इकाई 4 फलनों के आधारभूत प्रकार*

संरचना

4.0 उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात् आप निम्नलिखित अवधारणाओं से भली भाँति अवगत/परिचित हो जाएंगे :

- चर, अचर और प्राचल की परिभाषा से;
- स्वतंत्र और निर्भर चर की संकल्पना से;
- रैखिक समीकरण और रैखिक फलन के बीच अंतर से;
- द्विघातीय फलन की परिभाषा से;
- त्रिघातीय एवं बहुपदीय फलनों की विशेषताओं से;
- कई अन्य फलनों से जैसे कि चरघातांकीय फलन, लघुगणकीय फलन, घात फलन तथा अतिपरवलीय फलन इत्यादि तथा
- ऊपर दिए फलनों के अर्थशास्त्र में उपयोग से।

4.1 विषय-प्रवेश

इस इकाई का अध्ययन इकाई 2 के विस्तार के रूप में करना चाहिए। इकाई 2 में हमने फलनों के बारे में जाना और देखा कि किस प्रकार एक समुच्चय (जिसे फलन का प्रांत

*श्री सौगतो सेन

कहते हैं) के अवयवों को, एक अन्य समुच्चय (जिसे फलन का परिसर कहते हैं) के अवयवों पर ले जाता है। परिसर के अवयवों को, प्रांत के अवयवों के प्रतिबिंब कहते हैं। इस इकाई में फलन को चरों के बीच संबंध की भांति निरूपित किया गया है।

दो या दो से अधिक चरों के बीच के संबंध को एक फलन कहा जा सकता है यदि एक या एक से अधिक चरों के मानों से एक चर के एक अद्वितीय मान का निर्धारण किया जा सके। यदि हमें किसी संबंध के गणितीय रूप की ठीक–ठीक जानकारी न हो, ऐसे फलन को हम एक व्यापक रूप में लिख सकते हैं उदाहरण के लिए, एक माँग फलन का व्यापक रूप $Q_d = f(P)$ है। माँग फलन का इस प्रकार का व्यापक रूप यह दर्शाता है कि किसी वस्तु की माँग की मात्रा (Q_d) उसके प्रति इकाई मूल्य अथवा कीमत (P) पर निर्भर करती है। यहाँ चिह्न $f(P)$ का अर्थ f और P का गुणनफल नहीं है। इसका अर्थ है f, P का एक फलन है। इस स्थिति में हम P को एक 'स्वतंत्र चर' कहते हैं क्योंकि इसका मान दिया होता है और यह Q_d के मान पर निर्भर नहीं करता अर्थात् यह बहिर्जात रूप से निर्धारित होता है। दूसरी ओर, Q_d एक 'निर्भर चर' है क्योंकि इसका मान P के मान पर निर्भर करता है। आर्थिक प्रतिरूप सामान्यतः बहिर्जात चरों और अंतर्जात चरों के मानों को जोड़ते है।। अर्थशास्त्र में जिन चरों का अध्ययन किया जाता है वे गुणात्मक भी हो सकते हैं और परिमाणात्मक भी। गुणात्मक चर कुछ विशिष्ट अभिलक्षणों, जैसे कि पुरूष या स्त्री, कार्यरत या बेरोज़गार इत्यादि को निरूपित करते हैं। किसी गुणात्मक चर के मानों में संबंध संख्यात्मक नहीं होते। दूसरी ओर, परिमाणात्मक चरों को संख्यात्मक रूप में मापा जा सकता है। रूपयों में राष्ट्रीय आय, बैरल में आयातित तेल, उपभोक्ता कीमत स्तर तथा रूपया–डॉलर विनिमय दर, इत्यादि परिमाणात्मक चरों के कुछ उदाहरण हैं। किसी फलन में स्वतंत्र चरों की संख्या एक से अधिक भी हो सकती है। उदाहरण के लिए, उत्पादन फलन का व्यापक रूप $Q = f(K, L)$ हमें बताता है कि उत्पाद (Q) दो स्वतंत्र चरों पूँजी (K) तथा श्रम (L) के मानों पर निर्भर करता है। हम इस पाठ्यक्रम में इस प्रकार के फलनों का अध्ययन नहीं कर पाएंगे, परंतु पाठकों को अगले सेमेस्टर में, 'अर्थशास्त्र के लिए गणित' पाठ्यक्रम के अंतर्गत इस प्रकार के फलनों के बारे में जानने का अवसर मिलेगा।

किसी फलन के विशिष्ट रूप से हम जान सकते है कि स्वतंत्र चर अथवा चरों के मानों से निर्भर चर का मान किस प्रकार ज्ञात किया जा सकता है। अर्थशास्त्र में फलनों के अनुप्रयोगों में कई बार हमें फलन के प्रांत को सीमित करना पड़ता है अर्थात् चरों के संभावित मानों को सीमित करना पड़ता है। उदाहरण के लिए, कीमत या उत्पाद को निरूपित करने वाले चरों के मान अऋणात्मक लिए जाते हैं। दूसरे शब्दों में प्रांत स्वतंत्र चरों के मानों को सीमाबद्ध करता हैं और परिसर निर्भर चर के मान को नियंत्रित करता है।

किसी फलन के रूप को परिभाषित करते हुए यह निश्चित कर लेना अत्यंत महत्वपूर्ण है कि स्वतंत्र चर के प्रत्येक मान (स्वतंत्र चरों के मानों के प्रत्येक संयोजन) के लिए, निर्भर चर का एक अद्वितीय मान हो। अन्यथा यह एक फलन न होकर केवल एक संगति मात्र होगी। समीकरण

$$y = 80 + x^{0.5}$$

पर विचार कीजिए। यह समीकरण एक फलन नहीं है क्योंकि यहाँ x के किसी भी दिए हुए मान के संगत हमें y के दो संभव मान प्राप्त होते हैं। यदि $x = 25$ है तो 25 की

घात 0.5= 5 या −5 होगा। अतः, y = 75 या 85 होगा। परंतु यदि हम $y = 80 + x^{0.5}$ for $x^{0.5} \geq 0$ लेते हैं, तो यह समीकरण एक फलन को निरूपित करेगा। यदि प्रांत निर्दिष्ट न हों तो आर्थिक चरों को निरूपित करने वाले फलनों का परिसर हमें बुद्धिमता पूर्वक चुनना चाहिए।

प्रतिलोम फलन

किसी फलन का प्रतिलोम, फलन के संबंध को उल्टा कर देता है। यदि हम अपनी चर्चा केवल एक स्वतंत्र चर, x, वाले फलनों तक सीमित रखें तो हम पाएंगे कि यदि y,x का फलन है, अर्थात् यदि $y = f(x)$ है तो इसके प्रतिलोम फलन में x,y का फलन होगा अर्थात् $x = g(y)$ होगा। ध्यान दें कि यहाँ हमने f न लेकर g लिया है जो यह दर्शाता है कि इस फलन g का रूप दिए हुए फलन f के रूप से भिन्न होगा।

