इकाई 7 सीमाएं*

संरचना

7.0 उद्देश्य

7.1 विषय-प्रवेश

7.2 किसी अनुक्रम की सीमा [Limits of a Sequence]

7.3 एक फलन की सीमा [Limit of a Function]

7.4 सीमाओं के अभिकलन की बीजगणितीय विधि [Algebraic Approach to Computation of Limits]

7.4.1 सीमा के परिकलन के नियम [Rules for Evaluating a Limit]

7.4.2 कुछ मानक सीमाएं [Some Standard Limits]

7.4.3 परिमित तथा अपरिमित सीमाएं [Finite and Infinite Limits]

7.5 सार-संक्षेप

7.6 बोध-प्रश्नों के उत्तर /संकेत

7.0 उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के पश्चात्; आप निम्नलिखित से भली-भांति अवगत हो जाएंगे :

- किसी अनुक्रम की सीमा की संकल्पना से;
- किसी फलन की सीमा की परिभाषा से;
- किसी फलन की बाएं-पक्ष तथा दाएं-पक्ष की सीमा के परिकलन की विधियों से; तथा
- सीमा ज्ञात करने की संख्यात्मक, बीजगणितीय तथा आलेखीय विधियों से।

7.1 विषय-प्रवेश

आगे आने वाली इकाइयों में आप देखेंगे कि सीमा, अवकलन गणित के लिए एक आधारभूत संकल्पना है। अवकलन गणित की कई संकल्पनाएं, जैसे कि अवकलन, समाकलन इत्यादि सीमाओं पर आधारित हैं। सीमा की मूलभूत अवधारणा को समझने के लिए औसत गति एंव तात्कालिक गति के परिकलन की विधि पर ध्यान दीजिए। मान लीजिए कि आप एक बिंदु A से बिंदु B की ओर जा रहे हैं। A से B तक अपनी औसत गति ज्ञात करने के लिए, आप मात्र बिंदुओं A और B के बीच की दूरी और इस दूरी को तय करने में लगे समय का अनुपात ज्ञात करते हैं। उदाहरण के लिए, मान लीजिए $s(t)$ एक ऐसा फलन है जो किसी गतिशील वस्तु की समय 't' की स्थिति को व्यक्त करता है। मान लीजिए समय t_0 पर, वह वस्तु बिंदु A पर A [$= s(t_0)$] है तथा समय t_1 पर (जहाँ $t_1 > t_0$ है), वह बिंदु B [$= s(t_1)$] पर है। इस प्रकार बिंदु A से बिंदु B तक पहँचने मे लगने वाला समय Δt ($= t_1 - t_0$), से व्यक्त किया जा सकता है जहाँ Δ का प्रयोग 'में होने वाला अंतर' को व्यक्त करने के लिए किया गया है। इन बिंदुओं के बीच की दूरी $s(t_1) - s(t_0)$ से प्राप्त की जा सकती है। अतः, समय अवधि $[t_0, t_1]$ में औसत गति होगी :

*श्री अनूप चटर्जी

$$\frac{s(t_1) - s(t_0)}{\Delta t} \qquad \ldots(1)$$

इसे अवधि $[t_0, t_1]$ में फलन $s(t)$ की स्थिति में हुए परिवर्तन की औसत दर के रूप मे भी समझा जा सकता है।

किसी गतिशील वस्तु की तात्कालिक गति किसी क्षण विशिष्ट में वस्तु की गति होती है। जैसे-जैसे हम समय अंतराल, Δt $(= t_1 - t_0)$ को कम और कमतर करते जाते है, वैसे–वैसे ही हम उस वस्तु की समय (क्षण) t पर गति के समीप और समीपतर आते जाते हैं, अर्थात् हमें गतिशील वस्तु की तात्कालिक गति प्राप्त होती है। यह सीधे-सीधे सीमा की संकल्पना का एक अनुप्रयोग है। ऊपर (1) में दिए फलन में, तात्कालिक गति का अर्थ होगा, फलन (1) का मान, जब Δt, 0 के समीप और समीपतर होता जाए (Δt, 0 की ओर अग्रसर होता है)(Δt को 0 के निकट के मान दिए जाते हैं) अर्थात्, समय t पर तात्कालिक गति निम्नलिखित सीमा

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_1) - s(t_0)}{\Delta t}$$

से प्राप्त होती है, यदि यह सीमा परिभाषित हो अर्थात् सीमा का अस्तित्व हो। हम इस स्थिति को पुनः निरूपित करते हैं। मान लीजिए बिंदुओं A और B के मध्य में एक बिंदु C भी है जिस पर से होकर के आपको जाना है। बिंदु C पर तात्कालिक गति ज्ञात करने के लिए, हम C से C के निकट बिंदुओं तक जाने की औसत गति परिकलित कर सकते है। इस स्थिति में इन बिंदुओं और C के बीच की दूरी बहुत कम होगी। साथ ही C से इन बिंदुओं तक पहुँचने का समय भी बहुत कम होगा। अब यदि आप इस अनुपात का मान ज्ञात करेंगे, तो यही C पर तात्कालिक गति होगी। आपके शहर में पुलिसकर्मियों के पास उपलब्ध ट्रैफिक राडार में इसी विधि द्वारा किसी वाहन की गति निर्धारित करते है।

सीमा की संकल्पना में किसी बिंदु या मान तक बिना पहुँचे , यादृच्छिक रूप से उसके समीप जाना सन्निहित होता है। सहज बोध से, यह संभव है कि यह संकल्पना बहुत महत्त्वपूर्ण प्रतीत न हो। परंतु अवकलन गणित के अध्ययन के लिए इस संकल्पना का ज्ञान अत्यंत आवश्यक है। हम पहले एक अनुक्रम की सीमा की संकल्पना की चर्चा करेंगे तथा उसके पश्चात् एक/किसी फलन की सीमा की। हम उन आधारभूत संकल्पनाओं की भी चर्चा इस इकाई में करेंगे जो किसी फलन की सीमा को समझने के लिए आवश्यक है।

7.2 किसी अनुक्रम की सीमा [Limits of a Sequence]

सीमा का विचार किसी ऐसे गतिमान बिंदु के व्यवहार से उत्पन्न होता है जो किसी नियत बिंदु की ओर अग्रसर हो रहा है अर्थात् उस के समीप और समीपतर जा रहा हो। मोटे तौर पर, जब कोई गतिमान बिंदु किसी नियत बिंदु की ओर अग्रसर होता है और उनके बीच की दूरी निरंतर/उत्तरोत्तर रूप से कम होती जाती है परंतु कभी समाप्त नहीं होती, तो हम कहते हैं कि वह बिंदु एक सीमा की ओर प्रवृत है (अग्रसर है)। आईए हम इस संकल्पना को एक अनुक्रम की सीमा के माध्यम से समझने का प्रयास करें। नीचे दिए संख्याओं के दो अनुक्रमों पर विचार कीजिए:

(i) $S_1 = \{1,2,3,4,5\ldots.\}$ (ii) $S_2 = \{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5} \ldots\}$

पहले अनुक्रम में, पहली संख्या से प्रारंभ करते हुए, आगे आने वाली प्रत्येक संख्या, पिछली संख्या में 1 जोड़ कर प्राप्त की गई है। इस प्रकार, इस अनुक्रम में उपस्थित संख्याएं लगातार बढ़ती चली जाती हैं। इनमें किसी नियत मान के समीप आने की प्रवृत्ति दृष्टिगोचर नहीं होती।

दूसरे अनुक्रम में, पहली संख्य से प्रारंभ करते हुए, आगे आने वाली प्रत्येक संख्या अंश और हर, दोनों में 1 जोड़ कर ज्ञात की गई है। इस अनुक्रम में भी यद्यपि संख्याएं बढ़ती हुई प्रतीत हो रही हैं, परंतु यह स्थिति पिछले अनुक्रम की स्थिति से भिन्न है। इस अनुक्रम की संख्याएं क्रमशः/धीरे-धीरे एक नियत संख्या 1 के समीप आ रही हैं। इसे और अधिक स्पष्ट रूप में समझने के लिए, आइए हम इस अनुक्रम की संख्याओं को दशमलव रूप में व्यक्त करें। इससे इस अनुक्रम का यह रूप हो जाता है :

$S_2 = \{0.888,\ 0.9000,\ 0.909,\ 0.916, 0.923, 0.928, 0.933, 0.937, \ldots$

यह स्पष्ट रूप से देखा जा सकता है की इसमें आने वाली प्रत्येक क्रमिक/उत्तरवर्ती संख्या, पीछे वाली संख्या की तुलना में, 1 के अधिक समीप है। पहली संख्या और 1 के मध्य का अंतर 0.5 है जबकि 999वें स्थान पर आने वाली संख्या $\frac{999}{1000}$ को देखें तो इसका 1 से अंतर मात्र 0.001 रह जाता है। इससे हम देख सकते हैं कि जैसे-जैसे हम इस अनुक्रम में अंतहीन रूप से आगे बढ़ते हैं तो आने वाली संख्याएं, उत्तरोत्तर रूप से 1 के उतना समीप आती जाएंगी, जितना हम चाहें। अर्थात् इस अनुक्रम की संख्याएं, (बिना मान 1 धारण किए भी), निरंतर रूप से 1 के समीप और समीपतर आती हुई दिखाई दे रही है। इस स्थिति में हम कहते हैं कि अनुक्रम 1 की ओर अग्रसर या प्रवृत है तथा संख्या 1 को इस अनुक्रम की सीमा कहते हैं। इस उदाहरण में अनुक्रम 1 की ओर नीचे से आता है अर्थात् 1 से कम संख्याओं की ओर से। हालाँकि कोई अनुक्रम, अपनी सीमा की ओर अन्य प्रकार से भी आ सकता है। उदाहरण के तौर पर, कोई अनुक्रम अपनी सीमा की ओर ऊपर की ओर से भी आ सकता है अर्थात् सीमा से बड़ी संख्याओं के माध्यम से। या सीमा के दोनों ओर प्रदोलित होते हुए भी सीमा पर अभिसरित (converge) हो सकता है। ध्यान देने योग्य महत्वपूर्ण बिंदु यह है कि अनुक्रम की प्रवृति एक नियत परिमित मान की ओर अग्रसर होने की होनी चाहिए।

