इकाई 5 वैश्लेषिक ज्यामिति*

संरचना

5.0 उद्देश्य

इस इकाई का अध्ययन करने के पश्चात् आप :

- कोटि, भुज आदि के अर्थों की व्याख्या के बारे में जान पाएंगे और उनका आलेख/निरूपण कर पाएंगे;
- दूरी सूत्र तथा विभाजन सूत्र से अवगत हो पाएंगे तथा उनका प्रयोग करना सीख पाएंगे;
- सरल रेखा के समीकरण के विभिन्न रूपों से भली-भाँति परिचित हो पाएंगे; तथा
- वृत्त, परवलय तथा समकोणीय अतिपरवलय इत्यादि के बारे में जानकारी प्राप्त कर पाएंगे।

5.1 विषय-प्रवेश

निर्देशांक ज्यामिति गणित की वह शाखा है जो एक तल में दिए गए बिंदु की स्थिति तथा दो अंकों के युग्म में एक निश्चित संबंध स्थापित करती है। अंकों के इस युग्म को दिए हुए बिंदु के निर्देशांक कहते हैं। दो से अधिक आयामों वाली निर्देशांक ज्यामिति भी उपलब्ध है परंतु हम अपनी चर्चा को द्वि-आयामी निर्देशांक ज्यामिति तक ही सीमित रखेंगे क्योंकि अपने उद्देश्य की प्राप्ति के लिए हमें केवल इसी की आवश्यकता पड़ेगी। किसी बिंदु के निर्देशांकों को कार्तीय निर्देशांक भी कहा जाता है। यह नाम प्रसिद्ध गणितज्ञ रेने द कार्ते के नाम पर आधारित है जिसने सबसे पहले निर्देशांक ज्यामिति की संकल्पना दी तथा इसको विकसित किया था।

निर्देशांक ज्यामिति, जिसे वैश्लेषिक ज्यामिति भी कहा जाता है, बीजगणितीय तथा ज्यामितीय संकल्पनाओं के बीच संबंध स्थापित करती है। यह ज्यामिति की बिंदु, रेखा और वक्र जैसी संकल्पनाओं को परिमाणात्मक आयाम देती है। इस प्रकार यह अर्थशास्त्र

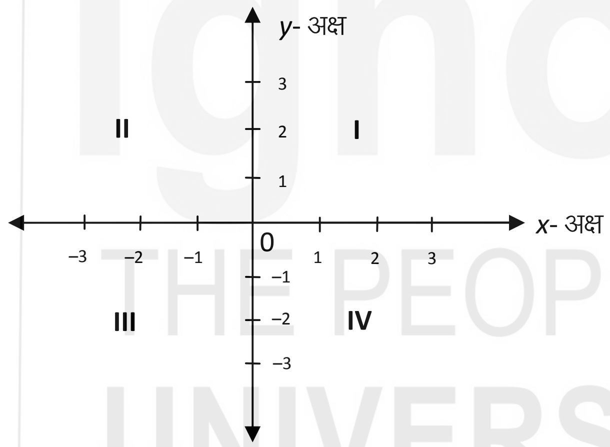
*श्री सौगतो सेन

से संबंधित चरों के परिमाण के चित्रण में उपयोगी उपकरण (tools) उपलब्ध करवाती है। साथ ही, यह अर्थशास्त्रीय चरों के बीच संबंध दर्शाने में हमारी सहायता करती है।

5.2 कार्तीय निर्देशांक पद्धति (The Cartesian Co-ordinate System)

जिस प्रकार संख्या रेखा एक चर वाले कथनों से जुड़ी समस्याओं को हल करने में सहायक होती है, उसी प्रकार कार्तीय निर्देशांक पद्धति दो चरों वाले कथनों से जुड़े प्रश्नों को प्रभावी रूप से हल करने में सहायक सिद्ध होती है।

कार्तीय निर्देशांक पद्धति (देखें रेखाचित्र 5.1) के लिए हम एक तल में एक क्षैतिज तथा एक ऊर्ध्वा संख्या रेखा इस प्रकार लेते हैं कि दोनों संख्या रेखाओं के O बिंदु एक ही स्थान पर हों। वह बिंदु, जहाँ ये दोनों रेखाएं मिलती हैं, मूलबिंदु कहलाता है। क्षैतिज रेखा को x-अक्ष तथा ऊर्ध्वा रेखा को y-अक्ष कहा जाता है। ये दोनों रेखाएं पूरे तल को चार भागों में विभाजित करती हैं। इनमें से प्रत्येक भाग को चतुर्थांश कहते हैं। इन चतुर्थांशों को घड़ी के विपरीत क्रम में चतुर्थांश I, चतुर्थांश II, चतुर्थांश III और चतुर्थांश IV कहा जाता है, जैसा कि रेखाचित्र 1 में दिखाया गया है।



रेखाचित्र 5.1

कार्तीय निर्देशांक पद्धति में, तल का प्रत्येक बिंदु वास्तविक संख्याओं के एक क्रमिक युग्म से निरूपित किया जा सकता है, विलोम अर्थ में वास्तविक संख्याओं का प्रत्येक क्रमिक युग्म, तल के एक बिंदु को निरूपित करता है।

किसी बिंदु को निरूपित करने वाले वास्तविक संख्याओं के युग्म में से प्रत्येक को उस बिंदु के निर्देशांक कहते हैं। पहली संख्या को, प्रथम निर्देशांक या x-निर्देशांक अथवा भुज कहते हैं। दूसरी संख्या को, बिंदु का द्वितीय निर्देशांक या y-निर्देशांक अथवा कोटि कहते हैं।

कार्तीय निर्देशांक पद्धति में किसी युग्म (a, b) का स्थान निर्धारित करने के लिए हम पहले मूलबिंदु x-अक्ष पर a इकाई का स्थान तय करते हैं तथा उसके पश्चात् ऊर्ध्वा दिशा में y-अक्ष के साथ-साथ b इकाई तक चलते हैं। यदि b धनात्मक हो तो हम ऊपर की दिशा में जाते हैं और ऋणात्मक हो तो नीचे की दिशा की ओर। इसी प्रकार, ध्यान

रहे, कि यदि a धनात्मक है तो हम मूलबिंदु से x-अक्ष पर दाईं ओर जाएंगे और यदि ऋणात्मक है तो बाईं ओर।

पहले अध्याय में, आपने फलनों के बारे में पढ़ा था। एक वास्तविक फलन को, जिसमें आश्रित तथा स्वतंत्र दोनों ही चर वास्तविक संख्याएं होती हैं, निर्देशांक ज्यामिति की सहायता से आलेख के रूप में निरूपित किया जा सकता है। किसी फलन f का आलेख ऐसे बिंदुओं (x, y) का समूह होता है जिनमें x को f के प्रांत से लिया गया है तथा $y = f(x)$ है। दूसरे शब्दों में, यह फलन से संबंधित सभी बिंदुओं का समुच्चय है।

बोध प्रश्न 1

1) बिंदुओं (3, 4), (0,0), (–2, 5), (4,3) और (2,–2) को कार्तीय निर्देशांक पद्धति के अनुसार कार्तीय तल पर आरेखित कीजिए।

....

....

....

....

....

....

2) बिंदुओ (2, 5), (0, –4), (7, 0) और (–6, –3) को कार्तीय निर्देशांक के अनुसार कार्तीय तल पर आरेखित कीजिए।

....

....

....

....

....

....

