

क) प्रतिदर्श माध्य का प्रतिदर्शी बंटन प्रस्तुत कीजिए।

ख) मानक त्रुटि परिकलित कीजिए।

....

....

....

....

....

13.4 गैर–प्रतिचयन और प्रतिचयन त्रुटियाँ

जैसा कि हमने ऊपर बताया, प्रतिचयन का मूल उद्देश्य प्रतिदर्श के आधार पर समष्टि के बारे में अनुमिति निकालना है। जैसे, मान लीजिए हमें किसी गाँव की प्रति व्यक्ति आय ज्ञात करनी है। समय, धन और अपेक्षित कार्मिकों के अभाव में हम पूर्ण जनगणना की बजाए, प्रतिदर्श सर्वेक्षण पर ध्यान केंद्रित करते हैं। इस मामले में स्पष्ट है कि प्रतिदर्श से प्राप्त प्रति व्यक्ति आय, गाँव की वास्तविक प्रति व्यक्ति आय के बराबर नहीं होगी। ऐसी त्रुटि होने के दो कारण हो सकते हैं।

हम समष्टि के केवल एक भाग से ही आँकड़े एकत्रित कर रहे हैं (अर्थात् हमारे द्वारा चयनित प्रतिदर्श के आधार पर), प्रतिदर्श माध्य (इस मामले में प्रति व्यक्ति आय) समष्टि माध्य के बराबर नहीं है। यदि संभवतया दोनों बराबर ही हों तो यह अनोखी घटना ही होगी। इसलिए यदि हम प्रतिदर्श माध्य को समष्टि माध्य के रूप में ले रहे हैं, कुछ त्रुटि रह जाती है। इसे प्रतिचयन त्रुटि (sampling error) कहते हैं।

त्रुटि होने का एक अन्य कारण है, आँकड़ों की गलत जानकारी देना या उन्हें रजिस्टर में गलत तरीके से भरना या उनकी गलत तालिका बनाना या आंकड़ों को गलत तरीके से संसाधित करना। इस प्रकार की त्रुटि को गैर–प्रतिचयन त्रुटि (non-sampling error) कहते हैं। ध्यान रखें, गलत–प्रतिचयन त्रुटि, जैसा कि इसके नाम से इंगित है, हमारी प्रतिचयन प्रक्रिया से इसका कोई सरोकार नहीं है। प्रतिदर्श सर्वेक्षण में आंकड़ों की गलत जानकारी प्रस्तुति या इनका गलत संसाधन होने की संभावना बनी रहती है।

इन त्रुटियों के स्रोतों का वर्णन निम्न प्रकार है।

13.4.1 गैर–प्रतिचयन त्रुटि

गैर–प्रतिचयन त्रुटि के विविध स्रोत इस प्रकार हैं:

1) **माप आधार त्रुटि**

   यह जाना माना तथ्य है कि किसी भी परिमाण का सही/सटीक माप (measurement) लेना संभव नहीं है। यदि कुछ व्यक्तियों को उदाहरण के रूप में बारी–बारी से कपड़े के किसी एक टुकड़े की लंबाई मापने को कहा जाए, (मान लीजिए दो दशमलव बिंदुओं तक), तो हम सुनिश्चित तौर पर कह सकते हैं कि सबके उत्तर एक जैसे नहीं होंगे। वास्तव में मापने वाले फीते की परिशुद्धता की कोटि भी एक जैसी नहीं होगी।

   किसी छानबीन के मामले में उत्तरदाताओं के प्रतिचयन के संदर्भ में, उदाहरण के रूप में, उनकी आमदनी के बारे में सही आँकड़े प्राप्त नहीं किए जा सकते। यह समस्या ऐसे व्यक्तियों की स्थिति में तो नहीं आएगी जो मजदूरी या वेतन के रूप में निश्चित आय अर्जित करते हैं। लेकिन, स्व–रोजगारी व्यक्ति शायद सही जानकारी देने की स्थिति में नहीं होंगे।

2) **गैर–प्रतिक्रिया (non-response) आधारित त्रुटि**

   कभी कभार उत्तरदाताओं को प्रश्नावली भेजकर अपेक्षित आंकड़ों को एकत्रित किया जाता है। ऐसे व्यक्तियों में से बहुत से अधूरे उत्तर वाली प्रश्नावली वापिस भेजते हैं या प्रश्नावली भेजते ही नहीं। इसका कारण हो सकता है:

   क) उत्तरदाता पूछे गए प्रश्नों का उत्तर सावधानी से पढ़ने के बाद नहीं देते।

   ख) वे प्रश्नों को समझने की स्थिति में नहीं होते, या

   ग) वे अपेक्षित सूचना को बताना नहीं चाहते।

   हम ध्यान से देखें तो पाएँगे कि प्रतिक्रिया व्यक्त न करने का कारण, प्रश्नावली का रास्ते में ही खो जाना, भी हो सकता है।

   यदि वैयक्तिक साक्षात्कारों के माध्यम से आंकड़े एकत्रित किए जाते हैं तो उपर्युक्त कुछ कारणों में अवश्य कमी आएगी। लेकिन, ऐसे मामले में, कुछेक व्यक्तियों के कारण ऐसी त्रुटि भी उत्पन्न हो सकती है:

   क)वे सूचना देना नहीं चाहते, या

   ख)बार–बार जाने के बावजूद भी, वे मिलते ही नहीं।

3) **आँकड़ों को दर्ज करने में त्रुटि**

   ऐसी त्रुटि ऐसे चरण पर नज़र आती है जब जाँचकर्ता (investigator) उत्तरों का लिखित रूप दर्ज करता है। ऐसी त्रुटि का मुख्य कारण पूछताछकर्ता का लापरवाही बरतना है।

4) **जाँचकर्ता के पक्षपातपूर्ण रवैये पर आधारित त्रुटि**

   प्रत्येक व्यक्ति निजी पूर्वाग्रहों और पक्षपाती रवैयों से ग्रस्त रहता है। जाँचकर्ताओं को सर्वाधिक संभावित प्रशिक्षण देने के बावजूद भी, उनकी निजी सोच बीच में बाधक बन जाती है जब वे उत्तरदाताओं के प्रश्नों को अपनी समझ के आधार पर समझना शुरू कर देते हैं और इन्हें लिखित स्वरूप भी अपने विचारों के अनुरूप देने लगते हैं।