फलनों के स्वरूप (की प्रकृति) के इस सामान्य परिचय के पश्चात् आईए अब हम विभिन्न प्रकार के फलनों का अध्ययन करें। इस इकाई के प्रत्येक अनुच्छेद में हम पाठकों का परिचय एक अलग प्रकार के फलन से करवाएंगे। हम देखेंगे कि इनमें से कुछ फलन रैखिक तथा अन्य अरैखिक कहलाते हैं। इसी प्रकार कुछ फलन बीजीय होते हैं जबकि कुछ अबीजीय। अगला अनुच्छेद रैखिक फलनों पर केंद्रित है। इस अनुच्छेद में, प्रारंभ करने के लिए, हमने चर, अचर तथा प्राचल इत्यादि को भी परिभाषित कर दिया है यद्यपि पाठक इन अवधारणाओं से पहले से ही परिचित हो सकते हैं और हमने भी विषय का परिचय देते हुए इस शब्दावली का प्रयोग पहले ही कर लिया है। इसके पश्चात् इस अनुच्छेद में हमने रैखिक फलनों की विशेषताओं और उनके गुणधर्मों की चर्चा भी की है। पाठकों को इस अनुच्छेद में रैखिक समीकरणों एवं रैखिक फलनों में अंतर जानने का अवसर भी मिलेगा। इससे अगले अनुच्छेद में द्विघातीय समीकरणों एवं द्विघातीय फलनों पर चर्चा की गई है। इसके पश्चात् आने वाले अनुच्छेद में त्रिघातीय और बहुपदीय फलनों पर विचार किया गया है। तत्पश्चात् चरघातांकीय तथा लघुगणकीय फलनों के साथ–साथ घातीय फलनों एवं अतिपरवलीय फलनों पर भी चर्चा की गई है। आईए अब हम एक–एक करके विभिन्न प्रकार के फलनों का अध्ययन करें।

4.2 रैखिक फलन [Linear Functions]

इस खंड में हम फलनों का अध्ययन आरंभ करेंगे। सरलतम भाषा में हम कह सकते हैं एक फलन, दो चरों के बीच के संबंध को दर्शाता है। आईए हम पहले चर की संकल्पना को समझें। गणित में चर एक ऐसा प्रतीक होता है जो सामान्यतः एक ऐसी संख्या को निरूपित करता है जिसका मान हमें पूरी तरह से स्पष्ट नहीं होता अर्थात् यह दिए हुए कई मानों में से एक हो सकता है। इसे साधारणतयः अंग्रेज़ी माला के वर्णों x,y,z या किसी अन्य वर्ग से व्यक्त किया जाता है। संक्षिप्त में, एक चर एक ऐसा प्रतीक या इकाई है जो विभिन्न मान ले सकता है।

दूसरी और अचर एक निश्चित संख्या होती है या कोई ऐसा प्रतीक जिसका मान निश्चित हो। अतः एक ऐसे परिमाण को अचर कहा जा सकता है जो परिवर्तित नहीं होता। किसी समीकरण के संदर्भ में, जब कोई अचर किसी चर के साथ संलग्न होता है, तो उस अचर को संगत चर का गुणांक कहते हैं। कभी–कभी एक समीकरण में कोई **गुणंक/अचर** एक संख्या के बजाय, वर्णमाला के अक्षर से व्यक्त किया गया होता है। यह अक्षर एक अचर को निरूपित करता है परंतु इसका कोई नियत मान नहीं होता।

यह मान स्थिति के अनुसार विभिन्न मान ले सकता है। इस प्रकार के **गुणंक/अचर** को प्राचल (पैरामीटर) कहते हैं। कोई भी ऐसा गणितीय व्यंजक जिसमें '=' का चिह्न उपस्थित हो, एक समीकरण कहलाता है। कुछ समीकरण ऐसे कथनों को निरूपित करते हैं जो केवल विशिष्ट स्थितियों में ही सत्य/सही होते हैं, जैसे कि $x^2 = 9$ यह कथन केवल तभी सत्य होगा जब $x = +3$ या $x = -3$ है। दूसरी ओर कुछ समीकरण चर (चरों) के प्रत्येक मान के लिए सत्य होते हैं जैसे कि

$$a + a + a + b + b + b = 3a + 3b$$

इस प्रकार के समीकरणों को सर्वसमिकाएं कहा जाता है और इन संबंधों में $'='$ के स्थान पर $'\equiv'$ का प्रयोग किया जाता है।

अब जब कि हम समीकरण के बारे में विस्तार से चर्चा कर चुके हैं, आईए हम देखें कि रैखिक समीकरण क्या होते हैं। किसी समीकरण को रैखिक समीकरण कहते हैं यदि इसमें प्रयुक्त चरों में से प्रत्येक की घात एक हो तथा कोई दो या अधिक चर आपस में गुणा न हो रहे हों। उदाहरण के लिए समीकरण $x + 3 = 9$ एक रैखिक समीकरण है क्योंकि इसमें उपस्थित चर x की घात 1 है। इसी प्रकार, $y = 3x - 5$ एक रैखिक समीकरण है क्योंकि इसमें उपस्थित दोनों चरों, x और y, की घात 1 है तथा इस समीकरण में xy जैसा कोई भी पद नहीं है। इसके विपरीत, $x^2 - 4 = 16$ एक अरैखिक समीकरण है। इसी प्रकार, $y = x^{1/2} + 5$ और $xy = 6$ भी अरैखिक समीकरण हैं।

एक चर में एक रैखिक समीकरण का सामान्य रूप

$$ax + b = c$$

होता है जहाँ x एक अज्ञात चर है तथा a,b और c अनिर्दिष्ट प्राचल (पैरामीटर) हैं। किसी दिए हुए निर्दिष्ट समीकरण में a,b और c कोई विशिष्ट मान ले सकते हैं, पर यहाँ हम रैखिक समीकरण के सामान्य स्वरूप की बात कर रहे हैं। हम ऊपर दिए रैखिक समीकरण मे x का मान प्राचलों के पद में व्यक्त करके ज्ञात कर सकते हैं ऐसा करने पर हमें प्राप्त होता है

$$x = \frac{c-b}{a}$$

रैखिक समीकरण के सामान्य रूप में x एक अंतर्जात चर है और a,b,c प्राचल हैं। इस समीकरण को हल करने का अर्थ है, दिए हुए अंतर्जात चर को प्राचलों के पद में व्यक्त करना।