3) मान लीजिए f एक ऐसा फलन है जिसमें

$f(x) = x^2$ तथा इसका प्रांत (–2, –1, 0, 1, 2, 3) है।

f का आलेख बनाइए।

....

....

....

....

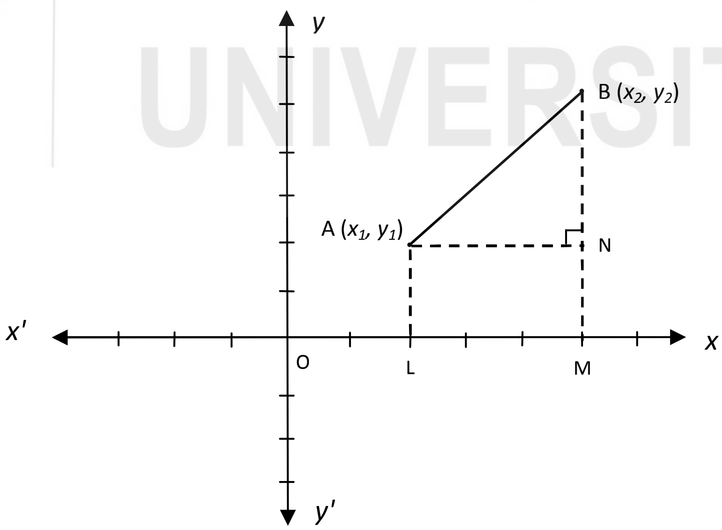
....

....

5.3 दो बिंदुओं के बीच की दूरी (The Distance between two points)

अब हम निर्देशांक पद्धति का उपयोग दो डिपार्टमेंटल स्टोर्स/बहुविभागी भंडारों या दो शहरों के बीच की दूरी ज्ञात करने के लिए करेंगे। इस प्रकार के प्रश्नों को हल करने के लिए पहले हमें दिए हुए शहरों A और B के निर्देशांक ज्ञात होने चाहिए। मान लीजिए, शहर A के निर्देशांक (x_1, y_1) तथा शहर B के निर्देशांक (x_2, y_2) हैं। यदि A और B के x-निर्देशांक (भुज) समान हों, अर्थात् यदि $x_1 = x_2$ हो, तो उनके बीच की दूरी $y_1 - y_2$ के बराबर होती है, यदि $y_2 > y_1$ है और $y_1 - y_2$ के बराबर होती है यदि $y_2 < y_1$ है। अतः शहर A(20, 25) और शहर B(20, 40) के बीच की दूरी मात्र 40 – 25 = 15 किलोमीटर होगी तथा A(15, 20) और B(15, –5) के बीच की दूरी (20 – (–5) = 25 कि.मी. होगी। इसी प्रकार यदि $A(x_1, y_1)$ और $B(x_2, y_2)$ के y-निर्देशांक (कोटि) समान हों, अर्थात् यदि $y_1 = y_2$ हो, तो A और B के बीच की दूरी $x_2 - x_1$ होगी यदि $x_2 > x_1$ है और $x_1 - x_2$ होगी $x_2 < x_1$ है। अतः A(10, 15) और B(25, 15) की बीच की दूरी 25–10= 15 कि.मी. है तथा A(15, 20) और B(–5, 15) के बीच की दूरी 15–(–5)=20 कि.मी. है। ध्यान दें कि दूरी का माप सदैव धनात्मक होता है।

अब हम दूरी की अवधारणा का विस्तार करेंगे जिससे ऐसे बिंदुओं A (x_1, y_1) और B (x_2, y_2) के बीच की दूरी भी ज्ञात की जा सके जिनमें न तो भुज समान हों न कोटि। ज्यामिती के प्रसिद्ध *पाइथागोरस प्रमेय* के अनुप्रयोग से एक तल में दिए हुए दो बिंदुओं के बीच की दूरी एक समकोण त्रिभुज की रचना करके सरलता से मापी जा सकती है। पाइथागोरस प्रमेय के अनुसार किसी भी समकोण त्रिभुज में कर्ण की लंबाई का वर्ग, त्रिभुज की शेष दो भुजाओं की लंबाइयों के वर्ग के योग के बराबर होता है।



रेखाचित्र 5.2

रेखाचित्र 5.2 में A (x_1, y_1) और B (x_2, y_2) निर्देशांक तल में दो बिंदु हैं। AL और BM क्रमशः A और B से x-अक्ष पर डाले गए लंब हैं। इसी प्रकार, AN बिंदु A से रेखा BM पर खींचा गया लंब है। इसी प्रकार प्राप्त त्रिभुज ANB एक समकोण त्रिभुज है जिसमें समकोण बिंदु N पर स्थित है। ध्यान दें कि भुजाओं AN और NB की लंबाइयाँ इस प्रकार हैं :

$$AN = LM = OM - OL = x_2 - x_1$$

तथा $NB = MB - NM = y_2 - y_1$

पाइथागोरस प्रमेय द्वारा

$(AB)^2 = (AN)^2 + (NB)^2$, और इसीलिए

$$AB = \sqrt{(AN)^2 + (NB)^2}$$

$$= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

अतः, A (x_1, y_1) से B (x_2, y_2) की दूरी जबकि $x_1 \neq x_2$ और $y_1 \neq y_2$ है,

$$d\,(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

से व्यक्त की जा सकती है। ध्यान दें कि d (A, B) बिंदुओं A और B के बीच की दूरी को निरूपित करता है।

उदाहरण : A (18, 8) और B (10, 2) के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ $x_1 = 18$, $y_1 = 8$, $x_2 = 10$ तथा $y_2 = 2$ है। दूरी सूत्र में x_1 , y_1 , x_2 तथा y_2 का मान रखने पर हम पाते हैं कि

$$d\,(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$= \sqrt{(18 - 10)^2 + (2 - 8)^2}$$

$$= \sqrt{(8)^2 + (-6)^2}$$

$$= \sqrt{100}$$

$$= 10$$

गतिविधि 1 : निम्नलिखित बिंदुओं के युग्म में दूरी ज्ञात कीजिए : A (8, 10) तथा B (20, 15)।

गतिविधि 2 : सिद्ध कीजिए कि बिंदुओं P $(\alpha, -\beta)$ तथा Q $(-\alpha, \beta)$ के बीच की दूरी $d[P, Q] = 2\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ है।

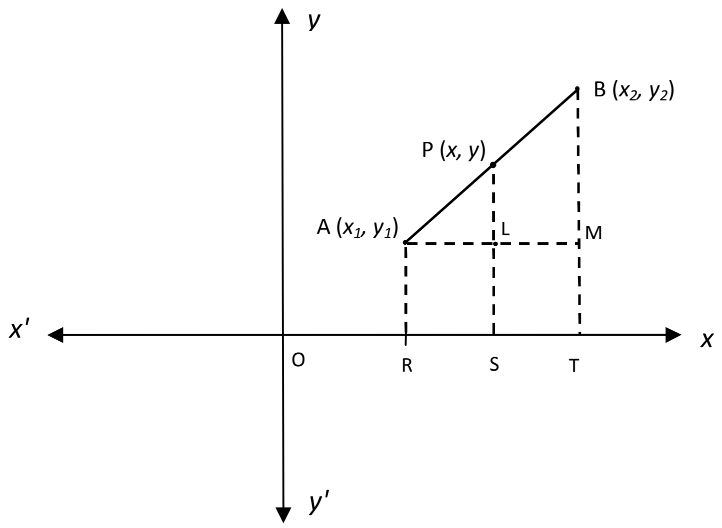
5.4 विभाजन सूत्र (Section Formula)