पूर्ण गणना विधि में गैर–प्रतिचयन त्रुटि होने की संभावना काफी अधिक होती है, क्योंकि आंकड़ा संग्रह प्रक्रिया में बहुत से व्यक्ति शामिल रहते हैं। लेकिन निम्न बातों को अपनाकर हम इस त्रुटि को न्यूनतम कर सकते हैं। ये हैं:

i) सर्वेक्षण की योजना सोच–समझकर बनाना,

ii) जाँचकर्ताओं को उचित प्रशिक्षण देना,

iii) प्रश्नावली को सरल रूप देना।

लेकिन, यहाँ हम इस बात पर जोर देना चाहेंगे कि पूर्ण गणना में काफी अधिक गैर–प्रतिचयन त्रुटियों के होने की संभावना बनी रहती है।

13.4.2 प्रतिचयन त्रुटि

अब तक आप समझ चुके होंगे कि प्रतिचयन विधि में भी गैर–प्रतिचयन त्रुटियाँ उत्पन्न हो सकती हैं। आंकड़ों को पूर्णतया ऐसी त्रुटियों के बिना एकत्रित करना लगभग असंभव होता है। लेकिन, यदि प्रतिदर्श सर्वेक्षण में उत्तरदाताओं की संख्या जनगणना विधि की तुलना में काफी कम हो तो प्रतिचयन विधि में सामान्य तौर पर गैर–प्रतिचयन त्रुटि काफी कम नजर आती है। गैर–प्रतिचयन त्रुटियों के अलावा, प्रतिदर्श सर्वेक्षण में प्रतिचयन त्रुटि भी उत्पन्न होती है। प्रतिचयन त्रुटि, प्राचल और संगत प्रतिदर्शज के बीच का पूर्ण अंतर अर्थात $|T-\theta|$ है।

प्रतिचयन त्रुटि, उत्तरदाता, जाँचकर्ता या कुछ अन्य कारण की वजह से उत्पन्न नहीं होती। ये तो प्रतिचयन क्रियाविधि की प्रकृति से ही उत्पन्न होती है। इनका पूर्ण निवारण संभव नहीं है। लेकिन हमारे पास कुछ ऐसे प्रतिचयन के सुविकसित सिद्धांत मौजूद हैं जिनकी सहायता से ऐसी त्रुटियों को न्यूनतम किया जा सकता है।

13.5 आकलक के वांछनीय गुणधर्म

मान लीजिए, θ ऐसा अज्ञात प्राचल है जिसकी हम अपेक्षा करते हैं। हम समष्टि से प्राप्त यादृच्छिक प्रतिदर्श के आधार पर θ को आकलन करना चाहते हैं। इस प्रयोजन के लिए हम प्रतिदर्शज T का प्रयोग करेंग (जो प्रतिदर्श मानों का फलन है)। यहाँ ज्र θ का आकलक है और T का मान जिसे प्राप्त प्रतिदर्श से हमने प्राप्त किया है, θ का आकल है। दरअसल, इस मान को बिंदु आकल (point estimate) कहते हैं, क्योंकि यह आकलक का एक विशिष्ट मान है (अधिक जानकारी के लिए इकाई 14 देखें)।

इससे पहले, हमने प्रतिचयन और गैर–प्रतिचयन त्रुटियाँ से संबंधित संकल्पनाओं की चर्चा की थी। यदि हम उन्हें दुबारा ध्यान में लाएँ तो हमें पता है कि प्रतिदर्श प्रतिदर्शज और समष्टि प्राचल के बीच (संकेत को अनदेखा करते हुए) का पूर्ण अंतर अर्थात $|T-\theta|$, प्रतिचयन त्रुटि के विस्तार को मापता है। ध्यान दीजिए कि आकलक अनिवार्यतः प्राचल के आकल को परिकलित करने का एक सूत्र है। और ऐसे ही बहुत से संभावित आकलक (वैकल्पिक सूत्र) हो सकते हैं जिन्हें इस प्रयोजन के लिए प्रयुक्त किया जा सकता है। अतः ऐसे कुछ वांछनीय गुणधर्म होने चाहिए जिनके आधार पर हम प्राचल का अनुमान लगाने के लिए किसी विशिट आकलक का चयन कर सकते हैं।

T का एक अच्छा आकलक होने के लिए T और θ के बीच का अंतर यथासंभव कम होना चाहिए। यह सुनिश्चि करने के लिए विविध नजरियों का सुझाव दिया गया है।

13.5.1 अनभिनता

हमने पहले ही देखा है कि प्रतिचयन परिवर्तनशीलता के कारण प्रतिदर्शज के मान, एक प्रतिदर्श से दूसरे प्रतिदर्श में अलग–अलग होते हैं। यद्यपि प्रतिदर्शज के एकल मान, औसतन, अज्ञात प्राचल से अलग हो सकते हैं लेकिन प्रतिदर्शज का मान, प्राचल के बराबर होना चाहिए। अन्य शब्दों में, T के प्रतिदर्शी बंटन की θ के प्रति केंद्रीय प्रवृत्ति होनी चाहिए। इसे आकलक का अनभिनता (unbiasedness) संबंधी गुण कते हैं। इसका अर्थ है कि यद्यपि प्राचल के अज्ञात मान की तुलना में दिए गए प्राचल का एकल उच्च या निम्न हो सकता है, फिर भी आकलक ऐसे ही मानों की प्राप्ति करने का पक्षधर नहीं होता जो अज्ञात प्राचल की तुलना में सदैव बड़े या छोटे होते हैं। यदि हम मान लें कि माध्य (यहाँ प्रत्याशा) केंद्रीय प्रवृत्ति के लिए सही मान है तब θ के लिए T अनभिनत आकलक है, यदि $E(T)=\theta$ है।

13.5.2 न्यूनतम प्रसरण

यह भी वांछनीय है कि समटि प्राचल के इर्द–गिर्द किसी अनभिनत आकलक के सभी संभावित मानों का औसतन प्रसार यथासंभव कम होना चाहिए। इससे प्राचल से आकल के दूर होने की संभावना कम हो जाएगी। यदि हम मान लें कि प्रकीर्णन के लिए प्रसरण उचित माप है तब हम चाहेंगे कि सभी अनभिनत आकलकों में से T का न्यनूतम प्रसरण होना चाहिएः सांकेतिक रूप से $V(T) \le V(T')$ जहाँ V प्रसरण और T' कोई अन्य अनभिनत आकलक है।