व्यापक रूप में एक अनुक्रम

i) अनंत रूप से, समान अथवा बढ़ती हुई दर से

$S = \{0, -1, -3, -8, -15 \ldots\}$

या $S = \{1, 5, 10, 17, 26, \ldots\}$

ii) घटती हुई दर से बढ़ता हुआ (वर्धमान) या घटता हुआ (ह्रासमान) हो सकता है जैसे कि

$S = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5} \ldots\}$

या $S = \{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5} \ldots\}$

iii) बढ़ते हुए अंतर से प्रदोलित होता हुआ हो सकता है , जैसे कि

$S = \{-1, 5, -7, 17, -31 \ldots\}$

iv) कम होते हुए अंतर से प्रदोलित होता हुआ हो सकता है जैसे कि

$S = \{-1, 1, -1, 1, -1 ...\}$

v) बिना अंतर बढ़ाए या कम किए प्रदोलिता होते हुआ, जैसे कि

$S = \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16} ...\}$

ऊपर दिए हुए गुणों के आधार पर अनुक्रमों को निम्न प्रकार से वर्गीकृत किया जा सकता है :

i) अनंत की ओर (∞ या $-\infty$ की ओर) जाता हुआ

ii) किसी सीमित संख्या की ओर जाता हुआ, जो कि धनात्मक, ऋणात्मक अथवा शून्य हो सकती है

iii) कहीं न जाता हुआ (किसी मान की ओर न जाता हुआ)

ऊपर की गई टिप्पणियाँ हमें किसी अनुक्रम की सीमा की व्याख्या करने में सहायता करेंगी।

मान लीजिए $\{x_n\}_{n\geq 1}$ संख्याओं का एक अनुक्रम है। यदि ये संख्याएं किसी संख्या L के समीप और समीपतर होती जाएं (अर्थात् $x_n \approx L$ हो) तो हम कहते हैं कि अनुक्रम $\{x_n\}$ एक अभिसारी अनुक्रम है तथा इसकी सीमा L है।

इसे हम इस प्रकार व्यक्त कर सकते है :

$$\lim_{n\to\infty} x_n = L$$

या, $$\underset{n\to\infty}{Lt}\, x_n = L$$

या, $$x_n \to L \text{ when } n \to \infty.$$

जब हम $n \to \infty$ लिखतें है तो इससे हमारा आशय होता है कि n निरंतर बड़ा होता जा रहा है। यदि कोई अनुक्रम अभिसारी न हो तो उसे अपसारी अनुक्रम कहते हैं।

अब हम किसी अनुक्रम की सीमा की औपचारिक परिभाषा देते हैं। हमने ऊपर देखा कि कोई अनुक्रम $\{x_n\}_{n\geq 1}$ अभिसारी होता है यदि एक ऐसी संख्या L प्राप्त हो सके कि जैसे–जैसे n का मान बढ़ाया जाए संख्याएं x_n, L के समीप और समीपतर होती जाएं।

अर्थात्

i) हम चाहते हैं कि $x_n \approx L$ हो

ii) हम यह सुनिश्चित करना चाहते हैं कि $|x_n - L| < \varepsilon$ हो, जहाँ ε, 0 से बड़ी कोई बहुत ही छोटी संख्या है।

iii) कथन (ii) तब सही होगा जब हम एक ऐसा पूर्णांक $N \geq 1$ प्राप्त हो सके कि प्रत्येक $n \geq N$ के लिए $|x_n - L| < \varepsilon$ हो।

ध्यान दें कि ε ग्रीक वर्णमाला का एक अक्षर है जिसे 'एपसाइलन' कहते हैं। यह एक यादृच्छिक छोटी धनात्मक राशि को निरूपित करता है। यह x_n और L की बीच के

अंतर पर प्रतिबंध लगाता है। दूसरी ओर पूर्णांक N हमें यह बताता है कि अनुक्रम कितनी तेज़ी से सीमा की ओर अग्रसर होता है।

अतः, हम कह सकते हैं कि अनुक्रम $\{x_n\}_{n\geq 1}$ संख्या L की ओर अभिसरित होता है, यदि और केवल यदि, प्रत्येक $\varepsilon > 0$ के लिए, एक संख्या $N \geq 1$ प्राप्त हो जाएं कि प्रत्येक $n \geq N$ के लिए, $|x_n - L| < \varepsilon$ हो।

7.3 एक फलन की सीमा [Limit of a Function]

अब हम अनुक्रम की सीमा की संकल्पना का विस्तार किसी फलन की सीमा ज्ञात करने के लिए कर सकते है। आईए हम एक स्वतंत्र चर वाले फलन $y = f(x)$ पर विचार करें। हमारी रूचि यह जानने में है कि यदि, $x \to a$ अर्थात् किसी संख्या 'a' की ओर जाता है (बिना इस मान तक पहुँचे हुए) तो क्या y किसी परिमित मान 'b' की ओर जाता है अर्थात् क्या $y \to b$ होता है? यदि ऐसा होता है तो हम कहते हैं कि जब x, a की ओर जाता है तो y की सीमा b होगी। ध्यान दें कि इस परिभाषा में a का एक परिमित संख्या होना आवश्यक नहीं है)

इसे हम सांकेतिक रूप में इस प्रकार व्यक्त कर सकते हैं :

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

अतः, सीमा L वह मान होता है जिसकी ओर फलन $f(x)$ प्रवृत होता है (अर्थात् $f(x) \to L$) जबकि x, a की ओर जा रहा हो। इसे सांकेतिक रूप में $\lim_{x \to a} f(x) = L$ से व्यक्त किया जा सकता है।

बाएं एवं दाएं पक्ष की सीमाएं

x किसी संख्या की ओर 2 प्रकार से जा सकता है :

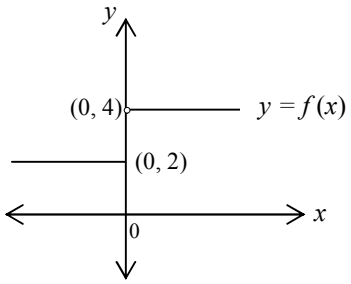
a से छोटे मानों की ओर से अर्थात् a के बाई ओर से या a से बड़े मानों की ओर से अर्थात् a के दाई ओर से।

जब x दाएं पक्ष की ओर से a के समीप/निकट आता है और y एक परिमित मान, [मान लीजिए L] की ओर आता है तो हम L_1 को $f(x)$ की दाएं पक्ष की सीमा कहते है और इसे $\lim_{x \to a^+} f(x)$ से व्यक्त करते हैं।

इसी प्रकार जब x बाएं पक्ष की ओर से एक परिमित संख्या L_2 के समीप/निकट आता है तो हम L_2 को $f(x)$ की बाएं पक्ष की सीमा कहते हैं और इसे $\lim_{x \to a^-} f(x)$ द्वारा व्यक्त करते हैं।

उदाहरण के लिए, रेखाचित्र 7.1 में दिए एक फलन $f(x)$ के आलेख पर विचार कीजिए जहाँ

$$f(x) = \begin{cases} 2, & x \leq 0 \\ 4, & x > 0 \end{cases}$$ है



रेखाचित्र 7.1

यहाँ यह स्पष्ट रूप से देखा जा सकता है कि जब x बाई ओर से 0 के निकट आता है तो $y \to 2$ हो जाता है। अतः, y के बाएं पक्ष की सीमा 2 है

अर्थात् $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 2$ दूसरी ओर, यदि x दाई ओर से 0 की ओर जाता है तो $y \to 4$ हो जाता है अतः, हम पाते हैं कि y की दाएं पक्ष की सीमा 4 है अर्थात् $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 4$ है।

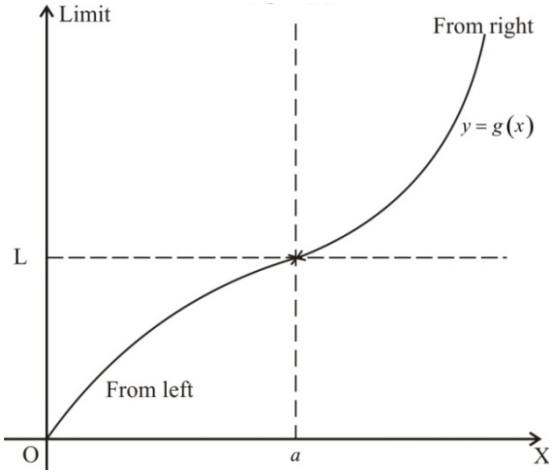
हमने अभी देखा कि यदि y की एक सीमा है जबकि x, a की ओर जाता है तो यह सीमा प्राप्त की जा सकती है जब x, a की ओर या तो बाएं पक्ष की ओर से जाएं या दाएं पक्ष की ओर से। अब एक महत्वपूर्ण प्रश्न उठता है। क्या किसी दिए हुए फलन की सीमा है अथवा नहीं। इस प्रश्न का उत्तर इस प्रकार है:

