इकाई 15 रैखिक अंतर समीकरण*

संरचना

15.0 उद्देश्य

15.1 विषय-प्रवेश

15.2 प्रारंभिक अवधारणाएँ (Preliminary Concepts)

15.3 एक-घातीय अंतर समीकरण (First Order Difference Equations)

15.31 पुनरावृत्तीय विधि (The Iterative Method)

15.3.2 सामान्य/व्यापक विधि (The General Method)

15.4 द्विघातीय अंतर समीकरण (Second Order Difference Equations)

15.5 अर्थशास्त्र में अनुप्रयोग (Economic Applications)

15.51 मक्कड़ जाल (कॉबवेब प्रतिमान The Cobweb Model)

15.5.2 सैम्युलसन गुणक-त्वरण (परस्पर प्रभाव) प्रतिमान (Samuelson Multiplier-Accelerator Interaction Model)

15.6 सार-संक्षेप

15.7 बोध प्रश्नों के उत्तर/संकेत

15.0 उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के पश्चात्, आप सक्षम होंगे :

- परिमित अंतरों की संकल्पना करने में;
- असतत् आर्थिक प्रक्रियाओं की व्याख्या करने में;
- किसी अंतर समीकरण की घात/क्रम की परिभाषा करने में;
- घात एक तथा दो के अंतर समीकरण की पहचान करने में;
- समघाती और असमघाती अंतर समीकरण में अंतर करने में;
- एक-घात तथा द्वि-घात वाले अंतर समीकरणों को हल करने की विधियाँ समझाने में; तथा
- असतत् समय में होने वाली आर्थिक प्रक्रियाओं के अंतर समीकरणों के रूप में निरूपण तथा उनके हल करने में।

15.1 विषय-प्रवेश

अब तक आप अवकलन गणित तथा समाकलन का अध्ययन कर चुके हैं और इनकी सहायता से अर्थशास्त्र से संबंधित समस्याओं/प्रश्नों का हल ज्ञात करना भी सीख चुके हैं। आपने यह भी देखा कि किस प्रकार समाकलन, अवकलन का व्युत्क्रम प्रक्रम है। यदि हम यह जानना चाहें कि एक दिया हुआ फलन वर्धमान है अथवा ह्रासमान, तो यह निर्भर चर के स्वतंत्र चर के सापेक्ष अवकलज के चिन्ह के आधार पर ज्ञात किया जा सकता है। यदि हम किसी दिए हुए फलन के अधिकतम अथवा न्यूनतम मान के बारे में निर्णय करना चाहें तो भी हम फलन के विभिन्न अवकलजों की सहायता लेते हैं।

*श्री जगमोहन रॉय

अतः, अवकलन गणित की सभी विधियाँ अवकलज की संकल्पना पर आधारित है। परंतु यदि y, x का एक फलन है तो हम इसका अवकलज तभी ज्ञात कर सकते हैं जब x एक सतत् चर हो अर्थात् x में परिवर्तन अत्यंत ही सूक्ष्म हों। ऐसी स्थिति में, एक अंतराल में x के प्रत्येक मान के लिए y परिभाषित होता है। परंतु यह आवश्यक नहीं कि स्थिति सदा ऐसी ही हो।

अर्थशास्त्र में, हमें अनेक बार ऐसी स्थितियों का सामना करना पड़ता है जब स्वतंत्र चर सतत न होकर असतत हो। अर्थात् यह संभव है कि x दो मान 2 और 4 तो लें, परंतु 2 और 4 के बीच में कोई ओर मान न लें। ऐसी स्थिति में, यदि y, x का एक फलन है तो y पूरे अंतराल (2, 4) पर परिभाषित नहीं होगा अपितु ये $x = 2$ तथा $x = 4$ पर ही परिभाषित हो पाएगा। उदाहरण के लिए, मान लीजिए हम एक परिवार द्वारा की जाने वाली बचत के बारे में अध्ययन कर रहे हैं और हम निश्चित समय के अंतर पर, जैसे कि प्रतिवर्ष आँकड़े इकट्ठा करते हैं। इस प्रकार, यदि S परिवार की, समय अंतराल t पर, बचत को निरूपित करता है हमें $S = S(t)$ के रूप में प्राप्त होता है जहाँ t, 0,1,2…इत्यादि मान लेता है। अतः, t एक असतत चर है। हमारी रुचि स्वतंत्र चर के मान में परिवर्तन करने से, y के मान में होने वाले परिवर्तन का अध्ययन करने में हो सकती है। परंतु अवकलज की संकल्पना यहाँ काम नहीं करेगी क्योंकि यहाँ स्वतंत्र चर सतत न होकर असतत है। जब किसी फलन में स्वतंत्र चर कुछ परिमित संख्याएँ, छोड़-छोड़ कर परिवर्तित होता है, तो इस प्रकार प्राप्त फलन के मानों के बीच संबंध परिमित अंतर फलन (finite differences) की विषय-वस्तु है।

हम इस तथा अगली इकाई में अंतर समीकरणों के बारे में जानेंगे तथा उन्हें हल करने की विधियाँ सीखेंगे। हम अर्थशास्त्र की कुछ ऐसी स्थितियों का भी अध्ययन करेंगे जहाँ अंतर समीकरण उपयोगी सिद्ध होते हैं। इस इकाई में हम अंतर समीकरणों की ही चर्चा करेंगे।

15.2 प्रारंभिक अवधारणाएँ / संकल्पनाएँ (PRELIMINARY CONCEPTS)

अब हम ऐसे फलनों पर विचार करेंगे जिनमें स्वतंत्र चर सतत न होकर असतत् है; ऐसे फलन जिनमें y निर्भर चर तथा x एक पूर्णांक मान लेने वाला चर होगा। ऐसी स्थिति में निर्भर चर y में परिवर्तन का स्वरूप का निर्धारक फलन $y(x)$ के अवकलज के स्थान पर 'अंतर' के द्वारा किया जाएगा।

मान लीजिए $y = f(x)$ है, अर्थात् y, x का एक फलन है जहाँ x समान दूरी पर स्थित (समदूरस्थ) पूर्णांक मान $x_0, x_0+h, x_0+2h, \ldots, x_0+nh$ लेता है।

अतः $f(x_0), f(x_0+h), f(x_0+2h), \ldots, f(x_0+nh)$, x के मानों के संगत y के मान होंगे जिन्हें $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n$ से व्यक्त किया जाता है।

अंतर $y_1 - y_0, y_2 - y_1, \ldots, y_n - y_{n-1}$ फलन $y = f(x)$ के ***प्रथम अग्र अंतर*** कहलाते हैं जिन्हें हम क्रमशः $\Delta y_0, \Delta y_1, \ldots, \Delta y_n$ व्यक्त करते हैं। यही वह अंतर हैं तो असतत चर x में होने वाले परिवर्तनों के सापेक्ष y के परिवर्तनों को निरूपित करते हैं।

व्यापक रूप में प्रथम अग्र अंतर को $\Delta y_n = y_{n+1} - y_n$, अथवा $\Delta f(x) = \Delta f(x + h) - f(x)$, द्वारा परिभाषित किया जाता है, यहाँ h अंतर का अंतराल है।

अर्थात् यह x के दो क्रमानुगत मानों के बीच का अंतर है।

इसी प्रकार Δy या $\Delta f(x)$ मूल रूप में, असतत स्वतंत्र चर के दो क्रमानुगत मानों पर फलन $y = f(x)$ के मानों का अंतर है।

उदाहरण के लिए, एक अनुक्रम $-5, -1, 3, 7, \ldots, (4x + 3), \ldots$ लें।

यहाँ, $y = f(x) = 4x + 3$ तथा $h = 4$ है (यह अनुक्रम के किन्हीं दो क्रमानुगत मानों का व्यवकलन करके ज्ञात किया जा सकता है)

$$\Delta y \text{ or } \Delta f(x) = \Delta f(x + h) - f(x)$$

$$= [4(x + h) + 3] - [4x + 3]$$

$$= 4x + 4h + 3 - 4x - 3$$

$$= 4h = 16 \qquad [\because h = 4 \text{ (परिकलित मान)}]$$

इसी प्रकार हैं **द्वितीय अग्र अंतर**, $\Delta^2 y_n$ को $\Delta(\Delta y_n)$ के रूप में परिभाषित करते हैं, अर्थात्

$$\begin{aligned} \Delta^2 y_n &= \Delta(\Delta y_n) = \Delta(y_{n+1} - y_n) \\ &= (y_{n+2} - y_{n+1}) - (y_{n+1} - y_n) \\ &= y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n \end{aligned}$$