रैखिक समीकरण की जानकारी प्राप्त करने के पश्चात् आईए हम एक रैखिक फलन के बारे में चर्चा करें। एक रैखीक फलन क्या है और इसका रैखिक समीकरण से क्या संबंध है? यह समझने के लिए आईए हम नीचे दिए समीकरण पर विचार करें :

$$y = 2x + 1$$

यह समीकरण एक रैखिक समीकरण है परंतु इसमें दो चर, x और y, तथा दो अचर, 2 और 1, हैं। x और y का केवल एक-एक मान ही नहीं अपितु कई मान (युग्म), इस समीकरण को संतुष्ट करते हैं। उदाहरण के लिए, यदि हम, $x = 1$ लें, तो $y = 3$ प्राप्त होता है। वास्तव में, हम x का कोई भी इच्छित मान चुन कर , y का एक ऐसा मान ज्ञात कर सकते हैं कि x और y इस समीकरण को संतुष्ट करें।

मुख्य बिंदु यह है कि इस समीकरण का कोई अद्वितीय हल नहीं है। दो चरों में इस प्रकार के समीकरण को फलन कहते हैं। फलन हमें एक अद्वितीय नहीं बल्कि दो (या दो से अधिक) चरों के बीच संबंध को दर्शाता/का वर्णन करता है। इस अनुच्छेद में हम रैखिक फलनों पर चर्चा करेंगे। सामान्यतः, किसी फलन में, बाई ओर लिखे गए चर को निर्भर चर तथा दाईं ओर लिखे गए चर को स्वतंत्र चर कहते हैं। ऊपर दिए फलन/समीकरण में x एक स्वतंत्र चर तथा y एक निर्भर चर है। हम इसे इस प्रकार भी कह सकते हैं कि y का मान, x के मान पर निर्भर करता है।

अगली इकाई में हम विभिन्न प्रकार के रैखिक व अरैखिक **समीकरणों/फलनों** के आलेखों के बारे में विस्तारपूर्वक चर्चा करेंगे। अनुच्छेद 5.5 रैखिक फलनों के आलेखों पर ही केंद्रित है। यहाँ हम अब रैखिक फलनों के कुछ गुणधर्मों के बारे में संक्षेप में चर्चा करेंगे। किसी रैखिक फलन के लिए व्यापक समीकरण

$$y = ax + b$$

होता है, जहाँ a और b अचर हैं।

हम a को वक्र (रेखा) का ढाल तथा b को उसका y-अन्तः खंड कहते हैं। हम x के मानों को क्षैतिज अक्ष पर तथा y के मानों को ऊर्ध्व अक्ष पर अंकित करते हैं। ये दोनों जिस बिंदु पर मिलते है वहाँ x और y दोनों का मान 0 होता है तथा इस बिंदु को मूलबिंदु कहते हैं। इन अक्षों के काटने से तल चार चतुर्थांशों में विभाजित हो जाता है। इस तल में प्रत्येक बिंदु (चाहे वह किसी भी अक्ष पर अथवा किसी भी चतुर्थांश में स्थित हो) को x और y के एक अद्वितीय युग्म से निरूपित किया जा सकता है जिसमें x के मान को पहले स्थान पर तथा y के मान को दूसरे स्थान पर लिखा जाता है। (स्मरण करें कि हम इकाई 2 में R^2 अर्थात् वास्तविक संख्याओं के क्रमित युग्मों के समुच्चय पर चर्चा कर चुके हैं)।

हम पुनः सरल रेखा के समीकरण $y = ax + b$ पर लौटते हैं, जहाँ b वह बिंदु है जिस पर रैखिक फलन को निरूपित करने वाला समीकरण (जो कि एक सरल रेखा है) y-अक्ष को काटता है। $y = ax + b$ में $x = 0$ रखने पर हम पाते हैं कि $y = b$, यदि $y = 0$ तो हमें $x = -b/a$ प्राप्त होता है। अतः यह रेखा (जो रैखिक फलन का आलेख है) x-axis को $-b/a$ पर काटती है। रेखा $y = ax + b$ का ढाल (जो कि यहाँ a द्वारा निरूपित है, रेखा पर स्थित दो बिंदुओं के y मानों के अंतर तथा x मानों के अंतर के अनुपात के बराबर होता है अर्थात् $a = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ जहाँ (x_1, y_1) और (x_2, y_2) रेखा $y = ax + b$ पर स्थित कोई भी दो बिंदु हैं।

रैखिक फलनों में स्मरण रखने योग्य महत्वपूर्ण बिंदु इस प्रकार हैं :

a) सभी चरों की घात 1 होती है, और कोई नहीं

b) कोई भी दो या दो से अधिक चर कभी गुणा नहीं होते

c) आलेख (रेखा) का ढाल सभी बिंदुओं पर समान होता है।

ये एक सरल रेखा की महत्वपूर्ण विशेषताएं हैं। रैखिक फलनों और उनके आलेखों के बारे में और अधिक जानकारी के लिए आप सीधे अनुच्छेद 5.5 पर जा सकते हैं।

उदाहरण : यह दिया हुआ है कि एक वस्तु की कीमत 3.50 रू. प्रति इकाई है, यदि माँग 350 इकाई है। यदि माँग केवल 50 इकाई की है तो कीमत बढ़कर 5.50 रू. प्रति इकाई हो जाती है। माँग और कीमत में रैखिक माँग फलन ज्ञात कीजिए।

हल : माना रैखिक माँग फलन $p = a + bx$ है। इस फलन में $p = 3.5$ तथा $x = 250$ रखने पर हम पाते हैं कि

$$3.5 = a + 250b \qquad \ldots(1)$$

इसी प्रकार $p = 5.5$ तथा $x = 50$ रखने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$5.5 = a + 50b \qquad \ldots(2)$$

समीकरण (2) में से समीकरण (1) घटाने पर हम प्राप्त करते हैं कि

$$200b = -2 \text{ or } b = -0.01$$

समीकरण (1) में $b = -0.01$ रखने पर हम प्राप्त करते हैं :

$$3.5 = a + (250)(-0.01)$$

$$3.5 = a - 2.5$$

$\therefore$ $a = 6$ और $b = -0.01$

अतः, माँग फलन $p = 6 - 0.01x$ है।

ध्यान दें कि उपरोक्त उदाहरण में हमने व्यापक रैखिक फलन को $y = a + bx$, लिया। यहाँ, a, y –अन्तः खण्ड तथा b ढाल है जबकि पहले हमने इस फलन के समीकरण $y = ax + b$ लिया था। हम अपने फलन को इनमें से किसी भी रूप में ले सकते हैं। केवल इतना ध्यान रहे कि चर x का गुणंक फलन का ढाल होता है और स्वच्छंद अचर y – अन्तः खंड (y – intercept)

4.3 द्विघात फलन [Quadratic Functions]