कोई आकलक T, जो अनभिनत है और जिसका सभी अनभिनत आकलकों में से न्यूनतम प्रसरण हो, ''न्यूनतम प्रसरण अनभिनत आकलक'' (Minimum Variance Unbiased Estimator) कहलाता है। आइए किसी उदाहरण पर विचार करें। मान लीजिए N आकार की प्राप्त समष्टि से हमारे पास n आकार के यादृच्छिक प्रतिदर्श हैं। इस मामले में प्रतिदर्श माध्य है। $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ जहाँ x_i प्रतिदर्श का iवां सदस्य है। यह सिद्ध किया जा सकता है कि यह समष्टि माध्य μ का अनभिनत आकलक है। सांकेतित रूप से

$$E(\bar{x}) = \mu$$

तथापि, यह दर्शाया जा सकता है कि

प्रतिदर्श प्रसरण $s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2$ का प्रत्याशा σ^2 के बराबर नहीं है।

$$E\left(s^2\right) \ne \sigma^2$$

इसके विपरीत यदि हम $s'^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2$, के रूप में प्रतिदर्श प्रसरण को परिभाषित करें, तक $\sigma'^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2$ का s'^2 अनभिनत आकलक है।

मान लीजिए, इसके बाद प्रतिदर्श मान न केवल यादृच्छिक है बल्कि स्वतंत्र (प्रतिस्थापन सहित यादृच्छिक प्रतिदर्श) भी हैं और निहित समटि प्रसामान्य है। यह भी दर्शाया जा सकता है कि प्रतिदर्श माध्य $\bar{x}$ समष्टि माध्य μ का न केवल अनभिनत आकलक है बल्कि μ के सभी अनभिनत आकलकों में से इसका प्रसरण न्यूनतम भी है।

13.5.3 संगति और दक्षता

एक अन्य दृष्टिकोण कि आकलक T को प्रतिदर्श आकार n के बढ़ने के साथ–साथ अज्ञात समष्टि प्राचल θ के सन्निकट पहुंचना चाहिए। यहां T स्वयं भी यादृच्छिक चर है। इस बात को हम प्रायिकतात्मक या प्रसंभाव्यता के रूप में अभिव्यक्त कर सकत हैं क्योंकि प्रदिर्शज T को प्रसंभाव्यता प्राचल θ के प्रति अभिसरित होना चाहिए जब $n \to \infty$. । इस गुणधर्म वाला प्रतिदर्शज T, θ का संगत (consistent) आकलक कहलाता है।

असल जीवन में समान प्राचल θ के संगत आकलकों की बड़ी संख्या बहुधा देखने को मिलती है। ऐसी स्थिति में निस्संदेह ऐसे संगत आकलकों से कुछ अतिरिक्त निकष (कसोटी) का चयन आवश्यक होता है। ऐसा एक निकष यह माँग सकता है कि न केवल T प्रसंभाव्य रूप से अभिसरित हो बल्कि इस कार्य को यह यथाशीघ्र भी करे। अधिक गहन अध्ययन न करते हुए हम सिर्फ इतना उल्लेख करना चाहेंगे कि जब किसी प्रतिदर्श का आकार n लगातार बढ़ता है तो आकलक, प्रसामान्य बंटन का रूप धारण कर लेता है। ऐसे आकलक उपगामी रूप से प्रसामान्य (asymptotically normal) द्वारा दर्शायी जाती है। दरअसल, न्यूनतम उपगामी प्रसरण आकलक के लिए अभिसरण सबसे तीव्र रूप से होता है। समष्टि प्राचल के ऐसे सभी उपगामी प्रसामान्य संगत आकलकों में से इस प्रकार के आकलक को 'दक्ष आकलक' (efficient estimator) कहते हैं।

बोध प्रश्न – 2

1) गैर–प्रतिचयन त्रुटियों का स्त्रोत क्या है?

....

....

....

....

....

....

2) निम्नलिखित संकल्पनाओं को स्पष्ट कीजिए:

क) अनभिनत आकलक

ख) न्यूनतम प्रसरण आकलक

ग) संगति आकलक

....

....

....

....

....

....

3) बताइएं कि निम्नलिखित कथन सही हैं या गलत।

क) प्रसामान्य बंटन, द्विपद बंटन का परिसीमित रूप है।

ख) प्रतिदर्शज के प्रतिदर्शी बंटन का मानक विचलन, मानक त्रुटि कहलाता है।

ग) पाइसो बंटन, सतत् बंटन का एक उदाहरण है।

घ) सांख्यिकीय आकलन, सांख्यिकीय अनुमिति का एक भाग है।

....

....

....

....

13.6 सांख्यिकीय अनुमिति की संकल्पना

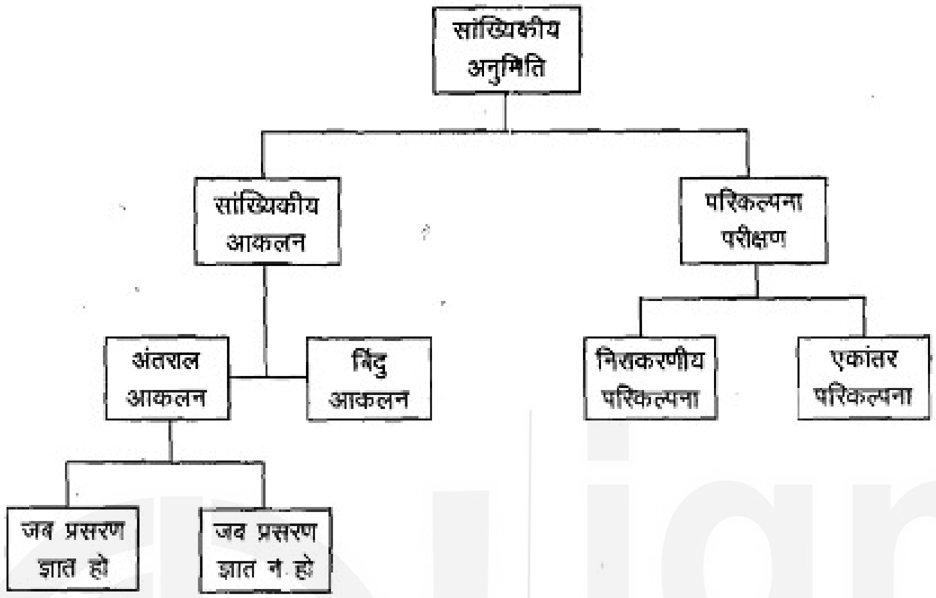
जैसा कि पहले उल्लेख किया गया है, सांख्यिकीय अनुमिति, समष्टि (population) से प्राप्त प्रतिदर्श (sample) मं शामिल जानकारी के आधार पर समष्टि विशेषताओं के बारे में निष्कर्ष निकालने की विधियों से संबंधित है। ध्यान रखें कि हमें समष्टि माध्य का पता नहीं है लेकिन प्रतिदर्श माध्य की जानकारी हमें है। सांख्यिकीय अनुमिति में हम दो प्रकार के प्रश्नों के उत्तर जानना चाहेंगे। पहला, समष्टि माध्य का मान क्या होगा?