इसी प्रकार हम और अधिक उच्च क्रम/घात के अग्र अंतरों को परिभाषित कर सकते हैं। क्योंकि हमारा मुख्य उद्देश्य अर्थशास्त्र संबंधी प्रश्नों/समस्याओं का अध्ययन करना है, हमारी रुचि बहुधा समय के साथ होने वाले परिवर्तन के किसी प्रतिरूप के सापेक्ष/अनुरूप, चर y के लिए एक समय-पथ ज्ञात करने में होगी। इसके लिए हम स्वतंत्र चर को t से निरूपित करते हैं और $\Delta y_t = y_{t+1} - y_t$ लिखते हैं। अतः, पिछले उदाहरण में हम लिख $\Delta y_t = 16$ सकते हैं। ऐसे समीकरण **अंतर समीकरण** कहलाते हैं। किसी अंतर समीकरण की घात, उस समीकरण में उपस्थित सबसे अधिक घात वाले अंतर की घात के बराबर होती है। उदाहरण के लिए, $\Delta^2 y_t = 4$ एक द्विघाती अंतर समीकरण है।

अंतर समीकरण $\qquad \Delta y_t = 16 \qquad \ldots(a)$

को निम्न रूप में भी लिखा जा सकता है

$y_{t+1} - y_t = 16$ या $y_{t+1} = y_t + 16 \qquad \ldots(b)$

इसी प्रकार, अंतर समीकरण $\qquad \Delta y_t = -0.3 y_t \qquad \ldots(c)$

को $y_{t+1} - y_t = -0.3\, y_t$ या $y_{t+1} = 0.7\, y_t \qquad \ldots(d)$

के रूप में भी लिखा जा सकता है।

एक अंतर समीकरण **समघाती** कहलाता है यदि इसका अचर पद (वह पद जिसमें y उपस्थित न हो) शून्य हो किन्तु अचर पद की उपस्थिति उसे असमघाती बना देती है। अतः हम एक अंतर-समीकरण को एक ऐसे समीकरण के रूप में परिभाषित कर सकते है जिसमें एक स्वतंत्र चर, एक निर्भर चर और निर्भर चल के क्रमिक अंतर हों। साथ ही, हमने देखा कि किसी निर्भर चर के क्रमिक अंतर, उसके क्रमिक मानों के पदों में व्यक्त

किए जा सकते हैं। उदाहरण के लिए, समीकरण (a) को समीकरण (b) के रूप में तथा समीकरण (c) को समीकरण (d) के रूप में लिखा जा सकता है। अतः, हम एक अंतर समीकरण को एक ऐसे समीकरण के रूप में परिभाषित कर सकते हैं जो एक स्वतंत्र चर तथा निर्भर चर के क्रमिक मानों के बीच संबंध को व्यक्त करता है। इस रूप में (अर्थात् समीकरणों (a) और (b) के रूप में) व्यक्त अंतर समीकरणों को हल करना अधिक सुविधाजनक है। ध्यान दें कि $\Delta^2 y_t = 4$ को $y_{t+2} - 2y_{t+1} + y_t = 4$ के रूप में लिखा जा सकता है।

किसी अंतर समीकरण का हल स्वतंत्र और निर्भर चरों के बीच में एक ऐसा संबंध होता है जो दिए हुए समीकरण को संतुष्ट करें। n घात वाले किसी अंतर समीकरण के व्यापक हल में n यादृच्छिक अचर होते हैं। उदाहरण के लिए, $\Delta^2 y_t = 0$ एक घात-2 का समघाती अंतर समीकरण है और $\Delta y_t = 4$ एक घात-2 वाला असमघाती समीकरण है। एक अंतर समीकरण रैखिक कहलाता है यदि समीकरण में उपस्थित प्रत्येक y की घात 1 हो। हम सर्वप्रथम घात 1 वाले अंतर समीकरणों को हल करना सीखेंगे। आइए, हम विभिन्न प्रकार के अंतर समीकरणों के बारे में जानें और एक-एक करके उन्हें हल करना सीखें।

15.3 एक-घातीय अंतर समीकरण (First Order Difference Equations)

इस खंड में हम घात 1 वाले अंतर समीकरणों को हल करना सीखेंगे। हम सर्वप्रथम घात 1 वाले अंतर समीकरणों को हल करने की पुनरावृत्ति करने वाली विधि सीखेंगे।

15.3.1 पुनरावृत्तीय विधि (The Iterative Method)

हम इस विधि की व्याख्या एक उदाहरण के माध्यम से करेंगे। एक अंतर समीकरण $\Delta y_t = 4$ लीजिए।

जैसा कि हम देख चुके हैं, इसे निम्न रूप में लिखा जा सकता है

$$y_{t+1} = y_t + 4 \qquad \ldots(i)$$

समीकरण (i) में $t = 0, 1, 2, 3, \ldots..$ रखने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$y_1 = y_0 + 4$$

$$y_2 = y_1 + 4 = (y_0 + 4) + 4 = y_0 + 2(4)$$

$$y_3 = y_2 + 4 = y_0 + 2(4) + 4 = y_0 + 3(4)$$

व्यापक रूप में, हम पाते हैं

$$y_t = y_0 + 4t \qquad \ldots(ii)$$

अब मान लीजिए $y_0 = 20$ है। समीकरण (ii) में y_0 का यह मान रखने पर, हम पाते हैं कि

$$y_t = 20 + 4t \qquad \ldots(iii)$$

y_0 का कल्पित मान y_0 पर दिए हुए अंतर समीकरण $\Delta y_t = 4$ का, एक हल है। ध्यान दें कि समीकरण (iii) में प्राप्त हल हमें t के प्रत्येक मान के लिए y का मान देता है। यदि प्रारंभिक मान y_0 न दिया हो, तो हल y_0 के पदों में प्राप्त होगा।

उदाहरण के लिए, अंतर समीकरण

$$\Delta y_t = -0.3\, y_t \qquad \ldots\text{(iv)}$$

को हम

$$y_{t+1} - y_t = -0.3\, y_t \text{ या } \quad y_{t+1} = 0.7\, y_t \qquad \ldots\text{(v)}$$

के रूप में लिख सकते हैं तथा इसे पुनरावृत्तीय विधि के द्वारा निम्नलिखित रूप से हल किया जा सकता है :

समीकरण (v) में $t = 0, 1, 2, ...$ इत्यादि रखने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$y_1 = 0.7 y_0$$
$$y_2 = 0.7 y_1 = (0.7)^2 y_0$$
$$y_3 = (0.7)^3 y_0$$

इत्यादि। व्यापक रूप में, हम देखते हैं कि

$$y_t = (0.7)^t \; y_0$$

जो y_0 के पदों में अंतर समीकरण (iv) का हल है।

अब हम घात एक के किसी अंतर समीकरण को हल करने की सामान्य विधि/प्रमुख विधि का वर्णन करेंगे।

15.3.2 सामान्य विधि (The General Method)

मान लीजिए $y_{t+1} + a_0\, y_1 = a \qquad \ldots\text{(vi)}$

घात एक का एक अंतर समीकरण है, जहाँ a_0 और a अचर है। अंतर समीकरण (vi) के व्यापक हल में दो भाग होते हैं : एक विशिष्ट/विशेष समाकलन y_p तथा एक पूरक फलन y_c . पूरक फलन, दिए हुए अंतर समीकरण (vi) से संबंधित समघाती अंतर समीकरण (vii) के व्यापक हल को कहते हैं।

$$y_{t+1} + a_0\, y_t = 0 \qquad \ldots\text{(vii)}$$

जबकि, विशिष्ट समाकलन, y_p दिए हुए असमघातीय अंतर समीकरण (vi) का कोई भी एक हल होता है। समीकरण (vi) का व्यापक हल y_c तथा y_p का योग होता है। यह विधि सामान्य विधि कहलाती है क्योंकि यह हमें, घात 1 के सबसे व्यापक रूप में दिए हुए रैखिक अंतर समीकरणों को हल करने में सहायता करती है। केवल इतना ही नहीं, यह विधि एक से अधिक घात वाले रैखिक अंतर-समीकरणों पर भी लागू होती है। क्योंकि हमें घात 2 वाले अंतर समीकरणों का भी अध्ययन करना है तथा उनके हल ज्ञात करने हैं और क्योंकि यह विधि घात 1 और घात 2 वाले रैखिक अंतर समीकरणों के लिए समान है, हम इस विधि की चर्चा बाद में करेंगे जिससे आवश्यक पुनरावृत्ति से बचा जा सके। वास्तव में, यह विधि दो से अधिक घात वाले अंतर समीकरणों के लिए भी मान्य है।

बोध प्रश्न 1

1) समघाती तथा असमघाती अंतर समीकरणों में क्या अंतर है? स्पष्ट करें।

....