अब हम उस बिंदु P(x, y) के निर्देशांक ज्ञात करेंगे जो किसी रेखा खंड AB को एक दिए हुए अनुपात में विभाजित करता है।

रेखाचित्र 5.3 पर ध्यान दीजिए। इसमें बिंदु P(x, y), बिंदुओं A(x_1, y_1) तथा B(x_2, y_2) को मिलाते हुए रेखाखंड को $m : n$ के अनुपात में विभाजित करता है, अर्थात्

$$\frac{AP}{PB} = \frac{m}{n},$$

जहाँ m और n धनात्मक पूर्णांक हैं।



रेखाचित्र 5.3

इस रेखाचित्र में AR, PS और BT क्रमशः बिंदुओं A, P और B से x-अक्ष पर डाले गए लंब हैं। AM रेखा BT पर एक लंब है जो कि PS को बिंदु L पर काटता है। ΔAMB में, LP भुजा MB के समानांतर है।

अतः $$\frac{AL}{LM} = \frac{AP}{PB} = \frac{m}{n} \quad \text{(दिया है)}$$

अथवा $$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{m}{n}$$

ध्यान दें कि $AL = RS = x - x_1$ और $LM = ST = x_2 - x)$

उपरोक्त समीकण से x का मान ज्ञात करने पर हम पाते हैं कि

$$x = \frac{nx_1 + mx_2}{m + n}$$

इसी प्रकार, यह देखा जा सकता है कि

$$y = \frac{ny_1 + my_2}{m + n}$$

यदि P, AB का मध्य बिंदु हो, अर्थात् यदि $m = n$ हो तो, हम प्राप्त करते हैं :

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad \text{और} \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

उदाहरण : बिंदुओं (3, 5) और (–1, 4) को मिलाने वाले रेखाखंड को 2 : 3 के अनुपात में विभाजित करने वाले बिंदु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

हल : इस प्रश्न में $x_1 = 3$, $y_1 = 5$, $x_2 = -1$ तथा $y_2 = 4$ है। साथ ही $m = 2$ तथा $n = 3$ है।

मान लीजिए, वांछित बिंदु के निर्देशांक (x, y) हैं।

अतः,
$$x = \frac{nx_1 + mx_2}{m+n}$$

$$= \frac{3 \times 3 + 2 \times (-1)}{2 + 3} = \frac{7}{5}$$

इसी प्रकार,

$$y = \frac{ny_1 + my_2}{m+n}$$
$$y = \frac{3 \times 5 + 2 \times 4}{2 + 3} = \frac{23}{5}$$

अतः, वांछित बिंदु के निर्देशांक $\left(\frac{7}{5}, \frac{23}{5}\right)$

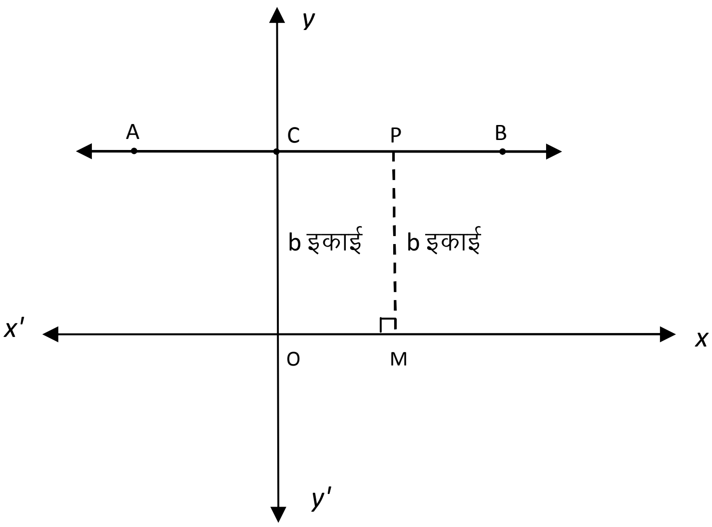
अभ्यास : बिंदुओं (4, 7) और (3, –5) को मिलाने वाले रेखाखंड को 3 : 4 के अनुपात में विभाजित करने वाले बिंदु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

5.5 सरल रेखा (The Straight Line)

एक सरल रेखा को दो बिंदुओं के बीच सबसे कम (न्यूनतम) दूरी वाले पथ के रूप में परिभाषित किया जा सकता है। किसी सरल रेखा को पूर्णतयः निर्धारित किया जा सकता है, यदि हमें दो ऐसे बिंदुओं के निर्देशांक ज्ञात हों जो रेखा पर स्थित हों। यदि किसी रेखापर स्थित एक बिंदु के निर्देशांक तथा रेखा की ढाल (slope) ज्ञात हो तो भी रेखा पूर्णतः निर्धारित की जा सकती है। एक सरल रेखा को एक बीजगणितीय समीकरण के रूप में व्यक्त किया जा सकता है। x-अक्ष अथवा y-अक्ष के समानांतर रेखाओं का समीकरण के रूप में निरूपण अत्यंत सरल है। इसलिए हम ऐसी रेखाओं से प्रारंभ करते हैं तथा उनके समीकरण ज्ञात करते हैं।

कथन 1 : x-अक्ष के समानांतर तथा इससे $|b|$ दूरी पर स्थित सरल रेखा का समीकरण $y = b$ होता है।

मान लीजिए कि एक सरल रेखा AB x-अक्ष के समानांतर है और y-अक्ष को बिंदु C को इस प्रकार काटती है कि OC = b इकाई है (रेखाचित्र 5.4)। AB पर कोई भी यादृच्छिक बिंदु P लीजिए तथा इस बिंदु से x-अक्ष पर एक लंब PM डालिए। यहाँ MP = OC = b इकाइयाँ हैं। रेखा AB ऐसे बिंदुओं का बिंदुपथ है जो x-अक्ष से b इकाई की दूरी पर है।



रेखाचित्र 5.4

यदि b धनात्मक है तो रेखा AB x-अक्ष के ऊपर होगी और यदि b ऋणात्मक है तो रेखा AB x-अक्ष के नीचे होगी।

कथन 2 : y-अक्ष के समानांतर तथा इससे $|a|$ दूरी पर स्थित सरल रेखा का समीकरण $x = a$ होता है

यदि a धनात्मक है तो रेखा y-अक्ष के दाईं ओर होगी और यदि a ऋणात्मक है तो रेखा y-अक्ष के बाईं ओर होगी।

y-अक्ष के समानांतर अर्थात् x = अचर प्रकार की रेखाओं के अतिरिक्त प्रत्येक रेखा को $y = mx + b$ के रूप में लिखा जा सकता है, जहाँ m और b अचर होते हैं। यदि $x = 0$ तो y का मान $y = m.0 + b = b$ होगा जिससे हमें ज्ञात होता ह कि बिंदु (0, b) x-अक्ष के समानांतर तथा उससे b इकाई की दूरी वाली रेखा के आलेख पर स्थित है। क्योंकि यह रेखा y-अक्ष को बिंदु (0, b) पर काटती है, b को इस रेखा का y-*अंतःखंड* कहते है। संख्या m रेखा का ढाल कहलाती है। किसी रेखा के ढाल उसके x-अक्ष पर झुकाव के माप को व्यक्त करती है। यदि (x_1, y_1) तथा (x_2, y_2), रेखा $y = mx + b$ पर स्थित दो बिंदु हैं तो हम पाते हैं कि

$$y_1 = mx_1+b$$

और $$y_2 = mx_2+b$$

समीकरण (i) को समीकरण (ii) से घटाने पर हमें प्राप्त होता है :

$$y_2 - y_1 = (mx_2+b) - (mx_1+b)$$

अथवा $$y_2 - y_1 = m(x_2 - x_1)$$

$$\therefore \quad \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = m$$

अतः, बिंदुओं (x_1, y_1) और (x_2, y_2) से गुजरने वाली रेखा का ढाल होता है।

$$\text{ढ ाल} = m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\text{बिंदुओं के बीच की उर्ध्वाधर दूरी}}{\text{बिंदुओं के बीच की क्षैतिज दूरी}} = \frac{y \text{ में परिवर्तन}}{x \text{ में परिवर्तन}}$$