हमारा उत्तर, समष्टि माध्य के बारे में सोचे–समझे अनुमान में निहित है। सांख्यिकीय अनुमिति का यह पहलू 'आकलन' (estimation) कहलाता है। हमारा दूसरा प्रश्न समष्टि माध्य के बारे में हमारे कुछ विशेष दावे से संबंधित है। मान लीजिए, बिजली के बल्ब बनाने वाले किसी उत्पादक का दावा है कि बिजली के बल्बों का माध्य जीवन 2000 घंटों के बराबर है। प्रतिदर्श सूचना के आधार पर क्या हम कह सकते हैं कि यह दावा सही नहीं है? सांख्यिकीय अनुमिति का यह पक्ष परिकल्पना परीक्षण (hypothesis testing) कहलाता है।

अतः सांख्यिकीय अनुमिति के दो पहलू हैं: आकलन और परिकल्पना परीक्षण। इस इकाई में हम सांख्यिकीय आकलन के बारे में चर्चा करेंगे और परिकल्पना परीक्षण की चर्चा हम अगली इकाई में करेंगे। नीचे चित्र 13.1 में सांख्यिकीय अनुमिति के विविध पहलुओं को संक्षेप में हमने दर्शाया है। यहाँ ध्यान देने योग्य महत्वपूर्ण कारक है कि क्या हमें समष्टि प्रसरण (population variance) का पता है या नहीं। निस्संदेह जब हमें समष्टि माध्य का पता न हो तो हम समष्टि प्रसरण का पता कैसे लगा सकते हैं? हम ऐसे मामले से शुरू करते हैं जहाँ हमें समष्टि प्रसरण का पता हो, क्योंकि संकल्पनाओं की व्याख्या में यह कारगर सिद्ध होगा। तत्पश्चात हम अज्ञात समष्टि प्रसरण के अपेक्षाकृत अधिक यथार्थिक मामलों पर ध्यान केंद्रित करेंगे।

आकलन दो तरह का होता है: (i) बिंदु आकलन, और (ii) अंतराल आकलन। बिंदु आकलन में हम एकल बिंदु के रूप में समष्टि प्राचल के मान का आकलन करते हैं। जबकि दूसरी तरफ, अंतराल आकलन के मामले में हम प्रतिदर्श माध्य के इर्द–गिर्द निम्न एवं उच्च परिबंधों का आकलन करते हैं जिनके भीतर समष्टि माध्य रहता है।

समष्टि के बारे में हमारा दावा, निराकरणीय परिकल्पना (null hypothsis) और इसके प्रतिपक्ष एकांतर या वैकल्पिक परिकल्पना (alternative hypothesis) के रूप में होगा। परिकल्पना के परीक्षण की विधियों और इसकी संकल्पनाओं का वर्णन हमारी अगली इकाई में है।



चित्र 13.1: सांख्यिकीय अनुमिति

13.7 बिंदु आकलन

जैसा कि हमने पहले बताया था, हमें प्राचल मान का पता नहीं है और प्रतिदर्श सूचना के प्रयोग से हम इसका अनुमान लगाना चाहते हैं। निस्संदेह, प्रतिदर्शज का मान, श्रेष्ठ अनुमान होगा। उदाहरण के तौर पर हमें समष्टि माध्य का पता नहीं है तो इस स्थिति में प्रतिदर्श माध्य, श्रेष्ठ अनुमान है। यहाँ इस मामले में हम प्राचल के 'अनुमान' के रूप में एकल मान या बिंदु का प्रयोग करेंगे।

स्मरण कीजिए कि आकलक एक सूत्र और आकल, इस सूत्र के प्रयोग से प्राप्त विशिष्ट मान। जैसे, समष्टि माध्य के आकलन के लिए हम प्रतिदर्श माध्य का प्रयोग करते हैं तब $\frac{1}{n}\sum_i x_i$ आकलक है। मान लीजिए किसी प्रतिदर्श पर आंकड़ों को एकत्रित किया जाता है और इस सूत्र में प्रतिदर्शी इकाइयों को रखकर, प्रतिदर्श माध्य के लिए, ऐसे किसी विशिष्ट मान की प्राप्ति की जाती है; मान लीजिए यह 120 है। तब ऐसी स्थिति में 120 समष्टि माध्य का आकल है। यह संभव है कि आप समान समष्टि से एक अन्य प्रतिदर्श प्राप्त कर लें, प्रतिदर्श माध्य के लिए सूत्र $\frac{1}{n}\sum_i x_i$ का प्रयोग करें, और एक अलग मान जैसे 123 की प्राप्ति करें। यहाँ 120 और 123 अर्थात दोनों समष्टि माध्य के आकल हैं। लेकिन इन दोनों मामलों में आकलक एक ही है अर्थात् $\frac{1}{n}\sum_i x_i$ । याद रखें कि पारिभाषिक शब्द प्रतिदर्शज, जो प्रतिदर्श मानों के फलन के संदर्भ में प्रयुक्त है, आकलक शब्द का समानार्थक है।

ऐसी स्थितियाँ भी हो सकती हैं जब आप प्राचल के लिए एक से अधिक संभावी (potential) आकलकों (एकांतर सूत्र) की प्राप्ति करेंगे। इन प्राचलों में से श्रेष्ठ के चयन के लिए हमें कुछ निर्धारित मानदंडों का अनुसरण करना होगा। इन मानदंडों के आधार पर आकलक को कुछ निश्चित वांछनीय गुणधर्मों को पूरा करना होगा।