....

....

....

....

2) नीचे दिए रैखिक अंतर समीकरणों को हल कीजिए :

i) $y_{t+1} - 6y_t = 0$

ii) $\Delta y_t = 0$

iii) $y_{t+1} = 10 + y_t$

iv) $\Delta y_t = 2y_t$

....

....

....

....

....

15.4 द्विघात अंतर समीकरण (Second Order Difference Equations)

ऐसे अंतर समीकरण जिनमें y_t के y_{t+2} से अधिक क्रमिक मान उपस्थित न हों, द्विघातीय अंतर समीकरण कहलाते हैं। द्विघाती अंतर समीकरणों के कुछ उदाहरण इस प्रकार हैं :

i) $u_{t+2} - 3u_{t+1} + 5u_t = 10t$

ii) $y_{t+2} - 4y_t = 0$

iii) $y_{t+2} - 3y_{t+1} + 4y_t = 6 + t$

iv) $y_{t+2} + y_{t+1} - 2y_t = 12^t$

व्यापक रूप में, कोई भी अचर गुणांकों वाला द्विघाती रैखिक असमघाती अंतर समीकरण इस प्रकार का होता है :

$$y_{t+2} + a_1 y_{t+1} + a_2 y_t = \phi(t) \qquad \ldots\text{(viii)}$$

जहाँ, a_1 तथा a_2 अचर है और $\phi(t)$ केवल t का कोई फलन है। यदि $\phi(t) = 0$ हो तो हम पाते हैं

$$y_{t+2} + a_1 y_{t+1} + a_2 y_t = 0 \qquad \ldots\text{(ix)}$$

जो कि अचर गुणांकों वाला घात 2 का रैखिक, समघाती अंतर समीकरण है। समीकरण (viii) का व्यापक हल भी $y_c + y_p$ प्रकार का होता है जहाँ y_c समीकरण (ix) का व्यापक हल है तथा y_p (viii) का कोई भी हल है। हम पहले समीकरण (ix) को हल करने की विधि सीखेंगे। यह विधि पूर्णतया व्यापक है क्योंकि इसका उपयोग किसी भी घात वाले समघाती रैखिक अंतर समीकरण को हल करने के लिए किया जा सकता है, जिसमें एकघात वाले समीकरण (i) भी सम्मिलित हैं। यह विधि इस प्रकार है :

चरण 1 : अंतर समीकरण (ix) में y_t के स्थान पर 1, y_{t+1} के स्थान पर कोई भी चर, उदाहरण के लिए, b तथा y_{t+2} के स्थान पर b^2 रखें। इससे हमें नीचे दिया हुआ अभिलक्षिणक समीकरण प्राप्त होता है :

$$b^2 + a_1 b + a_2 = 0 \qquad \ldots(x)$$

चरण 2 : अभिलक्ष्णिक समीकरण (x) को हल करें। इस प्रकार प्राप्त b के मानों को अभिलक्ष्णिक मूल कहते हैं।

चरण 3 : समीकरण (ix) का व्यापक हल चरण 2 में प्राप्त विशिष्ट मूलों का प्रयोग करके प्राप्त किया जा सकता है। यह हल अभिलक्ष्णिक मूलों की प्रकृति पर आधारित होता है। हमारे पास तीन संभावित स्थितियाँ होती हैं –

स्थिति I : यदि चरण 2 में प्राप्त मूल वास्तविक तथा भिन्न हैं, मान लीजिए, b_1 और b_2 तो (ix) का व्यापक हल इस प्रकार लिखा जा सकता है:

$$y = A_1 b_1^t + A_2 b_2^t \qquad \ldots(xi)$$

स्थिति II : यदि चरण 2 में प्राप्त मूल वास्तविक परंतु समान है, मान लीजिए, b_1 तथा $b_2 = b_1$ तो

$$y = (A_1 + t\ A_2) b_1^t \qquad \ldots(xii)$$

स्थिति III : यदि चरण (2) में प्राप्त मूल सम्मिश्र संख्याएँ हों, मान लीजिए $b_1 = \alpha + i\beta$ और $b_2 = \alpha - i\beta$

$$y = A_1(\alpha + i\beta)^t + A_2(\alpha - i\beta)^t \qquad \ldots(xiii)$$

इसे हम इस प्रकार भी लिख सकते हैं :

$$y = r^t (C_1 \cos\theta t + C_2 \sin\theta t) \qquad \ldots(xiv)$$

जहाँ, $r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$, $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$, $C_1 = A_1 + A_2$, $C_2 = i(A_1 - A_2)$

टिप्पणी :

1) A_1, A_2, C_1, C_2 जिनका उपयोग ऊपर किया गया है, सभी अचर है।

2) स्थिति III में मूल $\alpha + i\beta$ और $\alpha - i\beta$ लिए गए हैं। यहाँ α और β वास्तविक संख्याएँ हैं। वास्तव में, जब भी किसी वास्तविक गुणांकों वाले द्विघात समीकरण के सम्मिश्र मूल हों, तो वे $\alpha \pm i\beta$ के प्रकार के ही होंगे।

3) यहाँ पर समान सम्मिश्र मूलों वाली स्थिति की चर्चा नहीं की गई क्योंकि ऐसे समीकरण की घात कम से कम 4 होनी चाहिए और हमारा अध्ययन के केवल दो घात वाले समीकरणों तक ही सीमित है।

4) जब हम ऐसे असमघाती अंतर समीकरणों की बात करते हैं जैसा कि समीकरण (viii) में दिया है, तो समीकरण (ix) में दिए समघाती समीकरण के व्यापक हल को (viii) का पूरक फलन कहते हैं तथा इसे y_c से व्यक्त किया जाता है। अतः हम (xi), (xii), (xiii) और (iv) में प्राप्त हलों को y_c में व्यक्त करेंगे।

आइए, अब हम कुछ उदाहरणों के माध्यम से इस विधि को समझें।

उदाहरण 1 $y_{t+2} - 4y_t = 0$ को हल कीजिए।

हल : $y_t = 1$ तथा $y_{t+2} = b^2$ लेने पर इस अंतर समीकरण का अभिलक्ष्णिक समीकरण होगा :

$$b^2 - 4 = 0 \Rightarrow b^2 = 4 \Rightarrow b = \pm 2$$

इसके मूल $b_1 = 2$ तथा $b_2 = -2$ हैं जो कि वास्तविक तथा भिन्न हैं। अतः दिए हुए अंतर समीकरण का व्यापक हल होगा :

$$y = A_1 2^t + A_2 (-2)^t$$ [समीकरण (xi) का उपयोग करने पर]

उदाहरण 2 $y_{t+2} + 10\, y_{t+1} + 25\, y_t = 0$ को हल कीजिए।

हल $y_t = 1, y_{t+1} = b$ तथा $y_{t+2} = b^2$ लेने पर

$$b^2 + 10b + 25 = 0$$

इस समीकरण को हल करने पर, हमें एक आवर्ति मूल –5 प्राप्त होता है। अतः इस समीकरण का व्यापक हल है :

$$y = (A_1 + t\, A_2)\, (-5)^t$$ [समीकरण (xii) का उपयोग करने पर]

उदाहरण 3 $y_{t+2} - 4y_{t+1} + 13y_t = 0$ को हल करें।

हल दिए हुए अंतर समीकरण के लिए अभिलक्ष्णिक समीकरण है :

$$b^2 - 4b + 13 = 0$$

इसे हल करने पर हम पाते हैं कि इसके मूल निम्नलिखित सम्मिश्र संख्याएं हैं, $b_1 = 2 + 3i,\ b_2 = 2 - 3i.$

$\therefore\ \alpha = 2$ तथा $\beta = 3$ है। इससे हमें प्राप्त होता है कि $r = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$ है

$\therefore$ दिए गए समीकरण का व्यापक हल होगा :

$$y = \sqrt{13}\,(C_1 \cos\theta t + C_2 \sin\theta t),\ \text{जहाँ}\ \ \theta = \tan^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)$$