यह देखना सरल है कि यदि कोई रेखा बाएं से दाएं, ऊपर की ओर जाती है तो उसका ढाल धनात्मक होता है, क्योंकि

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y \text{ में धनात्मक परिवर्तन}}{x \text{ में धनात्मक परिवर्तन}}$$

और, यदि रेखा बाएं से दाएं नीचे की ओर जाती है तो उसका ढाल ऋणात्मक होता है, क्योंकि

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y \text{ में ऋणात्मक परिवर्तन}}{x \text{ में धनात्मक परिवर्तन}}$$

किसी क्षैतिज (x-अक्ष के समांतर) रेखा के लिए

$$m = \frac{y \text{ में परिवर्तन}}{x \text{ में परिवर्तन}} = \frac{0}{x \text{ में परिवर्तन}} = 0$$

अतः, एक क्षैतिज रेखा का ढाल सदैव 0 होता है, तथा एक ऊर्ध्वाधर रेखा का ढाल अपरिभाषित होता है।

रेखा के समीकरण का ढाल–*अंतःखंड* रूप :

$$y = mx + c$$

जहाँ m रेखा की ढाल तथा c उसका y-अंतःखंड है।

उदाहरण :(क) रेखा $2x - 3y = 6$ का ढाल तथा y-अंतःखंड ज्ञात कीजिए।

(ख) ढाल 3 तथा y-अंतःखंड $\frac{6}{7}$ वाली रेखा का समीकरण क्या होगा?

हल : (क) दिए हुए समीकरण को प्रवणता-अंतःखंड रूप में लिखें –

$$2x - 3y = 6$$

अथवा $$-3y = -2x + 6$$

$$y = \frac{2}{3}x - 2$$

इस रूप में लिखे समीकरण से हम सरलता से देख सकते हैं कि रेखा का ढाल $\frac{2}{3}$ तथा इसका y-अंतःखंड -2 है।

(ख) यदि $m = 3$ तथा $b = \frac{6}{7}$ है, तो हम $y = mx + b$ से प्राप्त करते हैं :

$$y = 3x + \frac{6}{7}$$

टिप्पणी : हमें सरल रेखा के समीकरण के अन्य रूपों के बारे में भी जानकारी होनी चाहिए क्योंकि अनेक बार हमें रेखा के बारे में जानकारी किसी दूसरे रूप में भी दी जा सकती है।

यदि हमें किसी रेखा के ढाल m तथा उस पर स्थित एक बिंदु (x_1, y_1) दिया हो, तो हम इसका समीकरण ज्ञात करने के लिए ढाल की परिभाषा का उपयोग कर सकते हैं। यदि करें कि किसी रेखा की प्रवणता उस पर दिए दो बिंदुओं के y-निर्देशांकों तथा x-निर्देशांकों के अंतर का अनुपात होता है। यदि (x, y) रेखा पर एक सामान्य बिंदु है तथा (x_1, y_1) एक ज्ञात बिंदु है, तो

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m \text{ अथवा } y - y_1 = m(x - x_1)$$

यह रेखा के समीकरण का एक उपयोगी रूप है।

रेखा के समीकरण का बिंदु-ढाल रूप

$$y - y_1 = m\left(x - x_1\right)$$

जहाँ (x_1, y_1) रेखा पर स्थित एक ज्ञात बिंदु है तथा m रेखा का ढाल है।

व्यावहारिक स्थितियों में हमें सामान्यतः दो बिंदु (x_1, y_1) तथा (x_2, y_2) दिये होते हैं। यदि चरों x और y के मध्य एक रैखिक संबंध हो तो उनको मिलाती हुई रेखा का ढाल दोनों बिंदुओं के y-अक्षों के अंतर को उनके x-अक्षों के अंतर से विभाजित करके निकाला जा सकता है। तत्पश्चात् बिंदु-ढाल सूत्र का उपयोग कर हम इस रेखा का समीकरण ज्ञात कर सकते हैं। इस प्रकार हमें रेखा के समीकरण का दो-बिंदु रूप प्राप्त होता है।

रेखा के समीकरण का दो-बिंदु रूप

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

जहाँ (x_1, y_1) तथा (x_2, y_2) रेखा पर दो भिन्न बिंदु हैं जिनमें $x_1 \neq x_2$ है तथा $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ रेखा का ढाल है।

कृपया ध्यान दें किसी भी रेखा के समीकरण का सामान्य रूप $Ax + By + C = 0$ होता है, जहाँ A, B तथा C वास्तविक संख्याएँ हैं तथा A और B दोनों एक साथ शून्य नहीं हो सकते।

सरल रेखा के समीकरण का सामान्य रूप :

$$Ax + By + C = 0; \quad A \neq 0, B \neq 0$$

जहाँ A, B और C निश्चित स्थिरांक हैं, एक सरल रेखा के समीकरण का सामान्य रूप है।

ध्यान दें कि विभिन्न रेखाओं के लिए A, B और C का मान अलग-अलग होगा।

समीकरण $Ax + By + C = 0$ को निम्न रूप में भी लिखा जा सकता है :

$$By = -Ax - C$$

अथवा $$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

इस प्रकार हम पाते हैं कि यदि किसी रेखा का समीकरण सामान्य रूप में दिया है, तो रेखा का ढाल

$$m = -\frac{A}{B} = -\frac{x \text{ का गुणांक}}{y \text{ का गुणांक}}$$

उदाहरण : ढाल –5 वाली और बिंदु (3, 7) से होकर निकलने वाली रेखा का समीकरण क्या होगा?