1) एक दिए हुए फलन की सीमा होती है यदि और केवल यदि दोनों सीमाएं (दाएं पक्ष की तथा बाएं पक्ष की) एक समान हो और उनका मान एक परिमित संख्या हो अर्थात् दोनों सीमाओं का अस्तित्व हो और वे एक दूसरे के समान हों।

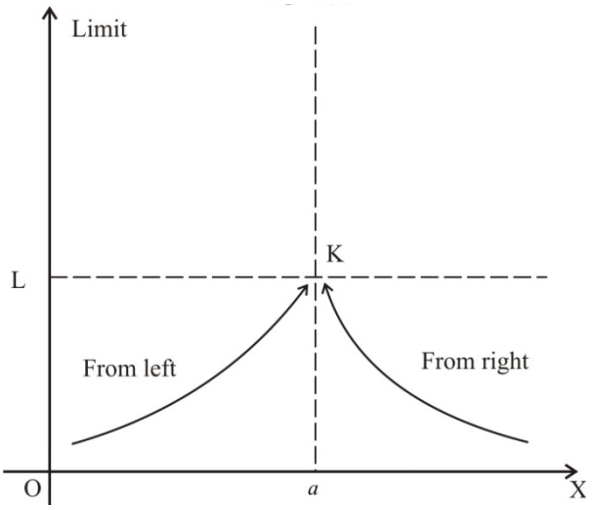
2) जब प्रत्येक सीमा (दाएं पक्ष की सीमा तथा बाएं पक्ष की सीमा) या तो $[+\infty]$ हो या $[-\infty]$ इस स्थिति में हम कहते हैं कि फलन की सीमा अनंत होती है।

टिप्पणी : हम सामान्यतः केवल परिमित सीमा पर ही विचार करते हैं। यदि सीमा $-\infty$ या ∞ के ओर अग्रसर हो हम केवल एक पक्ष पर ही विचार करते हैं, इससे समय की बचत होती है। अतः, किसी फलन $y=f(x)$ की सीमा का अस्तित्व, जब x, a की ओर जाता है तभी होता है यदि $\lim_{x\to a^+} y = \lim_{x\to a^-} y = L$ (जहाँ L कोई परिमित संख्या है)

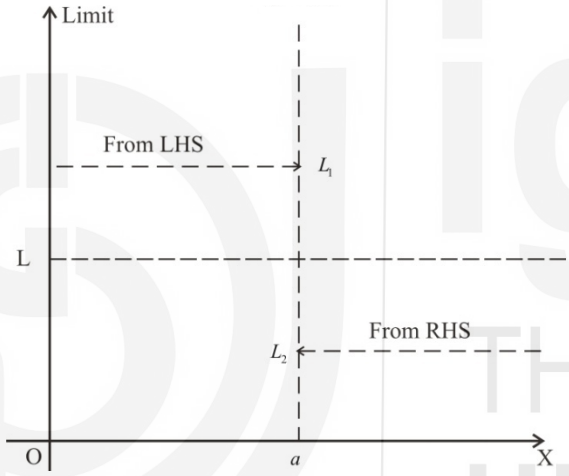
आईए नीचे दिए रेखाचित्रों 7.2, a, b, c, d में x के a के समीप जाने की विभिन्न परिस्थितियों पर विचार करें।



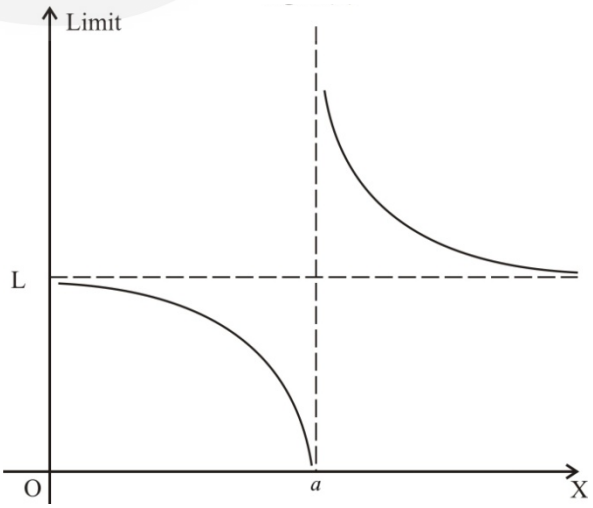
रेखाचित्र 7.2 (*a*)



रेखाचित्र 7.2 (*b*)



रेखाचित्र 7.2 (*c*)



रेखाचित्र 7.2 (*d*)

इस रेखाचित्र के भाग (*a*) में फलन *y=f(x)* को निरूपित करने वाला एक निष्कोण वक्र दर्शाया गया है। जैसे-जैसे चर x क्षैतिज अक्ष पर किसी भी ओर से मान a के समीप आता है, तो चर y ऊर्ध्वाधर अक्ष पर L के समीप आता है। अतः, इस फलन की बाएं पक्ष की तथा दाएं पक्ष की, दोनों सीमाएं अस्तित्व रखती हैं तथा एक दूसरे के बराबर है। अतः इस स्थिति में, जब x, a की ओर जाता है तो y की सीमा अस्तित्व रखती है तथा इसका मान L है।

भाग (*b*) में दर्शाया गया वक्र निष्कोण नहीं है। इसमें x-अक्ष पर स्थित बिंदु a के ठीक ऊपर बिंदु x पर वक्र नुकीला है। परंतु फिर भी इस स्थिति में भी x के a के समीप आने पर y का मान L के समीप जाता है। अतः, जब x, a के समीप आता है तो y की सीमा का अस्तित्व होता है तथा उसका मान L के बराबर है।

भाग (c) में एक सोपान फलन दर्शाया गया है। यहाँ हम देख सकते हैं कि यदि x बाई ओर से a के समीप आता है तो y, L_1 के समीप आता अर्थात् y की (बाएं पक्ष की) सीमा L_1 है और यदि x दाई ओर से a के समीप आता है तो y, L_2 के समीप आता है अर्थात् y की (दाएं पक्ष की) सीमा L_2 है। इस स्थिति में यद्यपि y की (जब $x \to a$ है) दाएं और बाएं पक्ष की दोनों सीमाओं का अस्तित्व है परंतु वे समान नहीं हैं। अतः, परिभाषा के अनुसार जब $x \to a$ है तो y की सीमा का अस्तित्व नहीं है। अंत में, भाग (*d*) में एक समकोणीय अतिपरवलय दर्शाया गया है यहाँ जैसे–जैसे x बाई ओर से a के समीप आता है, तो y, $-\infty$ की ओर जाता है। दूसरी ओर यदि x दाई ओर से a के समीप आता है, तो y, $+\infty$ की ओर जाता है।

इस स्थिति में बाएं पक्ष की तथा दाएं पक्ष की सीमाओं से कोई भी सीमा अस्तित्व नहीं रखती। अतः, जब x, a के समीप आता है तो y की सीमा का अस्तित्व नहीं है।

7.4 सीमाओं के परिकलन की बीजगणितीय विधि [Algebraic Approach to Computation of Limits]

हमने सीमा की संकल्पना का अध्ययन किया है। अब हम कुछ नियमों का प्रयोग करके किसी फलन की सीमा के परिकलन की वास्तविक प्रक्रिया के बारे में जानेंगे।

7.4.1 सीमा के परिकलन के नियम [Rules for Evaluating a Limit]

सीमाएं बीजगणित के सामान्य नियम जैसे योग, व्यवकलन, गुणा तथा भाग इत्यादि का पालन करती हैं। आईए, दो फलनों $y = f(x)$ और $y = g(x)$ के लिए नीचे दिए नियमों पर विचार करें जबकि हमें ज्ञात है कि $\underset{x \to a}{Lt}\ f(x) \to L_1$ और $\underset{x \to a}{Lt}\ g(x) \to L_2$ है।

1) एक अचर फलन *f(x)=c* की सीमा अचर होती है

$$\underset{x \to a}{Lt}\ c = c$$

2) दो फलनों के योग/अंतर की सीमा, उनकी सीमाओं के योग/अंतर के बराबर होती है।

$$\underset{x \to a}{Lt}\{f(x) \pm g(x)\} = \underset{x \to a}{Lt}\ f(x) \pm \underset{x \to a}{Lt}\ g(x) = L_1 \pm L_2$$

अतः, एक अचर तथा एक फलन के योग की सीमा उनकी सीमाओं के योग के बराबर होती है

$$\underset{x\to a}{Lt}\{c+f(x)\}=\underset{x\to a}{Lt}\,c+\underset{x\to a}{Lt}\,f(x)=c+L_1$$

3) दो फलनों के गुणनफल की सीमा, उनकी सीमाओं के गुणनफल के बराबर होती है।

$$\underset{x\to a}{Lt}\{f(x)\cdot g(x)\}=\underset{x\to a}{Lt}\,f(x)\times\underset{x\to a}{Lt}\,g(x)=L_1\times L_2$$