[समीकरण (xiv) उपयोग करने पर]

अब हम (viii) के प्रकार को द्विघातीय असमघाती रैखिक अंतर समीकरणों के हल ज्ञात करना सीखेंगे। जैसा कि पहले बताया गया है कि अंतर समीकरण (viii) के व्यापक हल में दो भाग y_c और y_p होते हैं। यहाँ, y_c अर्थात् पूरक फलन (viii) के संगत समघाती अंतर समीकरण (ix) का व्यापक हल होता है जिस निकालने की/ज्ञात प्राप्त करने की विधि हम सीख चुके हैं। अब हम अंतर समीकरण (viii) के विशिष्ट समाकलन, y_p को ज्ञात करने की विधि पर विचार करते हैं। वास्तव में, y_p का परिकलन अंतर समीकरण (viii) के दाएं पक्ष में दिए फलन $\phi(t)$ पर निर्भर करता है। हम केवल कुछ विशेष प्रकार के फलनों $\phi(t)$ के लिए ही, विशिष्ट समाकलन y_p ज्ञात करने की विधियाँ सीखेंगे। ये विशेष प्रकार, इस प्रकार हैं :

स्थिति 1 : जब $\phi\ (t)$ एक अचर फलन है।

स्थिति 2 : जब $\phi\ (t)$ एक बहुपद फलन है। (ध्यान दें कि स्थिति 1, स्थिति 2 की एक विशेष स्थिति है)

स्थिति 3 : जब $\phi\ (t)$, a^t के प्रकार का एक घातीय फलन है, जहाँ a एक अचर है।

स्थिति 4 : जब $\phi\ (t)$, एक बहुपद तथा a^t का गुणनफल है, जहाँ a एक अचर है।

हम इन स्थितियों की चर्चा एक-एक करके करेंगे। क्योंकि हम अंतर समीकरण (viii) के किसी भी हल को y^p ले सकते हैं, अतः ऊपर उल्लेखित सभी स्थितियों के लिए y^p ज्ञात करने की विधियाँ सीखेंगे।

स्थिति 1 : जब $\phi\ (t)$ एक अचर है, मान लीजिए (a), तो हम $y_t = k$ को समीकरण (iii) का एक संभावित हल मान लेते हैं, जहाँ k एक अचर है जिसका मान (viii) में $y_t = k$ रखकर निकाला जा सकता है।

आइए, हम इस प्रक्रिया को एक उदाहरण के माध्यम से समझें।

उदाहरण 4 $\quad y_{t+2} - 4y_t = 5$ को हल करें।

हल : ध्यान दें कि हमें एक असमघाती अंतर समीकरण दिया हुआ है। इस समीकरण के संगत समघाती समीकरण है :

$$y_{t+2} - 4y_t = 0$$

यह वही अंतर समीकरण है जिसे हमने उदाहरण 1 में हल किया है। अतः हमें इस समघाती समीकरण के अभिलक्ष्णिक मूल पहले से ही ज्ञात है तथा हमें निम्नलिखित पूरक फलन प्राप्त होता है,

$$\therefore y_c = A_1 2^t + A_2(-2)^t$$

अब हम विशिष्ट समाकलन ज्ञात करते हैं। क्योंकि $\phi(t) = 5,$ है

$$y_t = k$$

को हम दिए हुए समीकरण का विशिष्ट समाकलन ज्ञात करने के लिए एक परीक्षण हल के तौर पर चुनते हैं।

$$y_t = k \ = \ y_{t+2} = k \qquad \text{[क्योंकि } y \text{ एक अचर फलन है]}$$

अब y_t और y_{t+2} को दिए हुए असमघाती अंतर समीकरण में रखने पर, हम प्राप्त करते हैं

$$k - 4k = 5$$
$$k = \frac{-5}{3}$$
$$\therefore y_p = \frac{-5}{3}$$

जो कि दिए हुए अंतर समीकरण का विशिष्ट समाकलन y_p है। अतः, अंतर समीकरण $y_{t+2} - 4y_t = 5$ का पूर्ण हल है :

$$y_t = y_c + y_p \qquad = A_1 2^t + A_2 (-2)^t - \frac{5}{3}$$

स्थिति 2 : जब $\phi(t)$, t में घात n का एक बहुपद हो, तो हम घात n वाले व्यापक बहुपद $y_t = p_0 + p_1 t + \ldots\ldots p_n t^n$ को एक संभावित विशिष्ट समाकलन के रूप में लेते हैं और दिए हुए समीकरण में यह रखकर अचर $p_0, p_1, \ldots\ldots, p_n$ आंकलित कर लेते हैं।

उदाहरण 5 : $y_{t+2} + 10y_{t+1} + 25y_t = 1 + t^2$ का हल ज्ञात कीजिए।

हल : इस अंतर समीकरण का पूरक फलन $y_c = (A_1 + t A_2)(-5)^t$ हम उदाहरण 2 में पहले ही ज्ञात कर चुके हैं। विशिष्ट समाकलन ज्ञात करने के लिए हम घात 2 का व्यापक बहुपद $y_t = p_0 + p_1 t + p_2 t^2$ लेते हैं क्योंकि $\phi(t) = 1 + t^2$, एक घात 2 का बहुपद है। इस उदाहरण में दिए हुए अंतर समीकरण में y_t के अतिरिक्त, y_{t+1} तथा y_{t+2} वाले पद भी उपस्थित हैं। अतः हमें इनके मान इस व्यापक बहुपद से ज्ञात करने होंगे :

$$y_{t+1} = p_0 + p_1(t+1) + p_2(t+1)^2$$
$$= (p_0 + p_1 + p_2) + (p_1 + 2p_2)t + p_2 t^2$$
$$y_{t+2} = p_0 + p_1(t+2) + p_2(t+2)^2$$
$$= (p_0 + 2p_1 + 4p_2) + (p_1 + 4p_2)t + p_2 t^2$$

अब y_t, y_{t+1} और y_{t+2} के मान अपने अंतर समीकरण में रखने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$[(p_0 + 2p_1 + 4p_2) + (p_1 + 4p_2)t + p_2 t^2] + 10[(p_0 + p_1 + p_2) + (p_1 + 2p_2)t + p_2 t^2] + 25[p_0 + p_1 t + p_2 t^2] = 1 + t^2$$

बायीं ओर के समान पदों के गुणंक एकत्र कर हम पाते हैं :

$$(36p_0 + 12p_1 + 14p_2) + (36p_1 + 24p_2)t + (36p_2)t^2 = 1 + t^2$$

बाएं पक्ष में एकसमान घात वाले पदों को एक साथ लिखने पर हम प्राप्त करते हैं

$$36p_0 + 12p_1 + 14p_2 = 1$$
$$36p_1 + 24p_2 = 0$$
$$36p_2 = 1$$

इन समीकरणों को हल करने पर, हम पाते हैं कि

$$p_2 = \frac{1}{36}, \qquad p_1 = \frac{-1}{39}, \qquad p_0 = \frac{-19}{8424}$$

अतः, हम दिए हुए अंतर समीकरण का विशिष्ट समाकलन

$$y_p = \frac{-19}{8424} + \frac{-1}{39}\, t + \frac{1}{36}\, t^2$$

के रूप में प्राप्त करते हैं।

अतः दिए हुए अंतर समीकरण $y_{t+2} + 10y_{t+1} + 25y_t = 1 + t^2$ का पूर्ण हल होगा :

$$y_t = y_c + y_p$$

$$y_t = (A_1 + t\,A_2)\,(-5)^t + [\frac{-19}{8424} + \frac{-1}{39}\, t + \frac{1}{36}\, t^2]$$

स्थिति 3 : जब $\phi(t) = a^t$ हो, जहाँ a एक अचर है।

इस स्थिति में परीक्षण फलन का चयन इस बात पर निर्भर करेगा कि a दिए हुए अंतर समीकरण के अभिलक्षिणक समीकरण का मूल है अथवा नहीं। यदि a अभिलक्षिणक समीकरण का मूल नहीं है, तो हम $y_t = ca^t$, को परीक्षण फलन के रूप में लेंगे, जहाँ पर c एक ऐसा अचर है जिसका निर्धारण किया जाना है।