वैसे तो आकलक के लिए वांछनीय गुणधर्म गिने–चुने हैं, लेकिन सर्वाधिक महत्वपूर्ण है इसकी अनभिनता (unbiasedness)।

अनभिनता का अर्थ है कि आकल, प्राचल के अज्ञात मान से उच्च या निम्न हो सकता है। लेकिन आकल का प्रत्याशित मान प्राचल के बराबर होना चाहिए। जैसे, प्रतिदर्श माध्य एक प्रतिदर्श से दूसरे प्रतिदर्श में अलग–अलग होता है लेकिन औसतन यह समष्टि माध्य के बराबर होगा। अन्य शब्दों में $E(\bar{x}) = \mu$ लेकिन, $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2$ समष्टि प्रसरण $\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum(X_i - \bar{X})^2$ का अनभिनत आकलक नहीं है। दरअसल यदि हम $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum\left(x_i - \bar{x}\right)^2$ को परिभाषित करें तब s^2, σ^2का भी अनभिनत आकलक है। अतः प्रतिदर्श मानक विचलन s की, समष्टि मानक विचलन σ से कम होने की प्रवृत्ति है। इस शर्त को संशोधित करने के लिए हम n की बजाए कृत्रिम रूप से किसी छोटी संख्या (n-1) से s को उच्च करने के लिए विभाजित करते हैं।

परिकल्पना के परीक्षण के लिए बिंदु आकलन का विशेष महत्व है और इसका अध्ययन हम इकाई 14 में करेंगे।

13.8 अंतराल आकलन

जैसा कि हमने ऊपर बिंदु आकलन में देखा, आमतौर पर हम एकल मान अर्थात् संगत प्रतिदर्शज द्वारा प्राचल को आकलित करते हैं। इस तरीके से बिंदु आकलन वास्तविकता पूर्ण होना जरूरी नहीं होता, क्योंकि प्रायल का मान इससे भिन्न भी हो सकता है। इसकी एक वैकल्पिक प्रक्रिया है, अंतराल का निर्धारण जो प्राचल को कुछ निश्चित प्रायिकता तक बाँधे रखे। यहाँ हम निम्न सीमा एवं उच्च सीमा पर विशेष ध्यान देते हैं जिसके भीतर प्राचल का मान बना रहेगा। इसके अलावा हम प्राचल की प्रायिकता पर भी विशेष ध्यान डालते हैं जो उस अंतराल में बनी हुई है। इस संदर्भ में अंतराल को हम 'विश्वश्यता अंतराल' और इस अंतराल में प्राचल की प्रायिकता को विश्वस्यता स्तर या विश्वस्यता गुणांक कहते हैं।

13.8.1 विश्वस्यता अंतराल

आइए अब एक उदाहरण लें। मान लीजिए आपको छतीसगढ़ राज्य के रायगढ़ जिले के लोगों की औसतन आमदनी का अनुमान लगाना है। आपने 500 परिवारों के प्रतिदर्श से आंकडत्रे एकत्रित किए और पाया कि औसतन आमदनी (मान लीजिए $\bar{x}$) प्रति वर्ष 18,250 रूपये है। प्रतिदर्शी त्रुटि के कारण छतीसगढ़ के रायगढ़ जिले की वास्तविक औसतन आमदनी (μ) के संदर्भ में यह प्रतिदर्श शायद सही परिणाम नहीं दे रहा होगा। इसलिए हम निश्चित रूप से नहीं कर सकते कि जिले की औसतन आमदनी 18,250 रूपए है या नहीं। दूसरी तरफ, यह कहना बेहतर होगा कि छतीसगढ़ के रायगढ़ जिले की औसतन आमदनी प्रति वर्ष 17,900 रूपए और 18,600 रूपए के बीच है। इसके अलावा हमें यह भी स्पष्ट करना होगा कि औसतन आमदनी इन सीमाओं में ही रहेगी, इसका प्रायिकता 95

प्रतिशत है। अतः इस मामले में हमारा विश्वस्यता अंतराल 17,900–18,600 रूपए है और विश्वस्यता स्तर या विश्वस्यता गुणांक 95 प्रतिशत है।

इस संदर्भ में हमारे मस्तिष्क में उठने वाला प्रश्न होगा कि हम विश्वस्यता अंतराल और विश्वस्यता गुणांक की प्राप्ति कैसे करते हैं?

आइए, विश्वस्यता गुणांक से शुरूआत करें। हमें पता है कि बड़े प्रतिदर्शों के लिए $\bar{x}$ का प्रतिदर्शी बंटन प्रसामान्य रूप से बंटित होता है और इसका माध्य μ और मानक त्रुटि $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ है और जहाँ n प्रतिदर्श का आकार है। प्रतिदर्शी बंटन को परिवर्तित करने पर हमें मानक प्रसामान्य विचर $z = \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ की प्राप्ति होती है। जिसका मूल्य शून्य और प्रसरण 1 है। मानक प्रसामान्य वक्र सममित है। इसलिए, $0 \le z \le \infty$ वक्र के नीचे का क्षेत्रफल 0.5 है। इसे हमने इस पुस्तक के अंत में दी गई **परीशिष्ट सारणी A1** में दर्शाया है। आइए अब मान लें कि हमारा विश्वस्यता गुणांक 95 प्रतिशत (अर्थात 0.95) है। इस संदर्भ में हमें z के लिए परिसर ज्ञात करना होगा जो मानक प्रसामान्य वक्र का 0.95 क्षेत्र ढक लेगा। चूँकि z का बंटन सममित है, इसलिए z = 0 के दायें ओर 0.475 क्षेत्र और बायें ओर 0. 475 क्षेत्र रहना चाहिए। यदि हम प्रसामान्य क्षेत्र परिशिष्ट तालिका 11 देखें तो पाते हैं कि 0.475 क्षेत्र आच्छादित होगा जब z = 1.96 होगा। अतः इसकी प्रायिकता कि z का परिसर –1.96 और 1.96 के बीच हो, 0.95 होगी। इस सूचना के आधार पर आइए पिछले प्रश्न पर दुबारा ध्यान केंद्रित करें और ऐसा परिसर ज्ञात करें जिसके भीतर बना μ रहेगा।

हम पाते हैं कि

$$P(-1.96 \le z \le 1.96) = 0.95 \qquad \ldots(13.1)$$

$$or\ P\left(-1.96 \le \frac{\bar{x}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \le 1.96\right) = 0.95$$

$$or\ P\left(-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \bar{x}-\mu \le 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 0.95$$

$$or\ P\left(\bar{x}-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{x}+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 0.95 \qquad \ldots(13.2)$$