पिछले अनुच्छेद में हमने रैखिक समीकरणों तथा रैखिक फलनों के बारे में जाना। हमने देखा कि किसी रैखिक समीकरण का सामान्य रूप $ax + b = c$ होता है, जहाँ x एक चर अथवा अज्ञात इकाई है तथा a, b और c अचर अथवा प्राचल हैं। इस समीकरण को रैखिक कहते हैं क्योंकि इसमें उपस्थित चर x की घात 1 होती है, न कम, न अधिक। किसी रैखिक फलन का सामान्य रूप $y = ax + b$ होता है। इसका आलेख एक सरल रेखा होता है तथा इसका ढाल प्रत्येक बिंदु पर समान रहता है। इसका अर्थ यह भी है कि x के मान में एक इकाई के बराबर परिवर्तन करने पर y का मान, समान मात्रा में बढ़ता या घटता है (ध्यान रहे कि ढाल ऋणात्मक भी हो सकता है)।

यह अर्थशास्त्र में पाए जाने वाले कुछ संबंधों के लिए सही हो सकता है, जैसे कि रैखिक माँग वक्र या रैखिक आपूर्ति वक्र। परंतु अर्थशास्त्र में ऐसी कई परिस्थितियाँ उत्पन्न होती है जब हमारा सामना अरैखिक संबंधों से होता है, ऐसी स्थितियाँ जहाँ x में दिया हुआ परिवर्तन करने पर सदा y में समान परिवर्तन नहीं होता। इस अनुच्छेद में हम एक सरल अरैखिक फलन की चर्चा करेंगे जिसे द्विघात फलन कहते हैं। हम द्विघात समीकरणों की चर्चा भी करेंगे। जब हम किसी द्विघात फलन का आलेख बनाते हैं तो हमें एक U के आकार का वक्र प्राप्त होता है। हम द्विघात समीकरणों का हल ज्ञात

करना भी सीखेंगे। हम अर्थशास्त्र में द्विघात फलनों के कुछ अनुप्रयोगों का भी वर्णन करेंगे।

एक द्विघात समीकरण में एक अज्ञात चर x होता है जिसकी घात 2 के बराबर होती है अर्थात् किसी द्विघात समीकरण में x^2 की उपस्थिति अनिवार्य है। इसमें x की घात 1 वाला पद अर्थात् x भी हो सकता है। एक द्विघात समीकरण का सामान्य रूप

$$ax^2 + bx + c = 0$$

होता है जहाँ a, b और c अचर होते हैं।

इस समीकरण को हल करने के लिए हम x^2 के गुणांक a को कोष्ठक के बाहर लाते हैं। ऐसा करने से हमें प्राप्त होता है :

$$a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = 0$$

इसके पश्चात् हम कोष्ठक के अंदर उपस्थित पद $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$ के गुणनखंड करते हैं।

मान लीजिए ये गुणनखंड $(x + C)$ तथा $(x + D)$ हैं, जहाँ C और D दो संख्याएं हैं। यदि ये गुणनखंड हैं तो गुणनखंड की परिभाषा के अनुसार

$$(x + C)(x + D) = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$$

होगा।

इस समीकरण के दोनों पक्षों को a से गुणा करने पर हम पाते हैं कि

$$a(x + C)(x + D) \equiv ax^2 + bx + c$$

क्योंकि यह एक सर्वसमिका है, जब बाईं ओर का व्यंजक शून्य के बराबर होगा तो दाईं ओर का पक्ष भी शून्य हो जाएगा। परंतु बायाँ पक्ष तभी शून्य होगा जब $x = -C$ अथवा $x = -D$ हो। यही मान द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के हल हैं। इन्हें द्विघात समीकरण के मूल कहते हैं।

किसी दिए हुए द्विघात समीकरण को हल करने के लिए एक व्यापक सूत्र भी है। एक द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के हल (मूल) नीचे दिए सूत्र से प्राप्त किए जा सकते हैं :

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

द्विघात समीकरणों के बारे में चर्चा करने के पश्चात्, आईए हम द्विघात फलनों की ओर चलें। जैसा कि हम देख चुके हैं, किसी फलन को दो चरों में एक समीकरण द्वारा व्यक्त किया जाता है। आईए अब हम देखें कि किसी द्विघात फलन का स्वरूप कैसा होता है। किसी भी द्विघात समीकरण का व्यापक रूप $y = ax^2 + bx + c$ के प्रकार का होता है जहाँ a, b, और c अचर हैं। यदि हम किसी द्विघात फलन का आलेख बनाएं तो हम

पाएंगे कि यह एक U-आकार का वक्र है जिसे परवलय (पैराबोला) कहते हैं। आप अगली इकाई में परवलय की विशेषताओं और उसके गुणधर्मों के बारे में पढ़ेंगे। ध्यान दें कि x^2 सदैव धनात्मक होगा चाहे x ऋणात्मक हो अथवा धनात्मक। यदि हम परवलय $y = x^2$ की बात करें, तो y भी सदैव धनात्मक होगा। इस परवलय में यदि x शून्य है तो y भी शून्य होगा। साथ ही x के मानों x_i और $- x_i$ दोनों के लिए ही y का मान समान होगा। इन कारणों से हम देख सकते हैं कि $y = x^2$ का आलेख एक U–आकार का वक्र होगा। वास्तव में, प्रत्येक परवलय का आलेख U-आकार का एक वक्र होगा। किसी द्विघात फलन के आलेख की कुछ अन्य विशेषताएं इस प्रकार हैं :

1) पद x^2 की उपस्थिति से फलन का आलेख लगभग U-आकार का होता है जिसे एक परवलय कहते हैं।

2) यदि प्राचल a धनात्मक हो, तो आलेख U जैसा दिखेगा और यदि a ऋणात्मक है तो आलेख उल्टे U की तरह, अर्थात् ∩ की तरह दिखेगा। x^2 के गुणांक a के निरपेक्ष मान से इस बात का निर्धारण होता है कि वक्र कितनी तीव्रता से वक्र ऊपर या नीचे जाता है।

3) अचर पद, c से वक्र द्वारा y-अक्ष पर बनाए गए खंड की लंबाई का निर्धारण होता है।

4) अचर पद b परवलय को ऊपर या नीचे विस्थापित करता है। यदि प्राचल b धनात्मक हो तो $x > 0$ होने पर वक्र ऊपर खिसक जाता है तथा $x < 0$ होने पर नीचे की ओर खिसकता है। प्राचल b का निरपेक्ष मान उक्त विस्थापन प्रभाव की प्रबलता का निर्धारण करता है।