दूसरी ओर, यदि a अभिलक्षिणक समीकरण का एक मूल है, तो हम सर्वप्रथम जाँच करते हैं कि मूल a आवर्ती है अथवा नहीं। यदि a की पुनरावृत्ति m बार होती है तो हम $y_t = ct^m a^t$ को परीक्षण फलन के तौर पर लेते हैं। उदाहरण के लिए, यदि a की अभिलक्षिणक समीकरण के मूल के रूप में दो बार आवृति होती है तो $m = 2$ होगा और हम $y_t = ct^2 a^t$ परीक्षण फलन को लेंगे। यदि अभिलक्षिणक समीकरण का ऐसा मूल है जो आवृत्ति नहीं है तो $m = 1$ होगा तथा हम $y_t = cta^t$ को परीक्षण फलन के रूप में लेते हैं।

हम इस विधि को समझने के लिए दो उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण 6 : $y_{t+2} - 5y_{t+1} + 6y_t = 7^t$ को हल करें।

हल : यह सरलता से देखा जा सकता है कि दिए हुए अंतर समीकरण के अभिलक्षिणक समीकरण के दो वास्तविक और भिन्न मूल $b_1 = 3$ तथा $b_2 = 2$ होंगे। अतः, इसका पूरक फलन

$$y_c = A_1 3^t + A_2 2^t \qquad \text{[समीकरण (xi) का उपयोग करने पर]}$$

होगा।

y_p ज्ञात करने के लिए ध्यान दें कि यहाँ $\phi(t) = 7^t$ है तथा 7 दिए हुए अंतर समीकरण से संबंधित अभिलक्षिणक समीकरण का मूल नहीं है। अतः हम :

$$y_t = c7^t$$

का चयन परीक्षण फलन के तौर पर करते हैं। इस परीक्षण फलन से हम y_{t+1} तथा y_{t+2} के मान ज्ञात करते हैं और पाते हैं कि

$$y_{t+1} = c.7^{t+1}$$

$$y_{t+2} = c.7^{t+2}$$

अब y_t, y_{t+1} और y_{t+2} का मान दिए हुए अंतर समीकरण में रखने पर, हमें प्राप्त होता है :

$c.7^{t+2} - 5.c.7^{t+1} + 6.\ c.7^t = 7^t$

दोनों पक्षों को 7^t, विभाजित करने पर, हम प्रापत करते हैं

$$49\ c - 35\ c + 6\ c = 1 \quad \Rightarrow \quad c = \frac{1}{20}$$

$\therefore y_p = \frac{1}{20}.7^t$ अपेक्षित विशिष्ट समाकलन particular integral (*PI*) है।

अतः दिए हुए अंतर समीकरण का पूर्ण हल $y_{t+2} - 5y_{t+1} + 6y_t = 7^t$ प्राप्त होता है।

$$y_t = CF + PI$$

$$= A_1 3^t + A_2 2^t + \frac{1}{20} 7^t$$

उदाहरण 7 $\quad y_{t+2} - 7\ y_{t+1} + 10\ y_t = 3\times5^t$ को हल कीजिए।

हल : यहाँ, विशिष्ट समीकरण के मूल 2 और 5 है। अतः, हमें पूरक फलन (C.F.)

$y_c = A_1 2^t + A_2 5^t$ प्राप्त होता है।

अब, $\emptyset(t) = 3\times5^t$ है और 5^t में उपस्थिति 5 विशिष्ट समीकरण का अनावर्ती मूल है। अतः, हम $y_t = cta^t$ को परीक्षण फलन के रूप में लेते हैं क्योंकि यहाँ $m = 1$ है। अतः

$$y_t = c.t.5^t$$

$\Rightarrow \quad y_{t+1} = c.(t+1).5^{t+1}$

$\Rightarrow \quad y_{t+2} = c.(t+2).5^{t+2}$

अब, दिए हुए अंतर समीकरण में y_t, y_{t+1} तथा y_{t+2} का मान रखने पर हम प्राप्त करते हैं

$$c.(t+2).5^{t+2} - 7.\ c.(t+1).5^{t+1} + 10.\ c.t.5^t = 3\times5^t$$

दोनों पक्षों को 5^t से विभाजित करने पर, हम पाते हैं कि

$25.c.(t+2) - 35.c.(t+1) + 10.\ c.t = 3$

$\Rightarrow \quad (25c - 35c + 10c).t + 50c - 35c = 3$

$\Rightarrow \quad 15c = 3 \Rightarrow c = \frac{1}{5}$

$\therefore y_p = \frac{1}{5}t\ 5^t$ अपेक्षित विशिष्ट समाकलन (P.I) है।

इसलिए, अंतर समीकरण $y_{t+2} - 7\ y_{t+1} + 10\ y_t = 3\times5^t$ का पूर्ण हल है :

$$y_t = C.F. + P.I$$

$$= A_1 2^t + A_2 5^t + \frac{1}{5}\ t\ 5^t$$

स्थिति 4 : जब $\emptyset(t) = (a_0 + a_1t + \ldots + a_nt^n)\, a^t$ हो, जहाँ $a, a_0, \ldots a_n$ अचर हैं। इस स्थिति में $\emptyset(t)$ स्थिति 2 तथा स्थिति 3 के फलनों का गुणनफल है। इसलिए हम y_p के लिए परीक्षण फलन भी स्थिति 2 और स्थिति 3 में चुने गए फलनों का गुणनफल लेते हैं।

अतः, यदि $\emptyset(t) = (a_0 + a_1t + \ldots + a_nt^n)\, a^t$ है तो हम $y_t = (p_\circ + p_1t + \ldots . p_nt^n)a^t$ को परीक्षण फलन के रूप में चुनते हैं, यदि a संबद्ध रैखिक समघाती अंतर समीकरण के विशिष्ट समीकरण का मूल नहीं है और $y_t = t^m(p_\circ + p_1t + \ldots . p_nt^n)a^t$ को चुनते हैं यदि a इस विशिष्ट समीकरण का एक मूल है जिसकी पुनरावृत्ति m बार होती है। उदाहरण के लिए, यदि अंतर समीकरण

$$y_{t+2} - 5y_{t+1} + 6y_t = 3t^2 7^t$$

है तो हम $y_t = (p_0 + p_1t + p_2\,t^2)\, 7^t$ को विशिष्ट समाकलन के परीक्षण फलन के रूप में लेंगे क्योंकि यहाँ $\emptyset(t) = 3t^2 7^t$, है, जो कि एक द्विघात बहुपद तथा 7^t का गुणनफल है और संबद्ध रैखिक समघाती अंतर समीकरण के विशिष्ट समीकरण का मूल नहीं है।

परंतु यदि हमें अंतर समीकरण $y_{t+2} - 14y_{t+1} + 49y_t = 3t^2 7^t$ दिया गया हो

तो हम परीक्षण फलन के रूप में $y_t = t^2(p_0 + p_1t + p_2t^2)7^t$

को लेंगे क्योंकि यहाँ विशिष्ट समीकरण $b^2 - 14b + 49 = 0$ है, और 7 इसका एक मूल है। क्योंकि इस मूल 7 की पुनरावृत्ति दो बार होती है, इसलिए गुणक t^2 को इस फलन में सम्मिलित करना आवश्यक था। ऊपर दिए परीक्षण फलनों में पाए जाने वाले अचरों $p_0, p_1, \ldots, p_n$ इत्यादि का मान संबंधित अंतर समीकरण में परीक्षण फलन का मान रखकर ज्ञात कर सकते हैं। यदि परीक्षण फलन में m तथा n के मान अधिक हो तो इन अचरों का परिकलन कठिन हो जाता है। स्थिति 4 में दिए अंतर समीकरणों में परिकलन पहले ही कठिन होता है। परंतु m और n के बड़े मान वाले प्रश्न कम ही पूछे जाते हैं। हमारा पाठकों से अनुरोध है कि इस इकाई के अंत में दिए गए प्रश्नों को अवश्य हल करें जिससे उन्हें इस स्तर के प्रश्नों को हल करने का अभ्यास हो जाए। यहाँ हमने घात 2 वाले अंतर समीकरणों को हल करने की जिन विधियों की चर्चा की है, वे प्रकृति से बहुत व्यापक हैं और इन्हें किसी भी घात वाले रैखिक अंतर समीकरणों को हल किया जा सकता है। विशेष रूप से, घात 1 वाले रैखीय अंतर समीकरणों को इन विधियों से हल किया जा सकता है। कुछ उदाहरणों द्वारा हम इसे स्पष्ट करते हैं।