आइए, उपर्युक्त की व्याख्या करें। स्मरण कीजिए कि हरेक प्रतिदर्श हमें $\bar{x}$ का अलग मान देगा। इसी आधार पर, विश्वस्यता अंतराल भी अलग होगा। प्रत्येक मामले में विश्वस्यता अंतराल में अज्ञात प्राचल शामिल हो सकता है या नहीं भी। समीकरण (13.2) से आशय है कि यदि यादृच्छिक प्रतिदर्शों की संख्या अधिक है तो प्राप्त समष्टि से n आकार का हरेक प्रतिदर्श लिया जाता है और यदि ऐसे हरेक प्रतिदर्श के लिए $\left(\bar{x}-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \le \bar{x}+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ अंतराल का निर्धारण हो जाता है तब लगभग 95 फीसदी मामलों में, अंतराल में समष्टि माध्य μ शामिल होगा।

विश्वस्यता गुणांक को $(1-\alpha)$ से दर्शाया जाता है जहाँ α सार्थकता का स्तर है (इकाई 14 में हम 'सार्थकता के स्तर' की संकल्पना की चर्चा करेंगे)। विश्वस्यता गुणांक किसी भी मान को ले सकता है। हम अपनी निष्कर्षों की सार्थकता का अनुमान लगाने के लिए, मान लीजिए 81 प्रतिशत या 97 प्रतिशत को विश्वस्यता का स्तर मान सकते हैं। सुविधा के

नज़रिए से अक्सर दो विश्वस्यता स्तर अर्थात् 95 प्रतिशत और 99 प्रतिशत ही व्यापक रूप से प्रयोग में लाए जाते हैं।

हाँ, कभी–कभार 90 प्रतिशत विश्वस्यता स्तर भी प्रयोग में हम लाते हैं। आइए, विश्वस्यता अंतराल ज्ञात करें जब विश्वस्यता गुणांक (1–α) = 0.99 हो। इस मामले में 0.495 मानक प्रसामान्य वक्र के दायें/बायें अर्थात दोनों में से किसी एक तरफ होना चाहिए। यदि हम प्रसामान्य क्षेत्र तालिका (पुस्तक के अंत में दिया गया परीशिष्ट सारणी A1) पर नजर डालें तो हम पाते हैं कि 0.495 क्षेत्र आच्छादित होगा जब z = 2.58 होगा।

अतः

$$P(-2.58. \le z \le 2.58) = 0.99 \qquad \ldots(13.3)$$

उपर्युक्त में मदों को पुनःव्यवस्थित करने पर हम पाते हैं कि

$$P\left(\bar{x} - 2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{x} + 2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 0.99 \qquad \ldots(13.4)$$

समीकरण (13.4) से पता चलता है कि μ के लिए 99 प्रतिशत विश्वस्यता अंतराल $\bar{x} \pm 2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. द्वारा दिखाया गया है।

प्रसामान्य क्षेत्र तालिका में नजर डालें तो 0.90 के विश्वस्यता गुणांक के लिए अब हम विश्वस्यता अंतराल निकाल सकते हैं और पता लगा सकते हैं कि

$$P\left(\bar{x} - 1.65\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{x} + 1.65\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 0.90 \qquad \ldots(13.5)$$

हमने उपर्युक्त समीकरण (13.2), (13.4) और (13.5) पर गौर किया कि जैसे–जैसे विश्वस्यता अंतराल विस्तृत होते जाते हैं, प्राचल (इस मामले में) को अंतराल में रखने की संभावना बढ़ जाती है।

13.8.2 विश्वस्यता सीमाएं

विश्वस्यता अंतराल की दो सीमाएँ **विश्वस्यता सीमाएँ** (confidence limits) कहलाती हैं। जैसे, 95 प्रतिशत विश्वस्यता के लिए, निम्न विश्वस्यता सीमा है $\bar{x} - 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ और उच्च विश्वस्यता सीमा है $\bar{x} + 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ μ. की अंतराल में ही सही ढंग से बनाए रखने के लिए इन दो सीमाओं में जो विश्वास हम कायम कर लेते हैं, उसे विश्वस्यता गुणांक के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

उदाहरण 13.3

कोई पेपर कंपनी अनुमान लगाना चाहती है कि नयी मशीन पर एक रीम पेपर बनाने में औसतन कितना समय लगता है। 36 रिमों का यादृच्छिक प्रतिदर्श दर्शाता है कि एक रिम पेपर औसतन 1.5 मिनट में बनते हैं। समष्टि मानक विचलन 0.30 मिनट है। 95 प्रतिशत विश्वस्यता स्तर पर अंतराल आकल निर्मित कीजिए।

प्राप्त जानकारी के आधार पर $\bar{x} = 1.5, \sigma = 0.30$ और $n = 36$

चूँकि $n = 36\ (> 30)$, यहाँ प्रतिदर्श को बड़ा प्रतिदर्श माना गया है और इसी आधार पर $\bar{x}$ प्रसामान्य रूप से बंटित है। और इसका माध्य μ और मानक त्रुटि $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ है

$$\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{0.30}{\sqrt{36}} = 0.05$$

95 प्रतिशत विश्वस्यता अंतराल इस प्रकार होगा,

$$\bar{x} - 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{x} + 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$or\ 1.5 - 1.96 \cdot 0.05 \le \mu \le 1.5 + 1.96 \cdot 0.05$$

$$i.e.,\ 1.402 \le \mu \le 1.598$$

अतः यदि 95 प्रतिशत विश्वस्यता स्तर है तो हम कह सकते हैं कि नई मशीन के लिए औसतन उत्पादन समय 1.402 मिनट और 1.598 मिनट के बीच होगा। यहाँ 1.402 निम्न विश्वस्यता सीमा है और 1.598 उच्च विश्वस्यता सीमा है।