हल : किसी रेखा के समीकरण के बिंदु-ढाल रूप से हमें प्राप्त होता है कि

$$y - 7 = -5\,(x - 3)$$

अथवा $$y - 7 = -5x + 15$$

$$\therefore \quad y = -5x + 22$$

उदाहरण : XYZ मार्केटिंग कंपनी एक नए उपभोक्ता उत्पाद के विज्ञापन अभियान की व्यवस्था करती है। घर-घर जाकर होने वाले इस विज्ञापन अभियान पर होने वाले खर्च तथा नए उत्पाद की प्रारंभिक बिक्री में रैखिक संबंध पाया गया। यदि विज्ञापन पर रु. 500/- खर्च करने पर उत्पाद की 100 इकाइयों की बिक्री होती है तथा रु. 1200/- खर्च करने पर 240 इकाइयों की तो, रु.750/- खर्च करने पर उत्पाद की कितनी इकाइयों की बिक्री होगी।

हल : यदि x = विज्ञापन पर खर्च किए गए रुपयों की संख्या और y = उत्पाद की प्रारंभिक बिक्री है तो (500, 100) और (1200, 240) अभीष्ट रेखा पर स्थित दो बिंदु हैं। रेखा के समीकरण के दो-बिंदु रूप का उपयोग करने पर हमें निम्नलिखित समीकरण प्राप्त होता है।

$$y - 100 = \frac{240 - 100}{1200 - 500}(x - 500)$$

अथवा $$y - 100 = \frac{1}{5}(x - 500)$$

अथवा $$y = \frac{1}{5}x - 100 + 100$$

$$\therefore \quad y = \frac{1}{5}x$$

इस समीकरण में $x = 750$ रखने पर, हमें प्राप्त होता है

$$x = \frac{1}{5} \times 750 = 150 \text{ इकाइयां}$$

अर्थात् हम पाते हैं कि यदि विज्ञापन पर रु. 750/- खर्च किए जाएं तो उत्पाद की 150 इकाइयों की बिक्री होगी।

गतिविधि 1 : ढाल-9 वाली तथा बिंदु (4, 9) से होकर निकलने वाली रेखा का समीकरण क्या होगा?

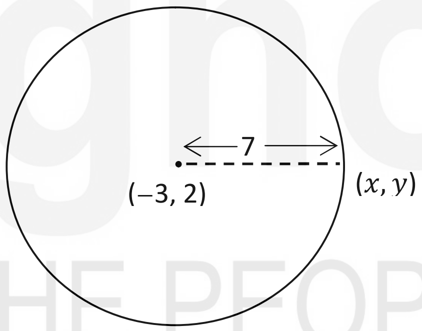
गतिविधि 2 : एक विविध वस्तु भंडार की बिक्री एक सरल रेखा से निरूपित की जा सकती है। इस भंडार की जनवरी मास की बिक्री रु. 4,50,000/- तथा

मई मास की बिक्री रु. 7,50,000/- रही। बिक्री में वृद्धि का निरूपण एक सरल रेखीय समीकरण द्वारा कीजिए। यह मानते हुए कि वृद्धि की यही रेखीय प्रवृत्ति आगे भी जारी रहेगी, नवंबर मास में होने वाली अनुमानित वृद्धि ज्ञात कीजिए।

5.6 वृत्त (The Circle)

वृत्त, तल के उन बिंदुओं (x, y) का समूह होता है जो तल के एक स्थिर बिंदु (h, k) से समान दूरी पर होते हैं। स्थिर बिंदु को वृत्त का *केंद्र* तथा स्थिर बिंदु की *वृत्त* के किसी भी बिंदु की दूरी को वृत्त की *त्रिज्या* कहते हैं।

दिए हुए केंद्र व त्रिज्या वाले वृत्त का समीकरण हम दूरी-सूत्र का उपयोग करके प्राप्त कर सकते हैं। अर्थात्, हम ऐसा समीकरण ज्ञात कर सकते हैं जिसे तल के केवल वही बिंदु संतुष्ट करते हैं जो वृत्त पर स्थित हैं। तल का कोई भी और बिंदु इस समीकरण को संतुष्ट नहीं करता। आइए इसी कथन की पुष्टि के लिए एक उदाहरण का प्रयोग करें। हम ऐसे वृत्त का समीकरण ज्ञात करेंगे जिसका केंद्र (–3, 2) तथा त्रिज्या 7 इकाई हो (देखें रेखाचित्र 5.5)।



रेखाचित्र 5.5

रेखाचित्र में वृत्त का केंद्र (–3, 2) है तथा (x, y) वृत्त पर स्थित कोई भी बिंदु है। क्योंकि वृत्त की त्रिज्या 7 है, बिंदु (x, y) की वृत्त के केंद्र (–3, 2) से दूरी 7 के बराबर होनी चाहिए। अतः दूरी सूत्र का उपयोग करने पर, हम प्राप्त करते हैं

$$\sqrt{(x+3)^2 + (y-2)^2} = 7$$

यह केंद्र (–3, 2) तथा त्रिज्या 7 वाले वृत्त का समीकरण है। दोनों पक्षों का वर्ग करने पर हम समीकरण के समरूप निम्नलिखित समीकरण प्राप्त होता है :

$$(x+3)^2 + (y-2)^2 = 49$$

ठीक इसी विधि का प्रयोग करके, हम केंद्र (h, k) और त्रिज्या r वाले वृत्त के समीकरण का सामान्य रूप प्राप्त कर सकते हैं, जहाँ h, k और r निर्दिष्ट (दी हुई) वास्तविक संख्याएँ हैं तथा साथ ही r गैर-ऋणात्मक है। इस समीकरण को ज्ञात करने के लिए हम पुनः वृत्त पर कोई बिंदु (x, y) लेते हैं। अब (x, y) और (h, k) की सहायता से व्यक्त करने पर हमें निम्नलिखित समीकरण प्राप्त होता है :

$$\sqrt{(x-h)^2 + (y-\mathrm{k})^2} = r$$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर हमें वृत्त के समीकरण का मानक रूप प्राप्त होता है :

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

जहाँ, (h, k) वृत्त के केंद्र के निर्देशांक हैं तथा r वृत्त की त्रिज्या है।

यदि वृत्त का केंद्र तल का मूलबिंदु है, तो $h = 0$ तथा $k = 0$ होगा। अतः वृत्त का मानक रूप और भी सरल हो जाता है :

$$x^2+y^2=r^2$$

जहाँ (0, 0) वृत्त का केंद्र तथा r वृत्त की त्रिज्या है।

यदि हम वृत्त के समीकरण के मानक रूप $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ का सरलीकरण करें तथा एक जैसे पदों को एक साथ लिखें, तो हमें निम्नलिखित समीकरण प्राप्त होता है :

$$x^2+y^2-2hx-2ky+(h^2+k^2-r^2) = 0$$

अथवा $$Ax^2+By^2+Cx+Dy+E = 0$$

जहाँ A, B, C, D और E निर्दिष्ट (दी हुई) वास्तविक संख्याओं को निरूपित करते हैं।

उपरोक्त दोनों समीकरणों से हमें प्राप्त होता है $A = B = 1$, $C = -2h$, $D = -2k$ and $E = h^2+k^2-r^2$. यदि हमें एक द्विघातीय समीकरण दिया हो जिसमें $A = B$ हो तथा A, B शून्य न हों, तो हम कोष्ठकों को पूर्ण वर्ग बनाकर दिए हुए समीकरण को ऊपर दिए मानक रूप में लिख सकते हैं।

उदाहरण : उस वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए

क) जिसका केंद्र (2, –3) हो तथा जिसकी त्रिज्या 5 हो।

ख) जिसका केंद्र मूलबिंदु हो तथा जिसकी त्रिज्या 4 हो।

हल : क) हम वृत्त के समीकरण के मानक रूप का उपयोग करेंगे। हमें $(h, k) = (2, -3)$ तथा $r = 5$ दिया है।

अतः, अभीष्ट समीकरण है : $(x-2)^2+[y-(-3)]^2=5^2$

अथवा $$(x-2)^2+(y+3)^2=25$$

ख) पुनः, वृत्त के समीकरण के मानक रूप में $(h, k) = (0, 0)$ तथा $r = 4$ रखने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$(x-0)^2+(y-0)^2=4^2$$

अथवा $$x^2+y^2=16$$

टिप्पणी : ध्यान दें कि भाग (क) में समीकरण का विस्तार किया जा सकता है।

अर्थात् $(x-2)^2+(y^2+3)^2=25 \rightarrow (x^2-4x+4)+(y^2+6y+9)=25$

अथवा सरलीकरण करने पर हम प्राप्त करते हैं :