आईए अब हम अर्थशास्त्र में द्विघात समीकरणों के दो अनुप्रयोगों के बारे में जानें। पहला अनुप्रयोग माँग एवं आपूर्ति विश्लेषण के संदर्भ में है। हम रैखिक प्रतिलोम माँग फलन के बारे में बात कर चुके हैं। आईए अब हम एक द्विघाती प्रतिलोम माँग फलन पर विचार करें (जबकि प्रतिलोम आपूर्ति फलन रैखिक ही हो। मान लीजिए प्रतिलोम माँग फलन $p_d = 1.5q^2 - 15q + 35$ है और आपूर्ति फलन $p_s = 2q + 7$ है। संतुलन की स्थिति में माँग और आपूर्ति बराबर होते हैं, अतः हम पाते हैं कि

$$1.5q^2 - 15q + 35 = 2q + 7$$

$$1.5q^2 - 17q + 28 = 0$$

इस द्विघात समीकरण से हम पाते हैं कि $q = 2$ या $9\frac{1}{3}$ है। हम q के मान $9\frac{1}{3}$ को छोड़ देते हैं क्योंकि यह मान तब प्राप्त होता है जब द्विघाती माँग फलन ऊपर की ओर बढ़ते हुए, रैखिक आपूर्ति फलन को (नीचे से) दूसरी बार काटता है।

द्विघात समीकरणों के अर्थशास्त्र में अनुप्रयोग के रूप में हम लागत तथा आगम (राजस्व) के संबंध में चर्चा करते हैं। आईए हम किसी फर्म की कुल लागत (जिसे हमें TC = Total Cost लिखते हैं) और इसके उत्पाद q के बीच संबंध का अध्ययन करें। आईए हम इसे

$$TC = f(q)$$

के रूप में लिखें। इस फलन का आकार कैसा होगा? अर्थात् कुल लागत वक्र कैसा दिखेगा? कुल लागत फलन या वक्र रैखिक भी हो सकता है, जैसे कि $TC = aq + b$ जहाँ b निश्चित स्थिर लागत है तथा aq कुल परिवर्तनीय लागत है। उदाहरण के लिए, $TC = 1.5q + 100$ एक रैखिक लागत फलन है। एक विचारणीय बात यह है कि इस फलन से यह प्रतीत होता है कि फर्म अपना उत्पाद जितना चाहे बढ़ा सकती है। परंतु ऐसा नहीं होता। यदि हम एक छोटे अंतराल में देखें तो किसी भी फर्म की उत्पादन क्षमता सीमित होती है। इसके अनेक कारण हो सकते हैं जैसे कि कारखाने मशीनरी और अन्य उपकरणों का परिमाण इत्यादि। इसी प्रकार $TC = 0.02q^2 + 1.5q + 100$ एक द्विघातीय लागत फलन है। यह फलन ऊपर दिए रैखिक फलन जैसा ही है सिवाय इसके कि इसमें एक दो घात वाला पद $0.02q^2$ भी सम्मिलित है। इस कारण से यह एक परवलय के आकार का वक्र बन जाता है जिसमें उत्पाद बढ़ने से लागत में तेज़ी से ऊपर की ओर वृद्धि होती है। यह वक्र हमें इस तथ्य से अवगत करवाता है कि यदि किसी फर्म की उत्पादक क्षमता बढ़ाई जाए तो उसकी लागत भी तेज़ी से बढ़ती है। आईए अब हम इस फर्म के राजस्व या आगम पक्ष पर नज़र डालें। मान लीजिए यह फर्म एक एकाधिकारी फर्म है अर्थात् किसी विशेष उत्पाद की यह अकेली आपूर्तिकर्ता या उत्पादक है। हम पाते हैं कि यदि यह फर्म उत्तरोत्तर उत्पाद की कीमत को कम करती है तो इसकी आगम बढ़ जाएगी। कुछ समय पश्चात् इसका आगम बढ़ेगा परंतु उसके बढ़ने की दर कम हो जाएगी। तत्पश्चात्, एक सीमा के बाद आगम कम होना शुरू हो जाता है क्योंकि कम कीमत पर सामान बेचने से होने वाली आगम की हानि, अधिक मात्रा में होने वाली बिक्री से प्राप्त आगम की तुलना में अधिक होने लगती है। इस प्रकार के आगम फलन को ठीक-ठीक निरूपित करने वाला एक फलन, द्विघाती आगम फलन, $TR = aq^2 + bq$ है। हम यहाँ a को एक ऋणात्मक प्राचल के रूप में लेते हैं। साथ ही यहाँ कोई अचर पद नहीं लिया गया अर्थात् $c = 0$ है, क्योंकि हम मानते हैं कि यदि उत्पाद की बिक्री शून्य होगी तो फर्म को कोई आगम प्राप्त नहीं होगी। अतः, यदि $q = 0$ है, तो $TR = 0$ होगा। इस प्रकार के कुल आगम फलन का एक उदाहरण है :

$$TR = -0.12q^2 + 10q.$$

यदि हम इस फलन का आलेख बनाएं तो हम पाएंगे कि कुल आगम अधिकतम होती है जब उत्पाद q लगभग 42 हो। यह सीमांत आगम को 0 के बराबर रखकर प्राप्त किया जा सकता है।

बोध प्रश्न 1

1) एक रैखिक समीकरण और एक रैखिक फलन के बीच अंतर स्पष्ट कीजिए।

....

....

....

....

....

....

....

2) किसी रैखिक फलन की ऐसी दो विशेषताएं बताईए जो इसे एक अरैखिक फलन से अलग करती हैं।

....

....

....

....

....

....

3) एक द्विघात फलन के आलेख की विशेषताओं का वर्णन कीजिए।

....

....

....

....

....

....

4.4 त्रिघातीय एवं बहुपदीय फलन [Cubic and Polynomial Functions]

इस अनुच्छेद में उन स्थितियों की चर्चा करेंगे जिनमें चर की घात 3 या अधिक होती है। उपअनुच्छेद 4.4.1 में, हम घात 3 वाले फलनों एवं उपअनुच्छेद 4.4.2 में व्यापक बहुपद फलनों की चर्चा करेंगे।

4.4.1 त्रिघातीय फलन [Cubic Functions]

एक त्रिघातीय फलन एक त्रिघातीय समीकरण द्वारा व्यक्त किया जाता है जिसका व्यापक रूप हैं

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

जहाँ a, b, c और d अचर हैं। किसी त्रिघातीय (घात 3 वाले) समीकरण को हल करने का व्यापक सूत्र उपलब्ध नहीं है। परंतु इसका आलेख बनाकर इस प्रकार प्राप्त वक्र के अक्षों के साथ उभयनिष्ठ बिंदु ज्ञात करके इसका निकटतम हल निकाला जा सकता है। घात 3 वाले/त्रिघातीय फलनों के प्रमुख गुण इस प्रकार हैं :

1) किसी त्रिघातीय फलन के आलेख में या तो कोई भी turning point नहीं होगा या दो turning point होंगे।