उदाहरण 8 अंतर समीकरण $y_{t+1} - 4y_t = 3$ को हल कीजिए।

हल यहाँ दिए हुए अंतर समीकरण से संबद्ध समघाती अंतर समीकरण है।

$$y_{t+1} - 4y_t = 0$$

अतः, विशिष्ट समीकरण $b - 4 = 0$ का केवल एक ही मूल $b = 4$ होगा।

∴ अभीष्ट पूरक फलन (C.F) $y_c = A(4)^t$ है।

विशिष्ट समाकलन (P.I.) ज्ञात करने के लिए हम $y_t = k$ को परीक्षण फलन के रूप में लेते हैं जैसा कि स्थिति 1 में बताया गया है क्योंकि $\emptyset(t) = 1$ है। जहाँ, k एक अचर है जिसका निर्धारण किया जाना है।

अब $\quad y_t = k \;\Rightarrow\; y_{t+1} = k \quad$ [क्योंकि y_t एक अचर फलन है]

$$k - 4k = 3 \Rightarrow k = -1$$

$\therefore$ अभीष्ट विशिष्ट समाकलन $(P.I)$ $y_p = -1$ है।

अतः, दिए हुए अंतर समीकरण $y_{t+1} - 4y_t = 3$ का पूर्ण हल

$y_t = C.F + P.I \;\Rightarrow\; y_t = A(4)^t - 1$ प्राप्त होता है।

उदाहरण 9 $\quad y_{t+1} - 2y_t = 12t$ को हल कीजिए

यहाँ $\emptyset(t) = 12t$ है जो कि घात 1 का एक बहुपद है।

$\therefore$ हम परीक्षण फलन के रूप में $y_t = p_0 + p_1 t$ लेंगे।

अतः, $\;y_{t+1} = p_0 + p_1(t+1)$ होगा।

y_t और y_{t+1} के इन मानों को अंतर समीकरण $y_{t+1} - 4y_t = 3$ में रखने पर हम प्राप्त करते हैं कि

$$[p_0 + p_1(t+1) - 2(p_0 + p_1 t)] = 12\,t$$

$$\Rightarrow (-p_0 + p_1) - p_1 t = 12t$$

दोनों पक्षों के गुणांकों की तुलना करने पर :

$$-p_1 = 12 \Rightarrow p_1 = -12$$

$$\Rightarrow p_0 = p_1 = -12$$

$\therefore$ हमें $y_p = -12 - 12t$ विशिष्ट समाकलन (P.I.) के रूप में मिलता है।

स्पष्ट रूप में, C.F. = $A.2^t$ है।

$\therefore$ दिए हुए अंतर समीकरण का पूर्ण हल

$$y_t = C.F. + P.I.$$
$$= \mathrm{A}.2^{t} - 12(1+t)$$

होगा।

उदाहरण 10 $\quad y_{t+1} + 5y_t = 6^t$ को हल कीजिए।

हल इस प्रश्न में दिए हुए अंतर समीकरण से संबद्ध समघाती अंतर समीकरण का एक मात्र मूल –5 है और $\emptyset(t) = 6^t$ स्थिति 3 में बताए गए फलन के प्रकार का है। अतः, हम $y_t = c.6^t$ को परीक्षण फलन के रूप में लेते हैं क्योंकि 6, संबद्ध विशिष्ट फलन का मूल नहीं है। इससे हमें $y_{t+1} = c.6^{t+1}$ प्राप्त होता है। y_t और y_{t+1} के इन मानों अंतर समीकरण $y_{t+1} - 4y_t = 3$ में रखने पर हम प्राप्त करते हैं :

$$c.6^{t+1} + 5.\; c.6^t = 6^t$$

दोनों पक्षों को 6^t से भाग देने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$6c + 5c = 1$$

$$\Rightarrow\; \mathrm{c} = \frac{1}{11}$$

$\therefore$ विशिष्ट समाकलन $(P.I)$, $y_p = \frac{1}{11}6^t$ है।

साथ ही, $C.F., y_c = A(-5)^t$ है।

$\therefore$ पूर्ण हल $y_t = C.F. + P.I = A(-5)^t + \frac{1}{11}6^t$ है।

उदाहरण 11 $y_{t+1} - 3y_t = 4.(3)^t$ को हल कीजिए।

हल : हम देख सकते हैं कि इस स्थिति में $(C.F) = A.(3)^t$ होगा क्योंकि 3 अभिलक्ष्णिक समीकरण का एकमात्र मूल है। हमें $\phi(t) = 4.3^t$, दिया है, अतः, हम $y_t = c.t.3^t$ को परीक्षण फलन के रूप में लेते हैं, क्योंकि 3^t में उपस्थित 3, अभिलक्ष्णिक समीकरण का एक अनावर्ती मूल है।

$$y_t = c.t.3^t \qquad \Rightarrow \qquad y_{t+1} = c.(t+1)3^{t+1}$$

अब y_t और y_{t+1} के मानों को दिए हुए अंतर समीकरण $y_{t+1} - 3y_t = 4.(3)^t$ में रखने पर हम प्राप्त करते हैं :

$$c.(t+1)3^{t+1} - 3(c.t.3^t) = 4(3)^t$$

दोनों पक्षों को 3^t से भाग करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$3c\,(t+1) - 3ct = 4$$
$$\Rightarrow 3c = 4$$
$$\Rightarrow 3c = 4$$
$$\Rightarrow c = 4/3$$

$\therefore$ P.I. = $\frac{4}{3}$ t.(3)^t है।

$\therefore$ व्यापक हल $y_t = A.(3)^t + \frac{4}{3}\,t.(3)^t$ है

उदाहरण 12 $y_{t+1} + 7y_t = 2t5^t$ को हल कीजिए।

हल : यहाँ $C.F. = A(-7)^t$ होगा और हम $P.I.$ ज्ञात करने के लिए परीक्षण फलन के रूप में $y_t = (p_0 + p_1 t)5^t$ का चयन करते हैं क्योंकि $\phi(t)$ घात 1 के एक बहुपद तथा 5^t का गुणनफल है और 5, यहाँ प्राप्त संबद्ध विशिष्ट फलन का मूल नहीं है।

अब, y_t के आधार पर निर्धारित कर सकते हैं कि y_{t+1} : $y_{t+1} = [p_0 + p_1(t+1)]5^{t+1}$ होगा।

अब y_t और y_{t+1} के मानों को दिए हुए अंतर समीकरण $y_{t+1} + 7y_t = 2t5^t$ में रखने पर हम प्राप्त करते हैं : $[p_0 + p_1(t+1)]5^{t+1} + 7(p_0 + p_1 t)5^t = 2t5^t$

दोनों पक्षों को 5^t से भाग देने पर हम प्राप्त करते हैं

$$5p_0 + 5p_1 t + 5p_1 + 7p_0 + 7p_1 t = 2t$$

$$12p_0 + 5p_1 + 12p_1 t = 2t$$

समान पदों के गुणकों की तुलना करने पर हम पाते हैं

$$12\,p_0 + 5\,p_1 = 0 \quad \text{तथा} \quad 12\,p_1 = 2$$

$$\Rightarrow p_1 = \frac{1}{6} \quad \text{तथा} \quad p_0 = -\frac{5}{72}$$

∴ हमें *P.I.* $y_p = (-\frac{5}{72} + \frac{1}{6}t)5^t$ प्राप्त होता है।

अतः, व्यापक हर $y_t = A\,(-7)^t + (-\frac{5}{72} + \frac{1}{6}t)5^t$ है।

बोध प्रश्न 2

1) आप यह कैसे पहचानेंगे कि कोई दिया हुआ अंतर समीकरण घात 2 का है?

....

....

....

....

....

2) नीचे दिए एकघाती अंतर समीकरणों को हल कीजिए :

i) $y_{t+1} + 2y_t = 5$

ii) $y_{t+1} + 7y_t = 1 + t + t^2$

iii) $y_{t+1} + y_t = 7t$

iv) $y_{t+1} - 4y_t = 5(4)^t$

....

....

....

....

3) नीचे दिए द्विघाती अंतर समीकरणों को हल कीजिए :

i) $y_{t+2} - 5y_{t+1} + 6y_t = 0$

ii) $y_{t+2} + 4y_{t+1} + 4y_t = 0$

iii) $y_{t+2} - 11\,y_{t+1} + 28\,y_t = 6$

iv) $y_{t+2} - 3y_{t+1} - 40y_t = 1 + t$

v) $y_{t+2} - 6y_{t+1} + 9y_t = t + t^2$

....

....

....