4) दो फलनों के भागफल की सीमा, उनकी सीमाओं के भागफल के बराबर होती है, यदि हर में उपस्थित फलन की सीमा शून्य न हो।

$$\underset{x\to a}{Lt}\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}=\frac{\underset{x\to a}{Lt}\,f(x)}{\underset{x\to a}{Lt}\,g(x)}=\frac{L_1}{L_2}$$ यदि $L_2\neq 0$ हो।

5) किसी फलन के विलोम की सीमा, फलन की सीमा के विलोम के बराबर होती है, यदि फलन की सीमा शून्य न हो।

$$\underset{x\to a}{Lt}\left\{\frac{1}{g(x)}\right\}=\frac{1}{\underset{x\to a}{Lt}\,g(x)}=\frac{1}{L_1}$$ यदि $L_1\neq 0$ हो।

6) किसी फलन के वर्गमूल को n से गुणा करने पर प्राप्त होने वाले फलन की सीमा, फलन की सीमा के वर्गमूल को n से गुणा कर के प्राप्त की जा सकती है, यदि फलन की सीमा शून्य या शून्य से अधिक हो।

$$\underset{x\to a}{Lt}\,n\sqrt{f(x)}=n\cdot\underset{x\to a}{Lt}\sqrt{f(x)}=n\sqrt{L_1}$$ यदि $L\geq 0$ हो।

7.4.2 कुछ मानक सीमाएं [Some Standard Limits]

नीचे कुछ महत्वपूर्ण सीमाएं दी जा रही हैं जो आपको इस पाठ्यक्रम के अध्ययन में सहायता करेंगी, अतः इन्हें ठीक प्रकार से सीख लें। इनकी उपपत्ति इस पाठ्यक्रम के विषय–क्षेत्र से बाहर है।

1) $$\underset{x\to a}{Lt}\left[\frac{x^n-a^n}{x-a}\right]=na^{n-1},a>0$$

2) $$\underset{x\to\infty}{Lt}\left[1+\frac{1}{x}\right]^x=e=2.71828$$

3) $$\underset{x\to 0}{Lt}\left[1+x\right]^{1/x}=e=2.71828$$

4) $$Lt_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\log_e a,\ a>0$$

5) $$Lt_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\log_e e=1$$

[**टिप्पणी:** $\log_e a$ को l_{na} भी लिखा जाता है]

7.4.3 परिमित तथा अपरिमित सीमाएं [Finite and Infinite Limits]

ऐसी सीमाएं जिनका मान एक परिमित संख्या हो, परिमित सीमाएं कहलाती हैं। उदाहरण के लिए, $\underset{x\to 2}{Lt}(5x+7)=17$ जहाँ 17 एक सीमित संख्या है। इसी प्रकार, ऐसी सीमाएं जिनका मान एक परिमित संख्या न होकर, $+\infty$ या $-\infty$ हो, अनंत सीमाएं कहलाती हैं। उदाहरण के लिए, $\underset{x\to 0}{Lt}\left(\frac{5}{x^2}\right)=\frac{5}{(0)^2}=\frac{5}{0}=\infty$

उदाहरण 1 : यदि $y=x^2+1$ है, तो $\lim_{x\to 0} y$ ज्ञात कीजिए।

हल : बाएं पक्ष की सीमा ज्ञात करने के लिए, आईए हम एक–एक करके दिए हुए फलन में x के स्थान पर ऋणात्मक संख्याएं $-1,-\frac{1}{2},-\frac{1}{3},-\frac{1}{4}\ldots$ रखें। हम पाते है कि x^2 (जो कि एक धनात्मक संख्या है) का मान कम और कमतर होता जाता है और 0 की ओर जाता है। परिणामस्वरूप, x^2+1 का मान निरंतर कम होता है और 1 की ओर जाता है। अतः, फलन $y=x^2+1$ की बाएं पक्ष की सीमा 1 है। इसी प्रकार x के स्थान पर धनात्मक संख्याएं $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4}\ldots$ रखने पर हम पाते है कि x^2, 0 की ओर जाता है। परिणामस्वरूप x^2+1 का मान निरंतर कम होते हुए, संख्या 1 की ओर जाता है। अतः, फलन $y=x^2+1$ की दाएं पक्ष की सीमा भी 1 है। इस प्रकार हम पाते हैं कि $y=x^2+1$की दोनों पक्षों की सीमाएं समान हैं। अतः, इस फलन की सीमा अस्तित्व रखती है और 1 के बराबर है। हम इसे इस प्रकार व्यक्त कर सकते हैं : $\underset{x\to 0}{Lim}\ y=1$

उदाहरण 2 : $\underset{x\to 3}{Lim}\ \frac{x^3-2x^2+2x-6}{5x^2-13x+3}$ ज्ञात कीजिए।

हल : हम इस सीमा को ज्ञात करने के लिए सीमाओं से संबंधित विभिन्न नियमों का उपयोग करेंगे।

$$\underset{x\to 3}{Lim}\ \frac{x^3-2x^2+2x-6}{5x^2-13x+3}$$

$$=\frac{\underset{x\to 3}{Lim}\left(x^3-2x^2+2x-6\right)}{\underset{x\to 3}{Lim}\left(5x^2-13x+3\right)}$$

$$=\frac{\underset{x\to 3}{Lim}\left(x^3\right)-\underset{x\to 3}{Lim}\left(2x^2\right)+\underset{x\to 3}{Lim}\ (2x)-\underset{x\to 3}{Lim}\ (6)}{\underset{x\to 3}{Lim}\left(5x^2\right)-\underset{x\to 3}{Lim}\ (13x)+\underset{x\to 3}{Lim}\ (3)}$$

$$=\frac{\underset{x\to 3}{Lim}\ x^3-2\ \underset{x\to 3}{Lim}\ x^2+2\ \underset{x\to 3}{Lim}\ x-\underset{x\to 3}{Lim}\ 6}{5\ \underset{x\to 3}{Lim}\ x^2-13\ \underset{x\to 3}{Lim}\ x+\underset{x\to 3}{Lim}\ 3}$$

$$=\frac{27-2(9)+2(3)-6}{5(9)-13(3)+3}$$

$$=1$$

उदाहरण 3 : एक व्यक्ति ने 1000 रू. का निवेश 5 प्रतिशत चक्रवृद्धि ब्याज की वार्षिक दर से 2 वर्ष के लिए किया। यदि ब्याज सतत रूप से लगाया जा रहा हो, तो ज्ञात कीजिए कि उस व्यक्ति को दो वर्ष पश्चात् कितनी राशि प्राप्त होगी? इस निवेश की प्रभावी ब्याज दर क्या होगी?

हल : इस प्रश्न को हल करने के लिए, हम पहले चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात करने के सूत्र के बारे में चर्चा करते हैं। हम जानते हैं कि यदि राशि P का निवेश 1 वर्ष के लिए चक्रवृद्धि ब्याज पर $100r\%$ की वार्षिक दर से किया गया है, तो 1 वर्ष के पश्चात् प्राप्त होने वाली कुल राशि A होगी $A = P(1+r)$ यदि ब्याज की यही दर वर्ष में m बार व्यवकलित/संयोजित की जाती है, तो 1वर्ष पश्चात् प्राप्त होने वाली राशि होगी, $A = P\left(1+\frac{r}{m}\right)^m$ यहाँ व्यंजक $\frac{r}{m}$ यह दर्शाता है कि यदि ब्याज की वार्षिक दर $100r\%$ है तो प्रत्येक संयोजन अवधि में ब्याज की दर $\frac{100r}{m}\%$ लागू होगी। सूत्र में उपस्थित घातांक m यह दर्शाता है कि ब्याज एक वर्ष में m बार संयोजित होता है। अब, इसी वार्षिक संयोजन बारंबारता m के लिए, t वर्ष के पश्चात् प्राप्त होने वाली राशि A होगी, $A = P\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mt}$ जहाँ घातांक mt, t वर्षों में होने वाले संयोजनों की संख्या को व्यक्त करता है। हम इसे, इस प्रकार भी व्यक्त कर सकते है :

$$A = P\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mt} = P\left[\left(1+\frac{r}{m}\right)^{m/r}\right]^{rt} = P\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]^{rt}$$

जहाँ $n = \frac{m}{r}$ है। यह स्पष्ट रूप से देखा जा सकता है कि जब $m \to \infty$ हो तो n भी ∞ की ओर जाएगा।

दिए हुए प्रश्न में ब्याज सतत रूप से संयोजित होता है। परिणामस्वरूप, समांजन बारंबरता

अनन्त की ओर जाती है। अतः, अपेक्षित राशि $m \to \infty$ के लिए, $P\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mt}$ की सीमा होगी।

यह सीमा है

$$A = \lim_{m\to\infty} P\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mt} = \lim_{m\to\infty} P\left[\left(1+\frac{r}{m}\right)^{m/r}\right]^{rt} = \lim_{n\to\infty} P\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]^{rt}$$

जब $n \to \infty$ तो $P[(1+\frac{1}{n})^n]^{rt}$ की सीमा $n \to \infty$ के लिए $(1+\frac{1}{n})^n$ की सीमा पर निर्भर करती है।

अर्थात्

$$\lim_{n\to\infty} P\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]^{rt} = P\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]^{rt}$$