2) एक त्रिघातीय फलन का एक मूल होगा या फिर तीन मूल होंगे।

द्विघातीय फलन की तरह त्रिघातीय फलन के गुणनखंड करना सरल नहीं होता। एक त्रिघातीय फलन का आलेख सामान्यतः एक S-आकार का वक्र होता है। अर्थशास्त्र में

ऐसे कई संदर्भ आते हैं जहाँ त्रिघातीय फलन उपयोगी सिद्ध होते हैं। जिस प्रकार हमने पिछले अनुच्छेद में एक द्विघातीय लागत फलन का उदाहरण लिया, उसी प्रकार हम त्रिघातीय लागत फलन भी ले सकते हैं। उदाहरण के लिए निम्न प्रकार का कुल लागत फलन लीजिए :

$$TC = 2q^3 - 15q^2 + 50q + 50$$

इस फलन का आलेख एक वर्धमान फलन होगा। प्रारंभ में q के छोटे मानों के लिए (लगभग q = 1.5 तक) इसका ढाल कम होगा अर्थात् यह थोड़ा क्षैतिज होगा परंतु q के मानों के एक अंतराल में (लगभग q = 1.5 से लेकर q = 2.5 तक) इसका ढाल अधिक हो जाएगा अर्थात् इस अंतराल में उत्पादन अधिक होगा। q के और बढ़े मानों के लिए (विशेषकर $q = 5$ के पश्चात्) इसका ढाल अत्यंत अधिक हो जाएगा।

4.4.2 व्यापक बहुपद फलन [General Polynomial Functions]

द्विघातीय तथा त्रिघातीय फलन, फलनों के एक विशेष वर्ग में आते हैं जिन्हें बहुपद कहा जाता है। एक चर में किसी बहुपद फलन का व्यापक रूप

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2}\, x^{n-2} + \ldots a_1 x^1 + a_0 x^0$$

होता है, जहाँ a_0, a_1, . . . , a_n अचर हैं। किसी बहुपद की घात उसमें उपस्थित चर, जैसे कि x, की अधिकतम घात के बराबर होती है। अतः, एक द्विघाती फलन घात 2 का बहुपद है और त्रिघाती फलन घात 3 का बहुपद। शब्द 'बहुपद' का अर्थ अनेक पद वाला होता है। यदि n=0 हो तो y=a_0 होगा। यदि n=1 है तो y=a_0+a_1 x होगा। इसी प्रकार n=2 लेने पर हमें y=a_0+a_1 x+a_2x^2 प्राप्त होता है। इनमें से पहले फलन को अचर फलन कहते हैं, दूसरे को रैखिक फलन तथा तीसरे को द्विघाती फलन कहते हैं। हम यहाँ बहुपद फलनों पर और विस्तार से चर्चा नहीं कर पाएंगे परंतु पाठकों को यह ज्ञात होना चाहिए कि बहुपद फलनों के आलेख सतत होते हैं इनमें किसी प्रकार के विखंडन या उछाल नहीं होते। अतः, इन फलनों के आलेख ज्ञात बिंदुओं को मिलाकर सरलता से बनाए जा सकते हैं और इन आलेखों की मदद से इनके मूल तथा वर्तन बिन्दु प्राप्त किए जा सकते हैं।

बोध प्रश्न 2

1) एक त्रिघाती फलन से आप क्या समझते हैं? इन फलनों के हल (मूल) ज्ञात करने की विधियों के बारे में बताईए?

....

....

....

....

....

....

....

2) बहुपद क्या होते हैं?

....

....

....

....

....

3) किसी त्रिघाती फलन का आकार कैसा होता है? किस प्रकार के अर्थशास्त्रीय संबंधों को त्रिघातीय फलनों से व्यक्त किया जा सकता है।

....

....

....

....

....

4.5 चरघातांकीय, लघुगणकीय तथा घातीय फलन [Exponential, Logarithmic and Power Functions]

इस अनुच्छेद में हम फलनों के एक अलग वर्ग की ओर चलते हैं। हम अब दो फलनों, चरघातांकीय फलन तथा लघुगणकीय फलन की बात करेंगे। ये दोनों ही फलन अबीजीय फलन हैं क्योंकि न तो ये रैखिक फलन हैं, न ही बहुपदीय फलन। चरघातांकीय तथा लघुगणकीय फलनों को transcendent (बीजातीत) फलन भी कहा जाता है क्योंकि ये बीजीय संबंधों से परे हैं। इस अनुच्छेद में सम्मिलित किए गए तीसरे प्रकार के फलन घातीय फलन हैं। ये फलन चरघातांकीय फलनों से संबंधित हैं फिर भी बीजीय फलन हैं। आईए हम चरघातांकीय फलनों से प्रारंभ करें।

4.5.1 चरघातांकीय फलन [Exponential Functions]

एक चरघातांकीय फलन में स्वतंत्र चर एक घातांक के रूप में उपस्थित होता है। एक चर वाले एक चरघातांकीय का व्यापक रूप

$$y = f(x) = b^x$$

के प्रकार का होता है जहाँ b को आधार कहते हैं तथा इसे 1 से बड़ी संख्या माना जाता है, अर्थात् $b > 1$ होता है और $x \in R$ होता है। जब $x = 0$ हो तो किसी भी आधार b के लिए $y = b = 1$ होगा। जब $b > 1$ हो, तो x का मान बढ़ने पर b^x का मान भी बढ़ता है।

टिप्पणी : यहाँ हमने $b > 1$ लेकर, b पर प्रतिबंध लगाया है। ध्यान दें कि $b = 0$ या $b = 1$ लेने पर हमें अचर फलन क्रमशः $y = 0$ तथा $y = 1$ प्राप्त होते हैं। इसी प्रकार यदि हम $b < 0$

लें तो हमें $\sqrt{-b}$ के प्रकार का एक समिश्र मान वाला फलन प्राप्त हो सकता है। इसके अतिरिक्त, यदि $0 < b < 1$ हो तो हम b^x को एक ऐसे व्यंजक में बदल सकते हैं जिसमें $b < 1$ हो। उदाहरण के लिए यदि $b = 0.5$ और $x = 2$ है तो इन मानों को चरघातांकीय फलन में रखने पर हमें प्राप्त होता है $y = (0.5)^2$ जिसे हम $(½)^2 = 2^{-2}$ के रूप में लिख सकते है। इस प्रकार $b = 2 > 1$ तथा $x < 0$ हो जाता है। क्योंकि $x \in R$ है, यह चरघातांकीय फलन की एक मान्य स्थिति है।