15.5 अर्थशास्त्र में अनुप्रयोग (Economic Applications)

अंतर समीकरणों के अर्थशास्त्र में व्यापक अनुप्रयोग हैं। गत्यात्मक विश्लेषण में, जब समय चर t केवल असतत मान लेता है और हम एक समय-पथ ज्ञात करना चाहते हैं जबकि t के सापेक्ष एक चर y में परिवर्तन का प्रतिरूप ज्ञात है, तो अंतर समीकरण का उपयोग अत्याधिक सुविधाजनक होता है। इस खंड में हम अर्थशास्त्र में कुछ ऐसी स्थितियों पर चर्चा करेंगे जिनमें किसी दी हुई समस्या को एक अंतर समीकरण के रूप में परिवर्तित किया जा सकता है तथा इस अंतर समीकरण का हल हमें विचाराधीन समस्या का हल प्रदान करता है।

15.5.1 कॉबवेब प्रतिमान (The Cobweb Model)

आर्थिक विश्लेषण में एक ऐसी स्थिति पर विचार कीजिए जिसमें किसी वस्तु के आपूर्ति फलन तथा माँग फलन क्रमशः $Q_{st} = S(p_t) = -c + dp_{t-1}$ तथा $Q_{dt} = D(p_t) = a - bp_t$ हैं। यहाँ Q_{dt} समय t पर मांग की मात्रा है तथा Q_{st} समय t पर आपूर्ति की मात्रा है। p_t समय t पर वस्तु की कीमत को व्यक्त करता है। अचर a, b, c तथा d सभी धनात्मक हैं, b, समय t पर मांग की संवेदनशीलता को तथा d, समय $t-1$ पर आपूर्ति की संवेदनशीलता को निरूपित करता है। आपूर्ति फलन समीकरण में, उत्पादक द्वारा आपूर्ति की जाने वाली मात्रा को समय अवधि $t-1$ की कीमत के पदों में व्यक्त किया गया है। अर्थशास्त्र में ऐसी स्थितियाँ उत्पन्न होती रहती हैं। उदाहरण के लिए, कोई उत्पादक भविष्य में अपने द्वारा किए जाने वाले उत्पादन का निर्णय वस्तु की वर्तमान कीमत के आधार पर कर सकता है (अर्थात्, Q_{t+1}, p_t पर आधारित हो सकती है), या वर्तमान उत्पादन का निर्णय वस्तु की पिछली कीमत के आधार पर कर सकता है (अर्थात्, Q_t , p_{t-1} पर आधारित हो सकती है)।

मान लीजिए कि प्रत्येक समय अवधि में, कीमत का निर्धारण सदैव एक ऐसे स्तर पर होता है जहाँ वस्तु की माँग और वस्तु की आपूर्ति बराबर हो जाएं। अर्थात्,

$$Q_{st} = Q_{dt} \qquad \ldots.. (1)$$

ऊपर लिए गए समीकरणों तथा मान्यताओं से हमें एक अकेली वस्तु का बाज़ार प्रतिमान प्राप्त होता है। Q_{st} और Q_{dt} का मान समीकरण (1) में रखने पर हम प्राप्त करते हैं :

$$-c + dp_{t-1} = a - bp_t$$

$$\Rightarrow \quad bp_t + dp_{t-1} = a + c$$

इस समीकरण में t के स्थान $t+1$ पर रखने पर, हम पाते हैं कि

$$\Rightarrow \quad bp_{t+1} + dp_t = a + c$$

$$\Rightarrow \quad p_{t+1} + \frac{d}{b}p_t = \frac{a+c}{b} \qquad \ldots(\text{xv})$$

ध्यान दें कि समीकरण (xv) वास्तव में, एक घात वाला रैखिक असमघाती अंतर समीकरण ही है। अतः, हमने देखा कि किस प्रकार अर्थशास्त्र में उत्पन्न होने वाली एक स्थिति को एक अंतर समीकरण में परिवर्तित किया जा सकता है।

आइए, अब हम समीकरण (xv) को हल करें। इससे संगत समघाती अंतर समीकरण

$$p_{t+1} + \frac{d}{b}p_t = 0$$

है तथा अभिलक्ष्णिक समीकरण

$$x + \frac{d}{b} = 0$$

है जो हमें $p_{t=1}$ तथा p_{t+1} को x रखने पर प्राप्त होता है।

अभिलक्ष्णिक समीकरण का एकमात्र मूल $-\frac{d}{b}$ है।

$$\therefore C.F. = A(-\frac{d}{b})^t$$

जहाँ A एक अचर है। विशिष्ट समाकलन, $P.I.$, ज्ञात करने के लिए हम देखते है कि समीकरण (xv) में $\phi(t) = \frac{a+c}{b}$ है, जो कि एक अचर फलन है। अतः, परीक्षण फलन के तौर पर हम $p_t = k$ लेते हैं जिससे हमें $p_{t+1} = k$ प्राप्त होता है। p_t और p_{t+1} के मान (xv) में प्रतिस्थापित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$k + \frac{d}{b}k = \frac{a+c}{b}$$

$$\Rightarrow \quad k = \frac{a+c}{b+d}$$

अतः, अंतर समीकरण (xv) का व्यापक हल है :

$$p_t = A\ (-\frac{d}{b})^t + \frac{a+c}{b+d} \qquad \ldots(xvi)$$

यदि हमें कोई प्रारंभिक प्रतिबंध दिया हो, जैसे कि $t = 0$ पर मूल्य p_0 है, तो हम अचर A का मान ज्ञात कर सकते हैं। व्यापक हल के समीकरण $t = 0$ रखने पर हम प्राप्त करते हैं:

$$p_0 = A + \frac{a+c}{b+d} \qquad \Rightarrow A = p_0 - \frac{a+c}{b+d}$$

अब, समीकरण (xvi) को हम इस रूप में भी लिख सकते हैं :

$$p_t = (p_0 - \frac{a+c}{b+d})\ (-\frac{d}{b})^t + \frac{a+c}{b+d} \qquad \ldots(xvii)$$

समीकरण (xvii), जो कि अंतर समीकरण (xv) का एक हल है, p_t के लिए समय पथ को निरूपित करता है। अर्थात् t के किसी भी मान के लिए हम उसके संगत संतुलन कीमत p_t प्राप्त कर सकते हैं। इस प्रकार हमें एक प्रदोलकीय समय पथ (नियमित आगे और पीछे गति वाला पथ) प्राप्त होता है और इस प्रतिमान को कॉबवेब प्रतिमान कहते हैं। इस प्रतिमान में तीन प्रकार के प्रदोलन प्रतिरूप हैं। यदि $d > b$ हो, तो प्रतिमान **विस्फोटक** कहलाता है, यदि $d = b$ हो तो प्रतिमान **समरूप** कहलाता है और यदि $d < b$ हो तो प्रतिमान **अवमंदित** कहलाता है। इस प्रतिमान को कॉबवेब प्रतिमान कहते हैं। जब हम कीमत और मात्रा को अनुगामी अंतरालों में आरेखित करें तो माँग और पूर्ति वक्रों के आस-पास एक मकड़ी का जाल बन जाता है।

कॉबवेब प्रतिमान, अर्थशास्त्र में एक ऐसी स्थिति का उदाहरण था जो एक घात वाले अंतर समीकरण को जन्म देता है। अब हम एक ऐसी स्थिति पर विचार करते हैं जिसमें हमें एक घात-दो वाला अंतर समीकरण प्राप्त होता है।

15.5.2 सैम्युलसन गुणक त्वरण परस्पर प्रभाव प्रतिमान (Samuelson Multiplier-Accelerator Interaction Model)

इस प्रतिमान में हम मानकर चलते हैं कि राष्ट्रीय आय y_t के तीन अवयव हैं :

i) उपभोग (Consumption - C_t)

ii) निवेश (Investment - I_t)

iii) सरकारी व्यय (Government Expenditure - G_t)

किसी समय अवधि t में किए जाने वाले उपभोग (C_t) को पिछले अवधि में हुई आय y_{t-1}, के अनुपात में माना जाता है। इसी प्रकार अवधि t में किया जाने वाला निवेश (I_t), समय अवधि $t-1$ में हुए उपभोग के सापेक्ष समय अवधि में हुए उपभोग में वृद्धि के अनुपात में माना जाता है। अर्थात् I_t को $C_t - C_{t-1}$ के अनुपात में माना जाता है। इन मान्यताओं से हमें निम्नलिखित समीकरण प्राप्त होते हैं :