हम जानते हैं कि $\underset{n\to\infty}{Lim}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ होती है। अतः

$A = P\left[\underset{n\to\infty}{Lim}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{rt} = Pe^{rt}$ होगा।

हमें दिया है कि P = 1000रू, r = ब्याज की दर प्रतिशत / 100

$$= \frac{5}{100} = 0.05$$

तथा $t =$ 2 वर्ष है। इसलिए,

$A = 1000\ (e^{0.05(2)}) = 1000\ (2.71828)^{0.1}$ होगा।

[क्योंकि $e = 2.71828\ldots$ होता है]

दोनों पक्षों का लघुगणक (log) लेने पर हम पाते है कि

$\log A = \log 1000 + 0.1 \times \log 2.71828$

$= 3 + 0.1 \times 0.4343$

$= 3.04343$

दोनों पक्षों का प्रतिलघुगणक लेने पर हम पाते हैं कि

A = antilog 3.04343

= 1105 (लगभग)

अतः, अपेक्षित राशि 1105रू के बराबर होगी।

किसी निवेश पर प्रस्तावित / उद्धृत वार्षिक ब्याज दर को सांकेतिक दर (*nominal rate*) कहते हैं। वार्षिक ब्याज दर को सांकेतिक दर कहते हैं। वार्षिक ब्याज दर, जिस पर कोई दी हुई धन राशि वास्तविक रूप से बढ़ती है, इस पर निर्भर होती है कि ब्याज वर्ष भर में कितनी बार संयोजित किया जाता है। इस दर को ब्याज की प्रभावी या वास्तविक दर कहते हैं। अतः, ब्याज की प्रभावी / वास्तविक दर किसी सांकेतिक / प्रस्तावित ब्याज दर को वर्ष में दी हुई संख्या के बराबर, मान लीजिए m बार, संयोजित करने पर प्राप्त समतुल्य वार्षिक चक्रवृद्धि ब्याज के बराबर होती है। संतत चक्रवृद्धि ब्याज अब, यदि राशि P का t वर्ष तक 100 $r\%$ की दर से निवेश करने पर, राशि A प्राप्त होती है, तो हम पाते हैं कि यह होगी

$$A = Pe^{rt} \tag{1}$$

यदि प्रभावी / वास्तविक ब्याज दर 100 $i\%$ है, तो हम इसे इस प्रकार लिख सकते हैं

$$A = P(1+i)^t \tag{2}$$

समीकरणों (1) और (2) से हम पाते हैं कि

$$(1+i)^t = e^{rt}$$

या $$1+i = e^r \tag{3}$$

समीकरण (2) को हल करके हम प्रभावी ब्याज दर 100 $i\%$ ज्ञात कर सकते है।

हमें $r = 0.05$ दिया है इस मान को (3) में रखने पर, हमें प्राप्त होता है

$$1 + i = e^{0.05}$$

दोनों पक्षों का लघुगणक / log लेने पर

$$\log(1+i) = 0.05 \times \log 2.71828$$

$$= 0.021715$$

दोनों पक्षों का antilog / प्रतिलघुगणक लेने पर

$$1 + i = \text{antilog}(0.021715)$$

$$\text{or } 1 + i = 1.052$$

$$\text{or } i = 0.052$$

अतः ब्याज प्रभावी दर 5.2% है।

बोध प्रश्न 1

1) निम्नलिखित सीमाओं का मान ज्ञात कीजिए :

a) $\underset{x \to -2}{Lt} \left(x^2 + 5x\right)$

b) $\underset{x \to 0}{Lt} \left[\frac{3x+1}{5x-1}\right]$

c) $\underset{x \to 4}{Lt} \left[\frac{2x^{3/2} - \sqrt{x}}{x^2 - 15}\right]$

d) $\underset{x \to a}{Lt}\ Ax^n$

e) $\underset{x \to 1}{Lim}\ \frac{4x^2 - 3}{2x^2 + 1}$

f) $lim_{x \to -1} \frac{x^2+x-6}{x+2}$

.....

.....

.....

.....

.....

2) एक फर्म के उत्पादन की कुल लागत फलन $C = 4q + 2$ से व्यक्त की जा सकती है। क्या इस फर्म की औसत लागत किसी परिमित मान की ओर जाएगी यदि उत्पाद ∞ की ओर जाए? यदि हाँ, तो वह मान ज्ञात कीजिए।

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3) एक व्यापारी ने किसी साहूकार से कुछ धनराशि उधार ली। उसने साहूकार को 4 वर्ष पश्चात् 5000रू लौटाने का वादा किया है। यदि ब्याज 10% वार्षिक चक्रवृद्धि ब्याज की दर से सतत रूप से संयोजित होता है तो ज्ञात कीजिए कि व्यापारी ने कितनी धनराशि उधार ली? यह भी ज्ञात कीजिए कि व्यापारी द्वारा दिए गए ब्याज की प्रभावी दर क्या होगी?

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ऊपर की गई चर्चा में हमने L (फलन की सीमा) को एक परिमित संख्या माना है। परंतु यह अनंत भी हो सकती है।

यदि किसी स्थिति में किसी फलन $f(x)$ के लिए $\lim_{x \to N} f(x) = \infty$ या $-\infty$ हो, तो इस फलन के लिए सीमा के वास्तविक अर्थ में फलन की सीमा का अस्तित्व नहीं होता। जैसा कि आप देख सकते हैं कि $f(x) \to \infty$ का अर्थ है कि फलन का मान निरंतर बढ़ता जाएगा, अतः इसकी सीमा नहीं होगी। साथ ही, यदि x का मान अनंत (∞ या $-\infty$) की ओर जाए, तो ऊपर दी गई बाएं पक्ष तथा दाएं पक्ष की सीमाएं भी अर्थहीन हो जाती हैं और हम केवल एक ही पक्ष की सीमा ज्ञात कर सकते हैं। उदाहरण के लिए यदि हम फलन $f(x)$ की सीमा ज्ञात करना चाहते हो जब $x \to -\infty$ की ओर जाए, तो $f(x)$ की केवल दाएं पक्ष की सीमा ही प्रासंगिक होगी। इसी प्रकार यदि हम फलन $f(x)$ की सीमा $x \to +\infty$ के लिए ज्ञात करना चाहते हैं तो केवल बाएं पक्ष की सीमा ही प्रासंगिक होगी। इससे पहले की हम फलनों की सीमा ज्ञात करने के कुछ उदाहरण लें, इस ओर ध्यान देना उपयोगी होगा कि जब हम किसी सीमा का अनुमान लगाते हैं जबकि $x \to N$ हो अर्थात् x, N की ओर जाता हो, तो हमारी रूचि उन मानों में होती है जो N के निकट हों, $x = N$ पर नहीं। यदि हम फलन $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ पर विचार करें तो हम पाएंगे कि इस फलन का मान $x = 1$ पर ज्ञात नहीं किया जा सकता क्योंकि, $x = 1$ पर इसका हर 0 हो जाता है। परंतु इस फलन का मान $x = 1$ के अतिरिक्त प्रत्येक बिन्दु के लिए ज्ञात किया जा सकता है। इसलिए इस फलन के लिए हमारे समक्ष प्रश्न यह है कि यदि $x \to 1$ हो, इस फलन की सीमा क्या होगी? ध्यान दें कि $x \to 1$ का अर्थ होता है कि x,1 की ओर जा रहा है, $x = 1$ नहीं। हम इस फलन की

सीमा आगे आने वाले उदाहरणों में ज्ञात करेंगे। पाठक ध्यान दें कि जिस संख्या पर हम फलन की सीमा ज्ञात करना चाहते हैं, उस संख्या को फलन में प्रतिस्थापित कर देना ही सीमा ज्ञात करने की उचित विधि नहीं है। हमें फलनों की सीमा ज्ञात करते हुए इसका ध्यान रखना चाहिए।

आईए अब हम सीमाओं के संदर्भ में कुछ विशिष्ट स्थितियों पर एक नज़र डालें जिनमें सीमा या तो 0 है या/अथवा अनिर्धार्य है तथा व्यापक रूप में कोई निष्कर्ष निकालना संभव नहीं है।

1) जब $Lt\, f(x) = A, Lt\, g(x) = \infty$ हो, तो $Lt\, f(x) + Lt\, g(x) = A + \infty = \infty$ होगी। (अनंत सीमा, ∞)

2) जब $Lt\, f(x) = A, Lt\, g(x) = +\infty$ हो, तो $Lt\, f(x) - Lt\, g(x) = A - \infty = -\infty$ होगी। (अनंत सीमा, $-\infty$)

3) जब $Lt\, f(x) = \infty, Lt\, g(x) = \infty$ हो, तो $Lt\, f(x) + Lt\, g(x) = \infty + \infty = \infty$ होगी। (अनंत सीमा, ∞)

4) जब $Lt\, f(x) = \infty, Lt\, g(x) = +\infty$ हो, तो $Lt\, f(x) - Lt\, g(x) = \infty - \infty$ होगी।

5) जब $Lt\, f(x) = A, Lt\, g(x) = 0$ हो, तो $\frac{Lt\, f(x)}{Lt\, g(x)} = \frac{A}{0} = \infty$ होगी। (अनंत सीमा, ∞)