13.8.3 अज्ञात प्रसरण संबंधी विश्वस्यता अंतराल

पिछले अनुभाग में हमने समष्टि माध्य के लिए विश्वस्यता अंतराल (confidence interval) आकलित किया था और इस संदर्भ में हमने माना था कि समष्टि प्रसरण हमें ज्ञात है। यह थोड़ा या अविश्वसनीय प्रतीत होता है कि समष्टि माध्य का हमें पता नहीं (हम उसे आकलन करना चाहते हैं) और हमें समष्टि प्रसरण का पता है। इस संदर्भ में अधिक उपयुक्त धारणा तो यह होती है कि समष्टि माध्य और प्रसरण दोनों अज्ञात हैं। प्रतिदर्श माध्य और प्रसरण के आधार पर हम समष्टि माध्य के लिए विश्वस्यता स्तर ज्ञात करना चाहते हैं।

चूँकि समष्टि मानक (σ) विचलन अज्ञात है, इसलिए इसके बदले हम प्रतिदर्श मानक विचलन (s) का प्रयोग करते हैं। लेकिन ऐसे मामले में $\bar{x}$ का प्रतिदर्शी बंटन प्रसामान्य नहीं है और इसके बदले यह स्टूडेंट t बंटन का अनुसरण करता है। प्रतिदर्श माध्य की मानक त्रुटि $\frac{s}{\sqrt{n}}$ होगी।

मानक प्रसामान्य विचर की भांति, t बंटन का माध्य शून्य है और माध्य के लिए यह सममित है और इसका परिसर $-\infty$ से ∞ के बीच है। लेकिन इसका प्रसरण 1 से अधिक है। असल में इसका प्रसरण, स्वतंत्रता की कोटि के आधार पर बदलता है । लेकिन जब $n > 30$ हो तब t बंटन का प्रसरण 1 के काफी निकट होता है और तब z- बंटन नजर आता है।

z-प्रतिदर्शज की भांति t –प्रतिदर्शज इस प्रकार परिकलित किया जाता है।

t बंटन की क्षेत्रफल सारणी (पुस्तक के अंत में दिया गया परीशिष्ट सारणी A3) पर यदि निगाह डालें तो आपेक्षित विश्वस्यता स्तर के प्रायिकता मान हम प्राप्त करते हैं। अतः विश्वस्यता अंतराल होगा,

$$\bar{x} - t \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{x} + t \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \qquad \ldots(13.6)$$

उदाहरण 13.4

20 बालकों का माध्य वजन (किग्रा में) 15 और मानक विचलन 4 है। उपर्युक्त जानकारी के आधार पर ऐसी समष्टि के माध्य वजन का 95 प्रतिशत विश्वस्यता अंतराल आकलित कीजिए जिससे हमने प्रतिदर्श लिए हैं। मान लीजिए कि समष्टि प्रसामान्य रूप से बंटित है।

चूँकि समष्टि प्रसामान्य है और प्रतिदर्श आकार छोटा है, इसलिए विश्वस्यता अंतराल के आकलन के लिए हम t–बंटन लागू करते हैं। चूँकि $n = 20$ है इसलिए स्वतंत्रता की कोटियाँ = 19 हैं। अब हम परिशिष्ट सारणी A.3 के पहले स्तंभ से नीचे ऐसी पंक्ति की ओर बढ़ते हैं जो 19 के संगत में है। चूँकि हमें 95 प्रतिशत विश्वस्यता अंतराल चाहिए इसलिए $t = 0$ के दोनों तरफ हमें 0.025 क्षेत्र छोड़ना होगा और पिछले अनुभाग में भी हमने ऐसा ही किया था। स्वतंत्रता की कोटियाँ = 19 और $\alpha = 0.025$ के लिए हम पाते हैं कि t का मान 2.093 है।

यहां विश्वस्यता अंतराल निम्नलिखित है:

$$15 - 2.093 \times \frac{4}{\sqrt{20}} \le \mu \le 15 + 2.093 \times \frac{4}{\sqrt{20}}$$

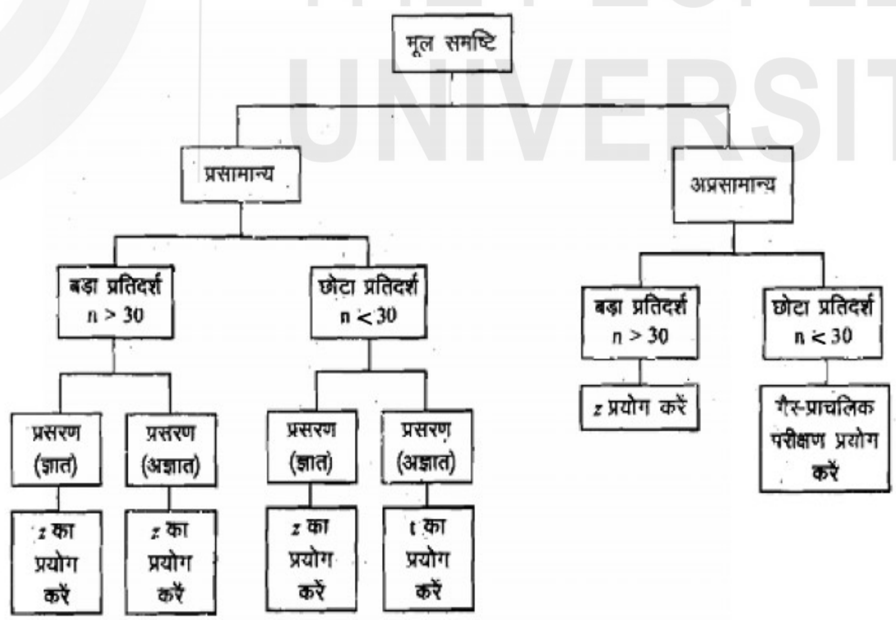
और $\quad 15 - 1.87 \le \mu \le 15 + 1.87$

और $\quad 13.13 \le \mu \le 16.87$

ठीक इसी तरह से, हम विभिन्न प्रतिदर्श के आकारों एवं विश्वस्य गुणांको से विश्वास्यता अन्तराल का आकलन कर सकते है। विश्वस्यता अन्तराल के आकलन के लिए (z) एवं (t) सांख्यिकी के प्रयोग की विधियों का संक्षिप्त विवरण निम्नलिखित है।

1. यदि प्रतिदर्श का आकार बड़ा है (n>30) तो z-सांख्यिकी का प्रयोग होगा–यहां–(1) मूल जनसंख्या(समष्टि)का सामान्य या असामान्य होना एवं (z) प्रसरण का ज्ञात होना अथवा न होने से कोई अंतर नहीं पड़ता है।
2. यदि प्रतिदर्श का आकार (n≤30) छोटा है, तो देखना पडेगा कि (1) मूल जनसंख्या(समष्टि)सामान्य है या असमान्य है (2) प्रसरण ज्ञात है या अज्ञात है। इसके लिए निम्नलिखित तीन वर्ग हो सकते है।