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$$

अगले उदाहरण में हम देखेंगे कि इसकी जाँच कैसे की जाएं कि एक दी हुई समीकरण का आलेख एक वृत्त है।

उदाहरण :

दर्शाइए कि समीकरण $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 6 = 0$ का आलेख एक वृत्त है। इसके केंद्र तथा त्रिज्या का आंकलन भी करें।

हल : हम एक जैसी घात वाले चरों का एक साथ संकलित करते हैं तथा प्रत्येक चर के लिए कोष्ठकों के पूर्ण वर्ग बनाते हैं :

$$(x^2 - 2x) + (y^2 + 6y) = 6$$

अथवा $$(x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 6y + 9) = 6 + 1 + 9$$

इस समीकरण को पुनः मानक रूप में लिखते हैं

$$(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 16$$

हम देख सकते हैं कि $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 16$ का आलेख एक वृत्त है क्योंकि यह केंद्र (1, – 3) तथा त्रिज्या 4 वाले वृत्त का मानक रूप में समीकरण है।

बोध प्रश्न 2

1) उस वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए –

क) जिसका केंद्र (3, –4) और जिसकी त्रिज्या 7 है।

ख) जिसका केंद्र मूलबिंदु तथा त्रिज्या 5 है।

....

....

....

....

....

2) सिद्ध कीजिए कि समीकरण $2x^2 + 2y^2 - 16x - 20y + 64 = 0$ का आलेख एक वृत्त है तथा इसका केंद्र और त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

....

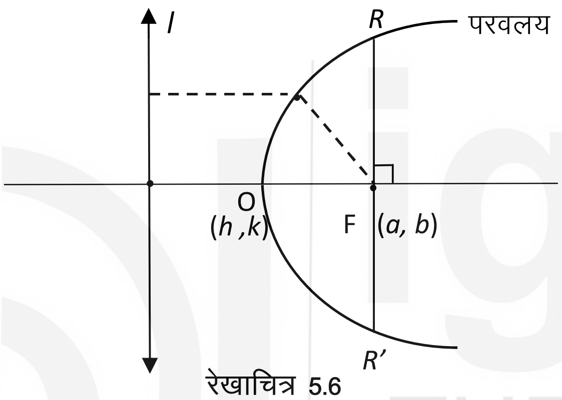
....

....

....

5.7 परवलय (The Parabola)

एक *परवलय* कार्तीय तल के उन सभी बिंदुओं का समुच्च्य है जो तल में स्थित एक निश्चित बिंदु F (a, b) और एक निश्चित सरल रेखा l से समान दूरी पर है। इस निश्चित बिंदु F (a, b) को परवलय की नाभि (फ़ोकस) तथा निश्चित l रेखा को परवलय की नियता (डायरेक्ट्रिक्स) कहते हैं। परवलय की नाभि F से निकलने वाली उस रेखा को जो नियता पर लंब हो, परवलय का अक्ष कहा जाता है। परवलय के अक्ष पर वह बिंदु O (h, k) जो परवलय की नाभि और नियता के मध्य में होता है, परवलय का शीर्ष कहलाता है। ध्यान दें कि यह बिंदु परवलय पर स्थित होता है क्योंकि यह नाभि और नियता से समान दूरी पर है। दूसरे शब्दों में परवलय का शीर्ष वह बिंदु है जहाँ परवलय अपने अक्ष को काटता है। परवलय की वह जीवा जो परवलय की नाभि से होकर जाती है तथा परवलय के अक्ष के लंबवत् होती है, परवलय की नाभि लंब जीवा है। रेखाचित्र 6 में RR' दिए हुए परवलय की नाभि लंब जीवा है।

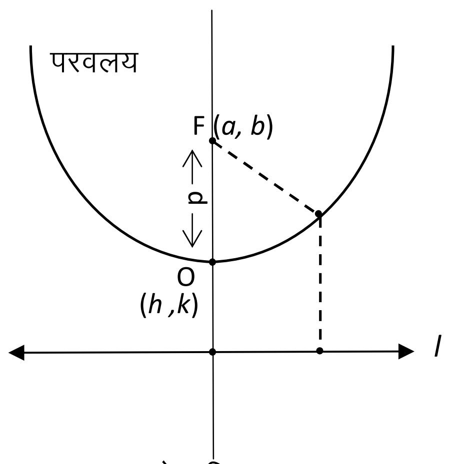


रेखाचित्र 5.6

शीर्ष (h, k) वाले परवलय का सामान्य समीकरण जिसकी नियता x-अक्ष के समानांतर है, निम्नवत् होता है

$$(x-h)^2 = 4p\,(y-k) \qquad \ldots(1)$$

जहाँ p परवलय की नाभि और उसके शीर्ष के बीच की दूरी है। यह वक्र अक्ष (जो कि परवलय का y-अक्ष कहलाता है) के सापेक्ष सममित होता है। इसकी नियता का समीकरण $y = \pm a$ होता है (रेखाचित्र 5.7 देखें)।



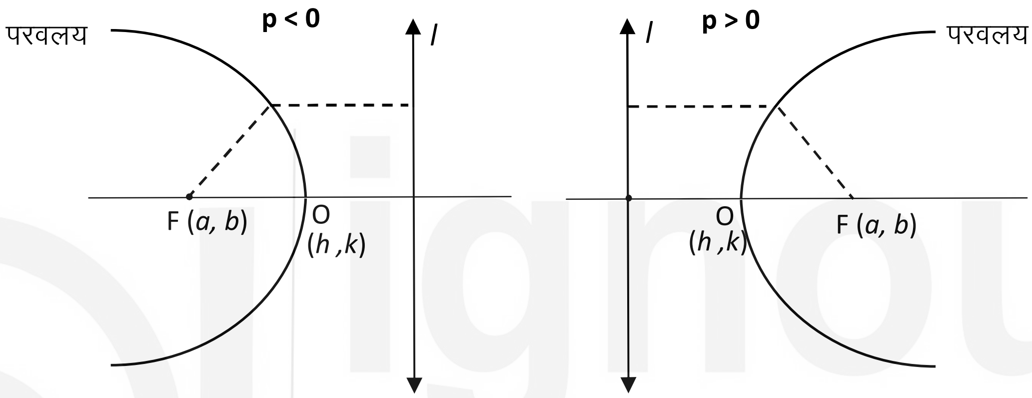
रेखाचित्र 5.7

जब परवलय की नियता y-अक्ष के समानांतर हो, तब यह समीकरण बन जाता है :

$$(y-k)^2 = 4\,\mathrm{p}\,(x-h) \qquad \ldots(2)$$

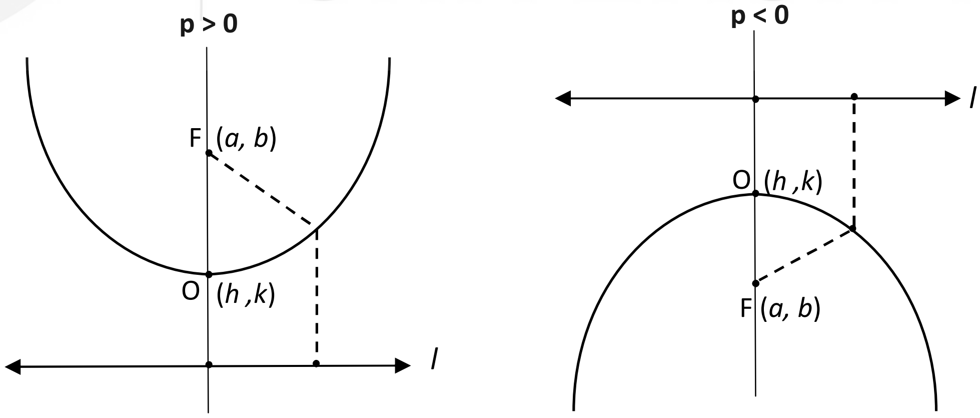
यह वक्र x-अक्ष (जो कि परवलय का अक्ष कहलाता है) के सापेक्ष सममित होता है। इसकी नियता का समीकरण $x = \pm\, a$ होता है (रेखाचित्र 5.6 देखें)।