आय फलन $\quad y_t = C_t + I_t + G_0$

उपभोग फलन $\quad C_t = \gamma\, y_{t-1} \qquad (0 < \gamma < 1)$

निवेश फलन $\quad I_t = \alpha\,(C_t - C_{t-1}) \qquad (\alpha > 0)$

सरकारी व्यय को एक अचर G_0 के बराबर माना जाता है। अचर γ सीमांत उपभोग की प्रवृत्ति को निरूपित करता है तथा α त्वरण गुणक को निरूपित करता है।

उपभोग फलन में से C_t का मान लेकर निवेश फलन में रखने पर हम प्राप्त करते हैं,

$$I_t = \alpha\gamma(y_{t-1} - y_{t-2})$$

अब ऊपर प्राप्त I_t के मान को तथा उपभोग फलन के मान को, आय फलन (y_t) रखने पर हम प्राप्त करते हैं :

$$y_t = \gamma\, y_{t-1} + \alpha\gamma(y_{t-1} - y_{t-2}) + G_0$$

$$\Rightarrow \quad y_t - \gamma\, y_{t-1} - \alpha\gamma(y_{t-1} - y_{t-2}) = G_0$$

$$\Rightarrow \quad y_t - \gamma\,(1+\alpha)\, y_{t-1} + \alpha\gamma\, y_{t-2} = G_0$$

इस समीकरण में t के स्थान पर $t+2$ रखने पर, इसे इस प्रकार लिखा जा सकता है –

$$\Rightarrow \quad y_{t+2} - \gamma\,(1+\alpha)\, y_{t+1} + \alpha\gamma\, y_t = G_0$$

इस प्रकार हमें एक घात 2 वाला असमघाती अंतर समीकरण प्राप्त होता है जिसे सरलतापूर्वक हल किया जा सकता है।

क्योंकि $\phi(t) = G_0$ एक अचर है, विशिष्ट समाकलन $(P.I)$ ज्ञात करना सरल है। पूरक फलन $(C.F)$ ज्ञात करने में कठिनाई आ सकती है क्योंकि इस स्थिति में संबद्ध समघाती अंतर समीकरण का अभिलक्षिणक समीकरण

$$x^2 - \gamma\,(1+\alpha)\,x + \alpha\gamma = 0$$

है जो $y_t = 1,\ y_{t+1} = x$ का $y_{t+2} = x^2$ रखने पर प्राप्त होता है। इस समीकरण के मूल

$$x = \frac{\gamma\,(1+\alpha) \pm \sqrt{\gamma^2(1+\alpha)^2 - 4\alpha\gamma}}{2}$$

हैं। क्योंकि किसी द्विघात समीकरण के मूल $ax^2 + bx + c = 0$ से प्राप्त होते हैं [अर्थात् $\because x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$]।

इन मूलों की प्रकृति अचरों α और γ पर निर्भर करती है। अतः, कई प्रकार की स्थितियाँ उत्पन्न हो सकती हैं। हम इसके जटिल विवरण में नहीं जाना चाहते क्योंकि हम अपने इस दावे को पहले ही स्थापित कर चुके हैं कि आर्थिक विश्लेषण में ऐसी स्थितियाँ आती हैं जिन्हें अंतर समीकरणों के माध्यम से सुलझाया जा सकता है।

बोध प्रश्न 3

1) नीचे दिए कॉबवेब प्रतिमान की विशेष स्थितियों में से प्रत्येक के लिए अंतर समीकरण ज्ञात करें तथा उन्हें हल करें।

   i) $Q_{dt} = 18 - 3P_t,\ Q_{st} = -3 + 4P_{t-1}$

   ii) $Q_{dt} = 5 - 2P_t,\ Q_{st} = -2 + 5P_{t-1}$

   iii) $Q_{dt} = 19 - 7P_t\ \ Q_{st} = 6P_{t-1} - 4$

   ....

   ....

   ....

   जहाँ Q_{dt} मांग की मात्रा को तथा Q_{st} आपूर्ति की मात्रा और P कीमत को व्यक्त करते हैं।

2) नीचे खंड 15.5.2 में आय, उपभोग तथा निवेश फलन समीकरणों से प्राप्त किए गए सैम्युलसन गुणक त्वरण परस्पर प्रभाव प्रतिमान की कुछ विशेष स्थितियाँ दी गई हैं। इनमें से प्रत्येक के लिए अंतर समीकरण ज्ञात कीजिए तथा उन्हें हल कीजिए।

   i) $\alpha = \frac{2}{3}$ तथा $\gamma = \frac{2}{3}$ लें।

   ii) $\alpha = \frac{2}{3}$ तथा $\gamma = \frac{24}{25}$ लें।

   ....

   ....

   ....

15.6 सार-संक्षेप

यह इकाई असतत समय में होने वाली गतिशील आर्थिक प्रक्रियाओं से संबंधित थी। अगली इकाई में हम इस विषय पर और चर्चा करते हुए हम अरैखिक प्रक्रियाओं का अध्ययन करेंगे। इस इकाई का प्रारंभ हमने सतत तथा असतत प्रक्रियाओं के बीच अंतर की व्याख्या से किया। प्रथम अग्र अंतर का परिचय देने के पश्चात् हमने अंतर समीकरणों की प्रकृति की व्याख्या की तथा समघाती एवं असमघाती अंतर समीकरणों के बारे में जानकारी प्राप्त की। तत्पश्चात् हमने घात एक तथा द्विघात वाले अंतर समीकरणों के बारे में चर्चा की। हमने इस चर्चा को केवल रैखिक समीकरणों तक सीमित रखा तथा इन अंतर समीकरणों को हल करने की विधियों का विस्तृत अध्ययन किया। घात एक वाले अंतर समीकरणों का हल करने की पुनरावृत्तीय विधि तथा व्यापक विधि की विस्तार से चर्चा की गई। इसी प्रकार घात दो वाले अंतर समीकरणों को हल करने की विधियों की चर्चा की गई तथा इनसे संबंधित कई उदाहरण लिए गए। अंत में, आर्थिक प्रतिरूपण में अंतर समीकरणों के प्रयोग पर चर्चा की गई तथा कॉबवेब प्रतिमान तथा सैम्युलसन गुणक त्वरण परस्पर प्रभाव प्रतिमान का अध्ययन किया गया।

15.7 बोध प्रश्नों के उत्तर/संकेत

बोध प्रश्न 1

1) यदि अन्तर समीकरण के स्थिरांक पद अर्थात् जिस पद में y चर नहीं हो– का मान शून्य हो तो वह समीकरण **सम-घात** कहलाता है, अन्यथा **विषम-घात**।

2) i) $y_t = 6^t y_0$

ii) $y_t = y_0$

iii) $y_t = 10t + y_0$

iv) $y_t = 3^t y_0$

बोध प्रश्न 2

1) जिस अन्तर समीकरण में y_t के y_{t+2} से अधिक मान के पद नहीं हों उसे द्वितीय कोटि अन्तर समीकरण कहा जाता है।

2)

i) $y_t = A(3)^t + \frac{5}{3}$

ii) $y_t = A(-7)^t + \left[\frac{25}{256} + \frac{3}{32}t + \frac{1}{8}t^2\right]$

iii) $y_t = A(-1)^t - \frac{7}{4} + \frac{7}{2}t$

iv) $y_t = A(4)^t + \frac{5}{4}t(4)^t$

3) i) $y_t = A_1(2)^t + A_2(3)^t$

ii) $y_t = (A_1 + tA_2)(-2)^t$

ii) $y_t = A_1(4)^t + A_2(7)^t + \frac{1}{3}$

iv) $y_t = A_1(8)^t + A_2(-5)^t + \left[-\frac{41}{1764} - \frac{1}{42}t\right]$

v) $y_t = (A_1 + tA_2)(3)^t + \left[\frac{7}{8} + \frac{3}{4}t + \frac{1}{4}t^2\right]$

बोध प्रश्न 3

1)

i) $P_t = A(-\frac{4}{3})^t + 3$

ii) $P_t = A(-\frac{5}{2})^t + 1$

iii) $P_t = A(-\frac{6}{7})^t + \frac{23}{13}$

2) i) $y_t = A_1\left(\frac{14}{15}\right)^t + A_2\left(\frac{7}{10}\right)^t + 50\ G_0$

ii) $y_t = A\left(\frac{4}{5}\right)^t + 25\ G_0$