6) जब $Lt\, f(x) = 0, Lt\, g(x) = 0$ हो, तो $\frac{Lt\, f(x)}{Lt\, g(x)} = \frac{0}{0}$ होगी। (यह एक अनिर्धार्य स्थिति है तथा कोई निष्कर्ष निकालना संभव नहीं है)

7) जब $Lt\, f(x) = A,\ Lt\, g(x) = \infty$ हो, तो $\frac{Lt\, f(x)}{Lt\, g(x)} = \frac{\infty}{\infty}$ होगी। (यह एक अनिर्धार्य स्थिति है तथा कोई निष्कर्ष निकालना संभव नहीं है)

8) जब $Lt\, f(x) = \infty,\ Lt\, g(x) = \infty$ हो, तो $\frac{Lt\, f(x)}{Lt\, g(x)} = \frac{\infty}{\infty}$ होगी। (यह एक अनिर्धार्य स्थिति है तथा कोई निष्कर्ष निकालना संभव नहीं है)

9) जब $Lt\ f(x) = A, Lt\ g(x) = \infty$ हो, तो $Lt\ f(x) \times Lt\ g(x) = A \times \infty = \infty$ होगी। (अनंत सीमा, ∞)

10) जब $Lt\ f(x) = \infty, Lt\ g(x) = \infty$ हो, तो $Lt\ f(x) \times Lt\ g(x) = \infty \times \infty = \infty$ होगी। (अनंत सीमा, ∞)

अनिर्धार्य सीमाओं को ज्ञात करने की कुछ विधियाँ

सीमाओं के परिकलन में निम्नलिखित विधियाँ उपयोगी सिद्ध होती हैं :

i) गुणनखंडन

ii) परिमेयीकरण

iii) सरलीकरण

iv) अन्य विधियाँ

इन विधियों से हम विभिन्न अनिर्धार्य सीमाओं के मान ज्ञात कर सकते हैं जैसे कि

i) $0 \times \infty$

ii) $\frac{0}{0}$

iii) $\frac{\infty}{\infty}$

iv) $\infty - \infty$

v) $|0| + |\infty|$

आईए अब हम सीमाओं के कुछ उदाहरण ले :

उदाहरण 4 : $\lim_{x\to 1} f(x)$ ज्ञात कीजिए, जहाँ $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ है।

हल : हम देख सकते हैं कि यह फलन $x = 1$ के लिए परिभाषित नहीं है। अतः हम पहले इस फलन को सरलीकृत कर लेते हैं :

$$f(x) = \frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)} = (x+1)$$

अब $\lim_{x\to 1}(x+1)$ ज्ञात करने के लिए हम इस फलन $x+1$ में x के स्थान पर $x = 1$ रख सकते हैं। इस प्रकार हम प्राप्त करते है कि अभीष्ट सीमा $(1+1) = 2$ है।

उदाहरण 5 : $\lim_{x\to\infty} f(x)$ ज्ञात कीजिए जहाँ $f(x) = \frac{x}{1+x}$ है।

हल : यदि हम $f(x) = \frac{x}{1+x}$. में x के स्थान पर ∞ रखें तो यह फलन $\frac{\infty}{\infty}$ बन जाता है जो कि अनिर्धार्य है। अतः हम इसका सरलीकरण करते हैं। यदि हम अंश और हर दोनों को x से भाग करें तो हम पाते हैं कि $f(x) = \frac{x}{x+1} = \frac{1}{(1/x)+1}$ है। इसमें x को ∞ रखने पर, हम प्राप्त करते हैं कि

$$f(x) = \frac{1}{(1/\infty)+1} = \frac{1}{(0+1)} = \frac{1}{1} = 1$$

अतः, $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{1+x} = 1$

उदाहरण 6 : $\lim_{x\to\infty} f(x)$ ज्ञात कीजिए, जहाँ $f(x) = \frac{1+2x}{1+3x}$ है।

हल : हम देख सकते हैं कि यदि इस फलन में x के स्थान पर ∞ रखा जाएं तो हमें $\frac{\infty}{\infty}$ प्राप्त होता है जो कि अनिर्धार्य है। अतः हम इस फलन को सरल करते हैं।

$f(x) = \frac{1+2x}{1+3x} = \left(\frac{1}{x}+2\right) \div \left(\frac{1}{x}+3\right)$ (अंश और हर दोनों को x से भाग करने पर)

क्योंकि $x \to \infty$ के लिए $\frac{1}{x} \to 0$ होता है, अतः

$\lim_{x\to\infty} \frac{1+2x}{1+3x} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{x}+2\right) \div \left(\frac{1}{x}+3\right) = \frac{2}{3}$

उदाहरण 7 : $\lim_{x\to 0} f(x)$ ज्ञात कीजए, जहाँ $f(x) = \frac{[(x+1)^2-1]}{x}$ है।

हल : पुनः, इस फलन में भी $x = 0$ रखने पर हमें $\frac{0}{0}$ प्राप्त होता है जो कि अनिर्धार्य है। अतः हमें इस फलन का सरलीकरण करना होगा। हम दिए हुए फलन को इस प्रकार लिख सकते है :

$$f(x) = \frac{\left[(x+1)^2-1\right]}{x} = \frac{1+x^2+2x-1}{x} = \frac{x(x+2)}{x} = (x+2)$$

इस प्रकार हम प्राप्त करते हैं कि

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} (x+2) = 2$$

उदाहरण 8 : निम्नलिखित फलनों के व्यवहार का परीक्षण कीजिए (इनकी सीमा निर्धारित कीजिए) यदि (a) $x \to \infty$ है (b) $x \to -\infty$ है।

(i) $\frac{5x^2+x+1}{x^2+2}$ (ii) $\frac{1-x^5}{x^4+x+1}$ (अनिर्धार्य रूप)

i) हमें इस फलन का सरलीकरण करना होगा जिससे सीमा ज्ञात की जा सके। इसके लिए हम फलन के अंश तथा हर दोनों को फलन में उपस्थित x की अधिकतम घात वाले पद से विभाजित करते हैं। इस प्रश्न में यह x^2 है।

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5x^2+x+1}{x^2+2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{5x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{2}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{5+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{2}{x^2}}\right]$$

अब $x = \infty$ रखें। इससे हम प्राप्त करते हैं $\frac{5+\frac{1}{\infty}+\frac{1}{\infty^2}}{1+\frac{2}{\infty^2}} = \frac{5+0+0}{1+0} = \frac{5}{1} = 5$

इसी प्रकार $\lim_{x\to-\infty} \frac{5x^2+x+1}{x^2+2} = \frac{5+\frac{1}{-\infty}+\frac{1}{(-\infty)^2}}{1+\frac{2}{(-\infty)^2}} = \frac{5-0+0}{1+0} = \frac{5}{1}$

ii) $\lim_{x\to\infty} \frac{1-x^5}{x^4+x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x^5}-1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^5}} = \frac{\frac{1}{(\infty)^2}-1}{\frac{1}{\infty}+\frac{1}{(\infty)^4}+\frac{1}{(\infty)^5}}$

$$= \frac{0-1}{0+0+0} = \frac{-1}{0} = -\infty$$

$x \to -\infty$ के लिए भी हमें यही सीमा प्राप्त होगी। पाठकों से अनुरोध है कि वे $x \to -\infty$ के लिए इस सीमा को स्वयं ज्ञात कीजिए।

उदाहरण 9 : सीमा $\underset{x\to 0}{Lt} \dfrac{1/x^2}{1/x^4}$ ज्ञात कीजिए

हल : यदि हम दिए हुए फलन में $x=0$ रखें तो हमें $\dfrac{1/0}{1/0} = \dfrac{\infty}{\infty}$ प्राप्त होता है जो कि अनिर्धार्य रूप में है।

हम बीजगणितीय संक्रियाओं के द्वारा दिए हुए फलन को सरल करते हैं तथा $x=0$ रखते हैं। इस प्रकार हमें प्राप्त होता है कि

$$\underset{x\to 0}{Lt} \frac{1/x^2}{1/x^4} = \underset{x\to 0}{Lt} \frac{1}{x^2} \times \frac{x^4}{1} \quad \underset{x\to 0}{Lt} \left(x^2\right) = (0)^2 = 0$$

उदाहरण 10 : यदि $f(x) = 3 + \dfrac{1}{x}$ तथा $g(x) = 5 - \dfrac{1}{x}$ है तो $f(x) + g(x)$ की सीमा ज्ञात कीजिए जबकि $x \to 0$ है।

हल : $\underset{x\to 0}{Lt}\left[f(x)+g(x)\right] = \underset{x\to 0}{Lt}\left[\left(3+\frac{1}{x}\right)+\left(5-\frac{1}{x}\right)\right]$

$$= \underset{x\to 0}{Lt}\left(3+\frac{1}{x}\right) + \underset{x\to 0}{Lt}\left(5-\frac{1}{x}\right) = \infty + \infty$$

यह एक अनिर्धार्य स्थिति है। परंतु यदि हम ध्यानपूर्वक देखें तो इस सीमा को बहुत सरलता से ज्ञात किया जा सकता है दि हम दोनों सीमाओ को एक साथ एक कोष्ठक में रखकर, प्राप्त व्यंजक को सरलीकृत कर लें । अर्थात्

$$\underset{x\to 0}{Lt}\left[3+\frac{1}{x}+5-\frac{1}{x}\right] = \left[3+\frac{1/}{x}+5-\frac{1/}{x}\right] \underset{x\to 0}{Lt}\, 8 = 8$$