चरघातांकीय फलनों की अर्थशास्त्रीय विश्लेषण में एक विशेष भूमिका है। इस फलन का उपयोग समय के सापेक्ष किसी चर की वृद्धि को व्यक्त करने के लिए अक्सर किया जाता है। चरघातांकीय फलन एक अन्य संबंधित समस्या का हल ढूंढने भी एक महत्वपूर्ण भूमिका निभाते हैं। वह है – भविष्य में किए जाने वाले किसी भुगतान का वर्तमान मान ज्ञात करना। चरघातांकीय फलन आवश्यक रूप से एक दिष्ट होते हैं, अतः ये फलन सदा एकैकी होते हैं। हम जानते हैं कि प्रत्येक एकैकी फलन का प्रतिलोम होता है। एक चरघातांकीय फलन के प्रतिलोम फलन को लघुगणकीय फलन कहते हैं। अगले उपअनुच्छेद में हम लघुगणकीय फलनों के बारे में चर्चा करेंगे। अर्थशास्त्रीय विश्लेषण में लघुगणकीय फलनों के अनेक उपयोग हैं जिनमें अरैखिक **संबंधों/समीकरणों** को रैखिक व्यंजकों में परिवर्ति करना विशेष रूप से उल्लेखनीय है क्योंकि रैखिक समीकरणों के हल ज्ञात करना अपेक्षाकृत सरल होता है। इसी प्रकार अचर लोच वाले किसी अर्थशास्त्रीय फलन के निरूपण में भी लघुगणकी फलन सहायक सिद्ध होते हैं।

4.5.2 लघुगणकीय फलन [Logarithmic Functions]

प्रत्येक चरघातांकीय फलन का प्रतिलोम होता है, क्योंकि चरघातांकीय फलन निरंतर एकदिष्ट होने के कारण सदा एकैकी होते हैं। किसी भी चरघातांकीय फलन के प्रतिलोम फलन को लघुगणकीय फलन कहते हैं। इस प्रकार हमें चरघातांकीय फलनों के सापेक्ष, लघुगणकीय फलनों का वर्ग प्राप्त होता है। अर्थशास्त्र में लघुगणकीय फलन अनेक प्रकार से उपयोगी सिद्ध होते हैं। इस अनुच्छेद में हम इन फलनों को परिभाषित करेंगे तथा अर्थशास्त्र में उनके होने वाले अनुप्रयोगों के उदाहरणों के माध्यम से उनके उपयोगी गुणधर्मों को स्पष्ट करेंगे।

चरघातांकीय फलन $y = b^x$ पर किसी बिंदु (i, j) के सापेक्ष, लघुगणकीय फलन $y = log_b(x)$ पर एक बिंदु (j, i) होता है। किसी चरघातांकीय फलन की भाँति ही, प्रत्येक लघुगणकीय फलन भी निरंतर एक दिष्ट (strictly monotonic) तथा वर्धमान है। लघुगणकीय फलन सर्वत्र अवतल होते हैं जबकि चरघातांकीय फलन सर्वत्र उत्तल होते हैं। हम इकाई 10 और 11 में उत्तल तथा अवतल फलनों का विस्तृत अध्ययन करेंगे। लघुगणकीय फलनों का प्रांत धनात्मक वास्तविक संख्याओं तक सीमित होता है जबकि इनका परिसर सभी वास्तविक संख्याओं का समुच्चय होता है। यह चरघातांकीय फलनों से बिल्कुल विपरीत स्थिति है। अंततः, क्योंकि प्रत्येक चरघातांकीय फलन $y = b^x$, y-अक्ष को बंदु (0,1) पर काटता है, उसी प्रकार प्रत्येक लघुगणकीय फलन $y = log_b(x)$ x-अक्ष को बिंदु (1,0) पर काटता है।

एक लघुगणकीय फलन को इस प्रकार परिभाषित किया जा सकता है : यदि $b > 1$, एक वास्तविक संख्या है तो $y = log_b(x)$ होगा, यदि $b^y = x$ हो। फलन $y = log_b(x)$ को लघुगणकीय फलन कहते हैं। $y = log_b(x)$ को इस प्रकार पढ़ते हैं 'आधार b पर, x का

लघुगणक y है। लघुगणक की इस परिभाषा से हम देख सकते है कि किसी भी आधार b के लिए $log_b\, b=1$ होगा, क्योंकि $b^1 = b$ होता है। इसी प्रकार $\log_b b^x = x$ होगा। साथ ही, प्रतिलोम फलन की परिभाषा के अनुसार हम देख सकते हैं कि $b^{\log_b(x)} = x$ होगा।

अर्थशास्त्रीय प्रतिमानों (Economic models) में प्रायः चरों को लघुगणकीय रूपान्तरण द्वारा परिवर्तित किया जाता है। एक लघुगणकीय रूपान्तरण में एक चर को, जिसके मान धनात्मक वास्तविक संख्याएं हो, उनके लघुगणकों में परिवर्तित किया जाता है। इस अनुच्छेद में हम लघुगणकीय रूपांतरणों के गुणधर्मों का अध्ययन करेंगे और देखेंगे कि ये किस प्रकार अर्थशास्त्रियों के लिए उपयोगी हैं। अर्थशास्त्रीय प्रतिमानों में अक्सर अरैखिक संबंधों से सामना होता है। उदाहरण के लिए वास्तविक मौद्रिक शेष को सांकेतिक मौद्रिक शेष (M) और कीमत स्तर (P) के अनुपात M/P से निरूपित किया जाता है और वास्तविक विनिमय दर, मौद्रिक विनिमय दर (E) तथा बाह्य/विदेशी कीमत स्तर ($P*$) के गुणनफल को घरेलू कीमत स्तर (P) से भाग कर के प्राप्त होती है (अर्थात् $EP*/P$ के बराबर हेाती है)।

चरों के बीच अरैखिक संबंधों को उनके लघुगणकों के बीच रैखिक संबंधों से व्यक्त किया जा सकता है। चरों में रैखिक संबंध वाले बहु-समीकरण प्रतिमानों की तुलना में ऐसे बहु-समीकरण प्रतिमानों को हल करना अधिक कठिन होता है जिनमें गुणनफल या भागफल सम्मिलित हो। अतः, ऐसे प्रतिमानों में सम्मिलित चरों को उनके लघुगणकों के पदों में व्यक्त करना विश्लेषण को सरल बनाने में उपयोगी सिद्ध होता है। हम सर्वप्रथम दो चरों के लघुगणकों और उनके गुणनफल के लघुगणकों के बीच के संबंध से प्रारंभ करते हैं। किसी फर्म, R, का आगम उसके द्वारा उत्पादित वस्तु की कीमत P तथा उस वस्तु की बेची गई मात्रा Q के गुणनफल के बराबर होता है। हम सुविधा के लिए चरों को बड़े अक्षरों तथा उनके लघुगणकों को छोटे अक्षरों से व्यक्त करते हैं। अतः, $q = \log_b (Q)$ तथा $p = \log_b (P)$ लेते हैं। लघुगणकों की परिभाषा के अनुसार हम पाते हैं कि $Q = b^q$ और $P = b^p$ होगा। अतः, हमें प्राप्त होता है :

$$R = PQ = b^p b^q = b^{p+q}$$

आधार b पर दोनों पक्षों का लघुगणक ज्ञात करने पर हमें प्राप्त होता है :

$$\log_b PQ = \log_b (b)^{p+q}$$

$$\log_b (PQ) = p + q \qquad [\because \log_b b^x = x]$$

$$\therefore \log_b PQ = \log_b(P) + \log_b(Q)$$

व्यापक नियम इस प्रकार है :