यदि हम समीकरण 2 का विस्तार करें तथा y के लिए हल करें, तो हम देखेंगे कि हमें एक द्विघात समीकरण प्राप्त होात है। अतः, इस परवलय का आलेख एक U-आकार का वक्र होगा जो दाईं ओर खुलता है यदि $p > 0$ है, तथा बाईं ओर खुलता है यदि $p < 0$ हो (देखें रेखाचित्र 5.8)।



रेखाचित्र 5.8

इसी प्रकार समीकरण $(x-h)^2 = 4\,p\,(y-k)$ चर x में द्विघातीय है और इसका आलेख U-आकार का एक वक्र हो जो ऊपर की ओर खुलेगा यदि $p > 0$ है तथा नीचे की ओर खुलेगा यदि $p < 0$ है (देखें रेखाचित्र 5.9)।

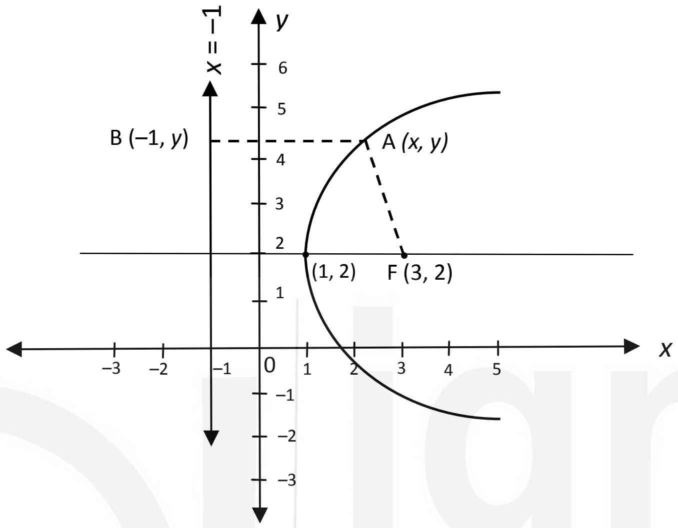


रेखाचित्र 5.9

निम्नलिखित उदाहरण में हम परवलय की परिभाषा की सहायता से उसका समीकरण ज्ञात करेंगे।

उदाहरण : एक परिवलय की नाभि (3, 2) और उसकी नियता $x = -1$ है। परिवलय की परिभाषा का प्रयोग करते हुए इसका समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल : सर्वप्रथम, हम दी हुई जानकारी की मदद से एक रेखाचित्र बनाते हैं। परवलय की नाभि (3, 2) पर स्थित है तथा इसकी नियता $x = -1$ है (रेखाचित्र 5.10 देखें)। अब हम परवलय के शीर्ष का निर्धारण करते हैं जो कि नाभि एवं नियता के मध्य में अर्थात् बिंदु (1, 2) पर स्थित है।



रेखाचित्र 5.10

परवलय की परिभाषा के अनुसार, इस पर स्थित कोई भी बिंदु (x, y) नाभि F (3, 2) तथा नियता $(x = -1)$ से बराबर दूरी पर होगा। अतः,

$$AF = AB$$

दूरी सूत्र के उपयोग से हम पाते हैं कि

$$(x-3)^2 + (y-2)^2 = [x-(-1)]^2 + (y-y)^2$$

इस समीकरण का सरलीकरण करने पर, हम प्राप्त करते हैं,

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 = x^2 + 2x + 1$$

अथवा $y^2 - 4y = 8x - 12$

द्विघातीय व्यंजक में वर्ग पूर्ण करने पर तथा पदों को पुनर्व्यवस्थित करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$y^2 - 4y + 4 = 8x - 12 + 4$$

अथवा $(y-2)^2 = 8x - 8$

अथवा $(y-2)^2 = 8(x-1)$

ध्यान दें कि शीर्ष (1, 2) तथा नाभि (3, 2) के बीच की दूरी $p = 2$ इकाई है।

अतः, अभीष्ट समीकरण है

$$(y-2)^2 = 4.(2)\,(x-1)$$

जो कि $(y-k)^2 = 4p\,(x-h)$ प्रकार का समीकरण है जहाँ $p = 2$ तथा नाभि $(h, k) = (1, 2)$ है।

उदाहरण : सिद्ध कीजिए कि $y^2 + 4x = -8$ एक परवलय है।

हल : हम दिए समीकरण को पुनः निम्न रूप में लिखते हैं :

$$y^2 = -4x - 8$$

अथवा $y^2 = -4\,(x+2)$

अथवा $y^2 = 4(-1)\,(x+2)$

अतः, यह दिये हुए समीकरण का परवलय का है जो कि x-अक्ष के सापेक्ष सममित है। इसकी नाभि (–2, 0) पर स्थित है और $p = -1$ है। क्योंकि p का मान ऋणात्मक है, इसलिए यह परवलय बाईं ओर खुलेगा।

उदाहरण : उस परवलय का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका अक्ष y-अक्ष है, जिसकी नाभि मूलबिंदु पर स्थित है तथा जो बिंदु (–4, 2) से होकर जाता है। इस परवलय की नाभिलंब जीवा की लंबाई भी ज्ञात कीजिए।

हल : दी हुई जानकारी के अनुसार, परवलय का समीकण का रूप

$(x-h)^2 = 4p\,(y-k)$ के साथ $(h, k) = (0, 0)$

होगा, जहाँ $(h, x) = (0, 0)$ है।

अतः यह समीकरण होगा :

$$x^2 = 4py$$

बिंदु (–4, 2) परवलय पर स्थित है, अतः इसके निर्देशांक उपरोक्त समीकरण को संतुष्ट करेंगे।

अतः $(-4)^2 = 4p\,(2)$

इस समीकरण से हमें प्राप्त होता है

$$p = \frac{16}{8} = 2$$

अतः, अभीष्ट समीकरण है

$$x^2 = 8y$$

इस परवलय का अक्ष y-अक्ष है। अतः, इसकी नाभि y-अक्ष पर स्थित होगी और उसकी नाभि (0, 0) से दूरी 2 इकाई के बराबर होगी। ध्यान दें कि

नाभिलंब जीवा, जो कि नाभि से होकर जाती है, परवलय को बिंदुओं (–4, 2) तथा (4, 2) पर काटेगी। इस जीवा की लंबाई 8 इकाई होगी, जो कि $4p$ के मान के बराबर है। अतः, यहाँ पर एक निष्कर्ष निकाला जा सकता है कि *नाभिलंब जीवा की लंबाई* $|4a|$ के बराबर होती है।

अतः, परवलय का समीकरण $x^2 = 8y$ है तथा इसकी नाभिलंब जीवा की लंबाई 8 इकाई है।

बोध प्रश्न 3

1) नीचे दिए विवरण के अनुसार परवलय का समीकरण ज्ञात कीजिए तथा उसका आलेख खींचिये। आलेख में नाभि, शीर्ष तथा नियता को चिन्हित कीजिए :

क) नाभि= $(0, 2)$, नियता : $x = -2$

ख) नाभि= $(2, 1)$, नियता : $y = 4$

....