अतः, $f(x)+g(x)$ की सीमा 8 होगी।

उदाहरण 11 : निम्नलिखित सीमाएं ज्ञात कीजिए।

a) $\underset{x\to 1}{Lt} \dfrac{x-1}{2x^2-7x+5}$

b) $\underset{x\to 1}{Lt} \dfrac{x^4-3x^3+2}{x^3-5x^2+3x+1}$

हल : a) यदि हम दिए हुए व्यंजक/फलन में $x=1$ रखें तो हम पाते हैं कि $\underset{x\to 1}{Lt}\ \frac{x-1}{2x^2-7x+5}$ बन जाता है $\frac{1-1}{2(1)^2-7(1)+5}=\frac{0}{0}$ जो कि अनिर्धार्य है।

इसलिए हमें इस व्यंजक का सरलीकरण करना होगा। हम यहाँ गुणनखंडन की विधि का प्रयोग करते हैं।

क्योंकि $2x^2-7x+5=(x-1)(2x-5)$ है, अतः हम पाते हैं कि

$$\underset{x\to 1}{Lt}\ \frac{(x-1)}{(x-1)(2x-5)}=\underset{x\to 1}{Lt}\ \frac{1}{(2x-5)}=\frac{1}{2(1)-5}=\frac{-1}{3}$$

b) यदि हम व्यंजक $\frac{x^4-3x^3+2}{x^3-5x^2+3x+1}$ में $x=1$ रखें, तो हम पाते हैं कि

$$\frac{(1)^4-3(1)^3+2}{(1)^3-5(1)^2+3(1)+1}=\frac{1-3+2}{1-5+3+1}=\frac{0}{0}$$

जो कि अनिर्धार्य है।

अतः हम बीजगणितीय संक्रियाओं के द्वारा इस व्यंजक का सरलीकरण करते हैं। इसके लिए हम, अंश और हर दोनों का गुणनखंडन करते हैं :

$$\underset{x\to 1}{Lt}\left[\frac{x^4-3x^3+2}{x^3-5x^2+3x+1}\right]=\underset{x\to 1}{Lt}\left[\frac{(x-1)(x^3-2x^2-2x-2)}{(x-1)(x^2-4x-1)}\right]$$

(संकेत : यदि $x = a$ किसी दिए हुए फलन $f(x)$ का शून्य है, अर्थात् यदि $f(a) = 0$ है, तो $(x-a)$, फलन $f(x)$ का एक गुणनखंड होगा इसके पश्चात् फलन $f(x)$ को $(x-a)$ से लंबी भाग विधि द्वारा भाग करके इसके अन्य गुणनखंड ज्ञात किए जा सकते हैं।

$$=\underset{x\to 1}{Lt}\left[\frac{x^3-2x^2-2x-2}{x^2-4x-1}\right]$$

$$=\frac{(1)^3-2(1)^2-2(1)-2}{(1)^2-4(1)-1}=\frac{1-2-2-2}{1-4-1}=\frac{-5}{-4}=\frac{5}{4}$$

उदाहरण 12 : निम्नलिखित सीमाओं का मान ज्ञात कीजिए

a) $\underset{x\to 0}{Lt}\ \frac{\sqrt{2-x}-\sqrt{2+x}}{x}$

b) $\underset{x\to\infty}{Lim}\left(\sqrt{x^2+5x+4}-\sqrt{x^2-3x+4}\right)$

हल (*a*) : इस उदाहरण में दिया हुआ फलन एक अपरिमेय व्यंजक है अतः हम इसे परिमेयीकरण की विधि द्वारा सरलीकृत करते हैं।

यदि हम इस व्यंजक में $x = 0$ रखें तो हम पाते है कि

$$\therefore \quad \underset{x\to 0}{Lt} \frac{\sqrt{2-x}-\sqrt{2+x}}{x} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}}{0} = \frac{0}{0} \qquad \text{(जो कि अनिर्धार्य है)}$$

परिमेयीकरण करने पर हम पाते है कि दिया हुआ व्यंजक

$$= \frac{\left[\sqrt{2-x}-\sqrt{2+x}\right]\left[\sqrt{2-x}+\sqrt{2+x}\right]}{x\left(\sqrt{2-x}+\sqrt{2+x}\right)}$$

$$= \frac{2-x-2-x}{x\left(\sqrt{2-x}+\sqrt{2+x}\right)} = \frac{-2x}{x\left(\sqrt{2-x}+\sqrt{2+x}\right)} = \frac{-2}{\sqrt{2-x}+\sqrt{2+x}}$$

के समान हो जाता है। इसमें $x\to 0$ लेने पर हम पाते हैं कि

$$\underset{x\to 0}{Lt} \frac{-2}{\sqrt{2-x}+\sqrt{2+x}} = \frac{-2}{\sqrt{2-0}+\sqrt{2+0}} = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

b) हम यह देख सकते हैं कि यदि दिए हुए फलन/व्यंजक में $x\to\infty$ लिया जाएं तो हम पाते हैं कि $\underset{x\to\infty}{Lt} \sqrt{x^2+5x+4}-\sqrt{x^2-3x+4} = \infty-\infty$ (जो कि अनिर्धार्य है)

अतः हम इस व्यंजक का परिमेयीकरण करते हैं तथा

सूत्र $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ का प्रयोग करके पाते है कि

$$= \underset{x\to\infty}{Lt} \frac{\left[\sqrt{(x^2+5x+4)}-\sqrt{(x^2-3x+4)}\right]\left[\sqrt{(x^2+5x+4)}+\sqrt{(x^2-3x+4)}\right]}{\left[\sqrt{(x^2+5x+4)}+\sqrt{(x^2-3x+4)}\right]}$$

$$= \underset{x\to\infty}{Lt} \frac{x^2+5x+4-x^2+3x-4}{\left[\sqrt{(x^2+5x+4)}+\sqrt{(x^2-3x+4)}\right]}$$

$$= \underset{x\to\infty}{Lt} \frac{8x}{\left[\sqrt{(x^2+5x+4)}+\sqrt{(x^2-3x+4)}\right]}$$

(अंश और हर दोनों को x से भाग करने पर/ध्यान दें कि x, वर्गमूल के चिह्न के अंदर जाकर x^2 हो जाता है)

$$= \underset{x\to\infty}{Lt} \frac{8}{\left[\sqrt{\left(\frac{x^2}{x^2}+\frac{5x}{x^2}+\frac{4}{x^2}\right)}+\sqrt{\left(\frac{x^2}{x^2}-\frac{3x}{x^2}+\frac{4}{x^2}\right)}\right]}$$

$$= Lt_{x\to\infty} \frac{8}{\left[\sqrt{\left(1+\frac{5}{x}+\frac{4}{x^2}\right)}+\sqrt{\left(1-\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}\right)}\right]}$$

$$= \frac{8}{\sqrt{1+0+0}+\sqrt{1-0-0}} = \frac{8}{1+1} = 4$$

उदाहरण 13 : नीचे दी हुई सीमाएं ज्ञात कीजिए :

a) $\underset{x\to\infty}{Lt}\left(\frac{x+1}{3x-1}+\frac{2x+1}{x-1}\right)$ और (b) $Lt_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{3x-1}\right)\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)$

हल *a*) : $\underset{x\to\infty}{Lt}\left(\frac{x+1}{3x-1}+\frac{2x+1}{x-1}\right)=\underset{x\to\infty}{Lt}\left[\frac{x+1}{3x-1}\right]+\underset{x\to\infty}{Lt}\left[\frac{2x+1}{x-1}\right]$

$$\underset{x\to\infty}{Lt}\left[\frac{1+\frac{1}{x}}{3-\frac{1}{x}}\right]+\underset{x\to\infty}{Lt}\left[\frac{2+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}\right]=\frac{1+\frac{1}{\infty}}{3-\frac{1}{\infty}}+\frac{2+\frac{1}{\infty}}{1-\frac{1}{\infty}}=\frac{1+0}{3-0}+\frac{2+0}{1-0}$$

$$=\frac{1}{3}+2=\frac{7}{3}$$

हल b) : $\underset{x\to\infty}{Lt}\left(\frac{x+1}{3x-1}\right)\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)=\underset{x\to\infty}{Lt}\left(\frac{x+1}{3x-1}\right)\cdot\underset{x\to\infty}{Lt}\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)$

$= \frac{1}{3}\times 2=\frac{2}{3}$ [भाग (*a*) देखें]

उदाहरण 14 : यदि $x\to a$ है तो $\frac{x^m-a^m}{x^n-a^n}$ की सीमा ज्ञात कीजिए।

हल : यदि हम दिए हुए व्यंजक में $x=a$ रखें तो हम $\frac{0}{0}$ प्राप्त होता जो कि अनिर्धार्य है। हम ज्ञात है कि $\underset{x\to a}{Lt}\frac{x^n-a^n}{x-a}=n\,a^{n-1}$ एक मानक सीमा है।

[इस मानक सीमा का प्रयोग करने के लिए हम दिए हुए व्यंजक के अंश और हर दोनों को $x-a$ से विभाजित करते हैं]

$$=\underset{x\to a}{Lt}\frac{x^m-a^m}{x^n-a^n}=\underset{x\to a}{Lt}\left[\frac{x^m-a^m}{x-a}\times\frac{x-a}{x^n-a^n}\right]=\underset{x\to a}{Lt}\left[\frac{x^m-a^m}{x-a}\times\frac{1}{\frac{x^n-a^n}{x-a}}\right]$$

$$=\underset{x\to a}{Lt}\left[\frac{x^m-a^m}{x-a}\div\frac{x^n-a^n}{x-a}\right]=ma^{m-1}\div na^{n-1}=\frac{m}{n}a^{m-n}$$

बोध प्रश्न 2

1) फलन $y=\frac{x^2+x-56}{x-7}$, $(x\neq 7)$ के लिए, बाएं पक्ष तथा दाएं पक्ष की सीमाएं ज्ञात कीजिए यदि $x\to 7$ है। क्या इस प्रकार प्राप्त सीमाओं से हम यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि यदि $x\to 7$ हो तो y की सीमा अस्तित्व रखती है।

.....