   क) यदि मूल जनसंख्या (समष्टि) सामान्य नहीं है, तो अप्राचलित (nonparametric) परीक्षण का प्रयोग किया जाता है।



चित्र 13.2: उपयुक्त परीक्षण प्रतिदर्शज का चयन

ख) यदि मूल जनसंख्या(समष्टि)सामान्य है एवं प्रसरण ज्ञात है तो z-सांख्यिकी का प्रयोग किया जाता है।

ग) यदि मूल जनसंख्या(समष्टि) सामान्य है एवं प्रसरण अज्ञात है तो *t*-सांख्यिकी का प्रयोग किया जाता है।

चित्र. 13.2 हम उपरोक्त को एक चार्ट के रूप में दे रहे है।

बोध प्रश्न 3

1) किसी प्रतिदर्श में शामिल 50 कर्मचारियों से घर से दफ्तर तक तय की जाने वाली दूरी के बारे में पूछा जाता है तो हम पाते हैं कि समष्टि माध्य 4.5 कि.मी. है। समष्टि के लिए 95 प्रतिशत विश्वस्यता अंतराल ज्ञात कीजिए। मान लीजिए कि समष्टि प्रसामान्य रूप से बंटित है और इसका प्रसरण 0.36 है।

....

....

....

....

....

2) किसी प्रतिदर्श में शामिल स्कूल के 25 विद्यार्थियों की माध्य ऊँचाई 95 से.मी. है और मानक विचलन 4 से.मी. है। 99 प्रतिशत विश्वस्यता अंतराल ज्ञात कीजिए।

....

....

....

....

....

3) बताइए कि निम्नलिखित कथन सही है या गलत।

क) जब मूल समष्टि अप्रसामान्य नहीं हो और प्रतिदर्श का आकार छोटा हो तो विश्वस्यता अंतराल आकलन करने के लिए हम *t*–बंटन का प्रयोग करते हैं।

ख) *t*–बंटन का परिसर 0 से अनंत होता है।

ग) जब विश्वस्यता स्तर 90 प्रतिशत हो तो सार्थकता का स्तर 10 प्रतिशत होगा।

....

....

....

13.9 सार संक्षेप

प्रतिदर्श सूचना के आधार पर समष्टि के बारे में निष्कर्ष निकालने को सांख्यिकीय अनुमिति कहते हैं। इस संदर्भ में हमें मूलतः दो कार्य करने हैं: आकलन और परिकल्पना परीक्षण। इस इकाई में हमने मुख्यतया आकलन पर ध्यान केंद्रित किया था जबकि परिकल्पना परीक्षण की चर्चा हम आगे की कइाइयों में करेंगे।

अज्ञात प्राचल का आकल बिंदु या अंतराल, अर्थात् दोनों में से कोई एक, हो सकता है। दूसरी तरफ, अंतराल आकलन में हम प्रतिदर्श माध्य के इर्द–गिर्द दो सीमाएँ (उच्च एवं निम्न) का निर्माण करते हैं। विश्वस्यता के निर्धारित स्तर को ध्यान में रखकर हम कह सकते हैं कि समष्टि माध्य, जिसका फिलहाल हमें पता नहीं है, विश्वस्यता अंतराल में बना रहेगा। विश्वस्यता अंतराल का निर्मित करने के लिए हमें समष्टि प्रसरण या इसके आकल का पता होना जरूरी है। जब हमें समष्टि प्रसरण का पता है तो विश्वस्यता अंतराल निर्मित करने के लिए हम प्रसामान्य बंटन लागू करते हैं। ऐसे मामले में जहाँ समष्टि प्रसरण अज्ञात हो, उपर्युक्त उद्देश्य के लिए हम स्टूडेंट t का प्रयोग करते हैं। स्मरण रहे कि जब प्रतिदर्श का आकार बड़ा ($n>30$) होता है तो t-बंटन, प्रसामान्य बंटन के सन्निकटतः होता है। अतः बड़े प्रतिदर्शों के लिए यदि समष्टि प्रसरण अज्ञात होता है तो हम प्रतिदर्श माध्य और प्रतिदर्श प्रसरण के आधार पर विश्वस्यता अंतराल ज्ञात करने के लिए प्रसामान्य बंटन का प्रयोग कर सकते हैं।

13.10 बोध प्रश्नों के उत्तर

बोध प्रश्न 1

1) अनुभाग 13.3 का अध्ययन कीजिए एवं एक या दो वाक्यों में इन शब्दों का वर्णन कीजिए।

2) अनुभाग 13.5 का अध्ययन करें; एवं इन शब्दों के अन्तर को एक या दो वाक्यों में बताईएः

3) अनुभाग 13.3 का अध्ययन करें एवं व्याख्या कीजिए।

4) क) सभी सम्भावित प्रतिदर्श लिखिए; प्रतिदर्श माध्य की गणना कीजिए, बारम्बारता वितरण के रूप में प्रतिदर्श माध्य को क्रमबद्ध कीजिए। प्रत्येक प्रतिदर्श माध्य के धटित होने की प्रायिकता को ज्ञात कीजिए।

ख) मानक त्रुटि शब्द का अर्थ समझाइए। सूत्र का प्रयोग कीजिए। इसका उत्तर 0.94 होना चाहिए।

बोध प्रश्न 2

1) अनुभाग 13.4 का अध्ययन करें एवं उत्तर दें।

2) अनुभाग 13.5 का अध्ययन करें एवं उत्तर दें।

3) क) सही ख) सही ग) गलत घ) सही।

बोध प्रश्न 3

1) क्योंकि यह बड़ा प्रतिदर्श है, इसलिए हम z-प्रतिदर्शज का प्रयोग करते हैं। यहाँ विश्वस्यता अंतराल $4.40 \le \mu \le 4.60$ है।

2) क्योंकि यह छोटा प्रतिदर्श है, और समष्टि प्रसरण नहीं दिया गया है, इसलिए हम t प्रतिदर्शज फका प्रयोग करते हैं, (t = 2.49)। यहां विश्वस्यता अंतराल $93.01 \le \mu \le 96.99$ है।

3) क) गलत ख) गलत ग) सही।