....

....

....

....

....

....

2) सिद्ध कीजिए की निम्नवत् समीकरण एक परवलय को निरूपित करते हैं :

क) $x^2 - 8y = 0$

ख) $y^2 = 8x + 4$

ग) $y^2 - 4y - 2x = 0$

घ) $x^2 + 6x = 3 + 6y$

....

....

....

....

....

....

....

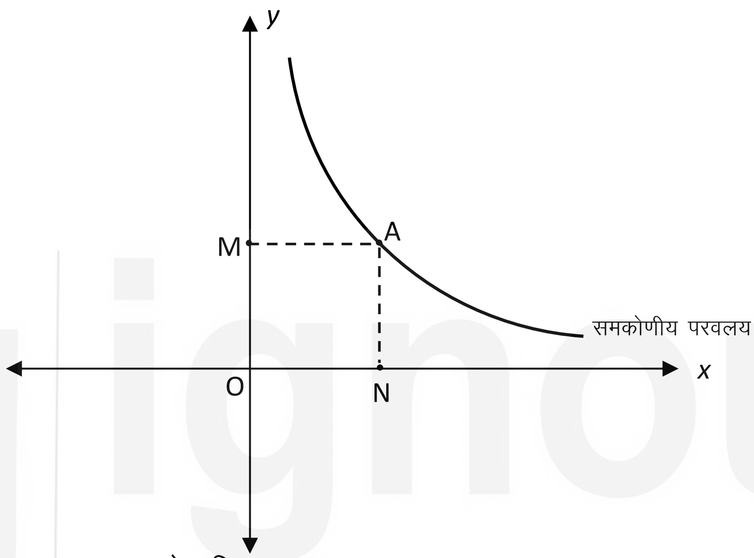
....

....

....

5.8 समकोणीय अतिपरवलय (The Rectangular Hyperbola)

समकोणीय अतिपरवलय एक समतल में ऐसे बिंदुओं का बिंदुपथ है जिनकी, दो दी हुई निश्चित लम्बवत् रेखाओं से, दूरियों का गुणनफल अचर होता है। ये दो निश्चित लम्बवत् रेखाओं से, दूरियों का गुणनफल अचर होता है। ये दो निश्चित लंबवत् रेखाएँ समकोणीय अतिपरवलय की अनंतस्पर्शी रेखाएँ कहलाती हैं। अनंतस्पर्शी रेखाओं का प्रतिच्छेदन बिंदु समकोणीय अतिपरवलय का केंद्र कहलाता है। नीचे दिए रेखाचित्र 11 पर ध्यान दें।



रेखाचित्र 5.11

इस रेखाचित्र 5.11 में बिंदु A, xy तल में एक बिंदु पथ अनुरेखित करता है। क्षैतिज और ऊर्ध्वाधर रेखाएँ दो परस्पर लंबवत् अनंतस्पर्शी *रेखाएँ* हैं। चित्र में AN, A की क्षैतिज अनंतस्पर्शी से दूरी है तथा AM, A की ऊर्ध्वाधर अनंतस्पर्शी से दूरी है। समकोणीय अतिपरवलय की भाषा के अनुसार इस वक्र पर A की विभिन्न स्थितियों के लिए AM और AN का गुणनफल समान रहता है। दूसरे शब्दों में, एक समकोणीय अतिपरवलय को अनुरेखित करने वाले बिंदु के लिए एक महत्त्वपूर्ण तथ्य यह है कि आयत ONAM का क्षेत्रफल सदैव समान रहता है। ध्यान रहे, समकोणीय अतिपरवलय की एक शाखा ($-x$, $-y$) तल (अर्थात्, दक्षिण-पश्चिमी या तीसरे) चतुर्थांश में भी अनुरेखित की जा सकती है। क्या आप समझ पा रहे हैं कि ऐसा क्यों होगा? (**संकेत** : दो ऋणात्मक संख्याओं का गुणनफल धनात्मक होता है)।

5.9 सार-संक्षेप

यह इकाई इस पाठ्यक्रम का एक महत्त्वपूर्ण हिस्सा है। हमें आशा है कि इसका अध्ययन करने के पश्चात् पाठक गणित की उन कई संकल्पनाओं से भली-भांति परिचित हो चुके होंगे जिनका प्रयोग अर्थशास्त्र में किया जाता है। आपने बहुत से ऐसे ज्यामिति वक्रों और आकारों (आकृतियों) का अध्ययन कर लिया होगा जो विभिन्न अर्थशास्त्रीय संबंधों को आरेखित करने में हमारी सहायता करेंगे। आपने विभिन्न अर्थशास्त्रीय संबंधों के आलेख बनाना सीखा। लेकिन उतनी ही महत्त्वपूर्ण यह भी है कि हमने यह जाना कि ज्यामितीय आकृतियों और वक्रों का एक बीजगणितीय प्रतिरूप भी है। किसी तल के

बिंदुओं को निर्देशांकों से व्यक्त/निरूपित किया जा सकता और इस प्रकार रेखाओं, वृत्तों, परवलयों तथा अतिपरवलयों के बीजगणितीय समीकरण भी ज्ञात किए जा सकते हैं। तल के दो बिंदुओं के बीच की दूरी भी निर्धारित की जा सकती है। इस इकाई का प्रारंभ हमने कार्तीय निर्देशांक पद्धति की संकल्पना की व्याख्या से किया। इस इकाई में हमें बताया गया है कि भुज और कोटि का क्या अर्थ है और किसी तल में बिंदु कैसे आलेखित किए जाते हैं। इसके पश्चात् इस इकाई में दो बिंदुओं की बीच की दूरी, विभाजन सूत्र अर्थात् दो बिंदुओं को मिलाने वाले रेखाखंड को दिए हुए अनुपात में बांटने वाले बिंदु को निकालने के सूत्र इत्यादि की चर्चा की गई। तत्पश्चात् हमने एक-एक करके विभिन्न ज्यामितीय आकृतियों को निरूपित करने वाले समीकरणों के बारे में जाना। सरल रेखा, वृत्त, परवलय तथा अतिपरवलय के समीकरण ज्ञात किए गए।

5.10 बोध प्रश्नों के उत्तर एवं संकेत

बोध प्रश्न 1

1) भाग 5.2 देखें।

2) भाग 5.2 देखें।

3) f का आलेख इन बिंदुओं का समुच्चय होगा $(-2,4)$, $(-1,1)$, $(0,0)$, $(1,1)$, $(2,4)$ और $(3,9)$। ध्यान दें कि हमने इन बिन्दुओं को मिलाया नहीं है, क्योंकि हमारे आरेख f में केवल ये 6 बिन्दु हैं – इसीलिए आरेख पर भी केवल 6 बिन्दु ही होंगे।

बोध प्रश्न 2

1) भाग 5.6 देखें।

2) भाग 5.6 देखें।

बोध प्रश्न 3

1) भाग 5.7 देखें।

2) भाग 5.7 देखें।