.....

.....

2) फलन $y=\frac{x^3-6x^2+12x-8}{x^2-4x+4}$, $(x\neq 2)$ के लिए y की सीमा ज्ञात कीजिए यदि $x\to 2$ हो।

.....

.....

.....

3) एक माँग फलन $p = \frac{5}{q+2}$ लें। यदि माँग की मात्रा $q \to \infty$ हो तो कुल राजस्व क्या होगा?

.....

.....

.....

.....

ल हॉपिटल का नियम

यदि *f(x)* और *g(x)* दो ऐसे अवकलनीय फलन हैं कि उनका भागफल/विभाजन द्वारा प्राप्त फलन $\frac{f(x)}{g(x)}$ अनिर्धार्य रूप $\frac{0}{0}$ या $\frac{\infty}{\infty}$ को प्राप्त करता है यदि x किसी मान *'a'* की ओर जाता है तो एल हॉपिटल नियम द्वारा $\frac{f(x)}{g(x)}$ की सीमा ज्ञात की जा सकती है। यह नियम इस प्रकार है

$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f''(x)}{g''(x)}$: जहां अंश और हर का अवकलन अलग-अलग किया जाता है – एक अनुपात के रूप में नहीं।

इस नियम को इस प्रकार लागू किया जाता है :

i) यदि $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ अनिर्धार्य रूपों $\frac{0}{0}$ अथवा $\frac{\infty}{\infty}$ में है तो दोनों फलनों *f(x)* और *g(x)* के अवकलनों के भागफल की सीमा ज्ञात कीजिए।

ii) यदि $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ भी अनिर्धार्य है ($\frac{0}{0}$ या $\frac{\infty}{\infty}$) तो *f''(x)* और *g''(x)* ज्ञात करें तथा

$\lim_{x\to a} \frac{f''(x)}{g''(x)}$ ज्ञात करें। इसी प्रकार यह प्रक्रिया जारी रखें जब तक सीमा प्राप्त न हो जाए।

टिप्पणी : i) हम देख चुके हैं कि कोई सीमा अनिर्धार्य कहलाती है यदि वह निम्न रूपों में से किसी भी प्रकार की हो :

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0 \times \infty, 0^0, \infty^\infty, \text{और } 1^\infty$$

परंतु एल हॉपिटल नियम प्रत्यक्ष रूप से केवल तभी लग सकता है जब स्थिति $\frac{0}{0}$ अथवा $\frac{\infty}{\infty}$ के रूप में हो। अनिर्धार्य रूपों के अन्य प्रकारों पर

यदि हम एल हॉपिटल नियम लगाना चाहते हैं तो हमें इन्हें $\frac{0}{0}$ अथवा $\frac{\infty}{\infty}$ के रूप मे परिवर्तित करना होगा।

ii) एल हॉपिटल नियम एक–पक्षीय (बाएं तथा दाएं पक्ष की) सीमाओं में तथा $x \to \pm\infty$ की स्थिति में भी वैध है।

उदाहरण 15 : एल हॉपिटल के नियम का प्रयोग करके निम्नलिखित सीमाओं का मान ज्ञात कीजिए।

a) $\underset{x\to a}{Lt}\left[\frac{x^4-a^4}{x-a}\right]$ b) $\underset{x\to 0^+}{Lt}\left[\frac{a^x-b^x}{x}\right]$ c) $Lt_{x\to 0^+} x^x$

हल : सीमा $\underset{x\to a}{Lt}\left[\frac{x^4-a^4}{x-a}\right]$ मानक रूप $\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a} = na^{n-1}$ के प्रकार की है।

यहाँ, $n=4$ है, अतः अभीष्ट सीमा $4a^{4-1}=4a^3$ है।

b) $\underset{x\to 0^+}{Lt}\left[\frac{a^x-b^x}{x}\right]=\frac{0}{0}$

अतः, एल हॉपिटल के नियम का प्रयोग करने के लिए हम $\frac{d}{dx}\left[\frac{a^x-b^x}{x}\right]$ ज्ञात करते हैं

इसका मान होगा $\left(a^x\log a - b^x\log b\right)$ अब, एल हॉपिटल नियम द्वारा हम पाते हैं कि

$$\underset{x\to 0^+}{Lt}\left[\frac{a^x-b^x}{x}\right]=\underset{x\to 0^+}{Lt}\left\{\frac{d}{dx}\left[\frac{a^x-b^x}{x}\right]\right\}=\underset{x\to 0^+}{Lt}\left(a^x\log a-b^x\log b\right)$$

$$=a^0\log a-b^0\log b=\log a-\log b=\log\left(\frac{a}{b}\right)$$

c) ध्यान दें कि $Lt_{x\to 0^+} x^x$ अनिर्धार्य है तथा इसका प्रकार 0^0 है। इसे इस प्रकार सरलीकृत किया जा सकता है :

$$x^x = e^{lnx^x} = e^{xlnx} = xlnx$$

अब, $$Lt_{x\to 0^+} x^x = Lt_{x\to 0^+} xlnx$$

$$\underset{x\to 0^+}{Lt} xlnx = \underset{x\to 0^+}{Lt}\frac{lnx}{\frac{1}{x}} = \frac{\infty}{\infty}$$

अतः अब हम एल हॉपिटल नियक का प्रयोग कर सकते हैं :

$$\underset{x\to 0^+}{Lt}\frac{lnx}{\frac{1}{x}} = \underset{x\to 0^+}{Lt}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \underset{x\to 0^+}{Lt}(-x) = 0$$

7.5 सार-संक्षेप

इस इकाई में हमने एक फलन की सीमा की अत्यंत महत्वपूर्ण संकल्पना के बारे में चर्चा की। हमने देखा कि सीमा का संबंध किसी चर के किसी मान की ओर जाने से फलन के मान के किसी संख्या के समीप आने से है। इस इकाई में हमने पहले सीमा की

आधारभूत संकल्पना को सहज बोध से समझा तथा उसके पश्चात् उसकी औपचारिक गणितीय परिभाषा भी दी। हमने अनुक्रमों और फलनों, दोनों की सीमाओं की संकल्पनाओं का अध्ययन किया।

इस इकाई में बाएं पक्ष की तथा दाएं पक्ष की सीमाओं की भी विस्तृत रूप से चर्चा की गई। इसके पश्चात् सीमाओं के कुछ महत्वपूर्ण गुणधर्मों की चर्चा के साथ-साथ, उन नियमों पर भी प्रकाश डाला गया जिनका उपयोग किसी फलन की सीमा ज्ञात करने के लिए किया जाता है। ऐसा एक उपयोगी नियम एल हॉपिटल का नियम है। हमने कई उदाहरणों के माध्यम से पाठकों को किसी फलन की सीमा ज्ञात करने विभिन्न विधियों से भी अवगत करवाया। परिमित सीमाओं के साथ-साथ अपरिमित सीमाओं की चर्चा भी इस इकाई में की गई हैं।

7.6 बोध प्रश्नों के उत्तर/संकेत

बोध प्रश्न 1

a) $\lim_{x\to -2}\left(x^2+5x\right)=\lim_{x\to -2}x^2+5\lim_{x\to -2}x=(-2)^2+5(-2)=4-10=-6$

b) $\lim_{x\to 0}\left[\frac{3x+1}{5x-1}\right]=\frac{\lim_{x\to 0}(3x+1)}{\lim_{x\to 0}(5x-1)}=\frac{3(0)+1}{5(0)-1}=\frac{1}{-1}=-1$

c) $\lim_{x\to 4}\left[\frac{2x^{3/2}-\sqrt{x}}{x^2-15}\right]=\frac{\lim_{x\to 4}\left(2x^{3/2}-\sqrt{x}\right)}{\lim_{x\to 4}\left(x^2-15\right)}=\frac{2(4)^{3/2}-\sqrt{4}}{(4)^2-15}$

$=\frac{2\times 4\times 2-2}{1}=14$

d) $\lim_{x\to a}Ax^n=\lim_{x\to a}A\cdot\lim_{x\to a}x^n=A\cdot(a)^n$

e) $\frac{1}{3}$

f) -6

2) औसत लागत $(AC)=4+\frac{2}{q}$.

अतः, $\lim_{q\to\infty}4+\frac{2}{q}=4$

3) मूलधन $=3357$ (लगभग) ब्याज की प्रभावी दर $=10.5\%$

बोध प्रश्न 2

1) 15

2) 0

3) (a) -1 ; (b) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; (c) $\frac{2}{5}$

4) 5