किसी गुणनफलन का लघुगणकीय रूपांतरण किन्हीं दो धनात्मक चरों X और Y के लिए

$$\log_b (XY) = \log_b (X) + \log_b (Y). \_$$

इसी प्रकार हम दो चरों के भागफल के लघुगणकों के लिए भी नियम ज्ञात कर सकते हैं। इस नियम को स्पष्ट करने के लिए हम, वास्तविक मौद्रिक शेष M/P, सांकेतिक मौद्रिक शेष M के लघुगणक, $m = \log_b (M)$ तथा कीमत, P के लघुगणक $p = \log_b$

(P) के बीच संबंध निर्धारित करते है। ध्यान दें कि $M = b^m$ तथा $P = b^p$ है। वास्तविक संतुलन को हम निम्न प्रकार से व्यक्त करते हैं :

$$\frac{M}{P} = \frac{b^m}{b^p} = b^{m-p}$$

जिससे हमें प्राप्त होता है :

$$\log_b(M/P) = \log_b(M) - \log_b(P)$$

व्यापक नियम इस प्रकार है :

किसी भागफल का लघुगणकीय रूपांतरण : किन्हीं भी दो धनात्मक चरों X और Y के लिए

$$\log_b\left(\frac{X}{Y}\right) = \log_b(X) - \log_b(Y)$$

इसी प्रकार चरघातांक भी अर्थशास्त्रीय प्रतिरूपण में अक्सर प्रयोग किए जाते हैं। कॉब–डगलस उत्पादन फलन जो कि प्रति मज़दूर उत्पाद (Q) और प्रति मज़दूर पूँजी (K) के बीच संबंध दर्शाता है, निम्न प्रकार से व्यक्त किया जा सकता है :

$$Q = K^\alpha$$

इसे गहन कॉब–डगलस उत्पादन फलन भी कहा जाता है

इस संबंध का लघुगणकीय रूपांतरण लघुगणक की परिभाषा तथा ऊपर दिए नियमों के अनुसार प्राप्त किया जा सकता है। एक चर Z लीजिए जो K^α के आधार b पर लघुगणक के बराबर हो। अर्थात्

$$Z = \log_b\left(K^\alpha\right)$$

अब मान लीजिए

$$k = \log_b(K)$$

है। अतः लघुगणकों के नियमों के प्रयोग से हम पाते हैं कि

$$K = b^k$$

अब, $\log_b(K^\alpha)$ लीजिए और इस व्यंजक में $K = b^k$ रखिए। इस प्रकार हम पाते हैं कि

$$\log_b(b^k)^\alpha$$

$$= \log_b(b^{\alpha k})$$

$$= \alpha k \qquad [\because \log_b b^x = x]$$

$$= \alpha \log_b(K)$$

अतः, हम अंततः प्राप्त करते हैं : $\log_b(K^\alpha) = \alpha \log_b(K)$

इस नियम का व्यापक रूप इस प्रकार है :

किसी चरघातांक का लघुगणक : किसी भी धनात्मक चर X और किसी भी मान λ के लिए,

$$\log_b\left(X^{\lambda}\right)=\lambda\log_b\left(X\right)$$

ऊपर दिए नियमों को आवश्यकता अनुसार मिलाया भी जा सकता हैं। उदाहरण के लिए, वास्तविक विनिमय दर (*RER*) $RER = EP^*/P$ का लघुगणक

$\log_b\left(RER\right)=\log_b\left(E\right)+\log_b\left(P^*\right)-\log_b\left(P\right)$ है। इसी प्रकार, जब उत्पादन (*Y*) को तकनीक

(*A*), श्रम (*L*) और पूँजी (*C*) के पदों में व्यक्त किया जाता है तो हमें फलन $Y = AL^{\alpha}C^{\beta}$ प्राप्त होता है। अतः, तकनीक, श्रम और पूँजी लघुगणकों में निम्नलिखित संबंध होता है

$$\log_b Y=\log_b A+\alpha\log_b L+\beta\log_b C$$

विभिन्न आधारों पर लघुगणकों में संबंध

अभी तक दिए गए नियम उन लघुगणकों से संबंधित है जो एक ही आधार पर हों। हम विभिन्न आधार वाले लघुगणकों के बीच में भी संबंध प्राप्त कर सकते हैं। मान लीजिए $\log_J H$, चर *H* का आधार *J* पर तथा $\log_W H$, चर *H* का आधार *W* पर लघुगणक है। मान लीजिए $H = J^S$ है। अतः $s = \log_J H$ होगा। अब आधार *W* पर *H* का लघुगणक, $\log_W H$ इस प्रकार लिखा जा सकता है :

$$\log_W H = \log_W J^s$$

$$\log_W H = s\log_W J$$

का मान रखने पर हम प्राप्त करते हैं

$$\log_W H=\log_W J.\log_J H$$

जिसे

$$\frac{\log_W H}{\log_J H}=\log_W J$$

के रूप में लिखा जा सकता है।

इस प्रकार हमें एक व्यापक नियम प्राप्त होता है जिसे इस प्रकार व्यक्त किया जा सकता है :

यदि $W<J$ है, तो

$$\log_W J>1$$

होगा। अतः,

$$\frac{\log_W H}{\log_J H}\geq 1$$

अर्थात्

$$\left|\log_W H\right|\geq\left|\log_J H\right|$$

यहाँ $|x|$ का प्रयोग x के निरपेक्ष मान के लिए किया गया है।

प्राकृतिक लघुगणक

यदि किसी लघुगणक का आधार e लिया जाए तो इस लघुगणक को प्राकृतिक लघुगणक कहते हैं। किसी चर x के प्राकृतिक लघुगणक को $\log_e(x)$ या अधिकांश $\ln(x)$ के रूप में लिखा जाता है। प्राकृतिक लघुगणक, अर्थशास्त्र में के कई अनुप्रयोगों में विशेष रूप से उपयोगी सिद्ध होता है।

ऊपर दिए गए लघुगणकों के सभी नियम प्राकृतिक लघुगणकों के लिए भी मान्य हैं क्योंकि प्राकृतिक लघुगणक भी एक लघुगणक ही है। केवल इसमें आधार एक विशेष संख्या e को लिया जाता है। इसलिए प्राकृतिक लघुगणकों के लिए हमें निम्नलिखित नियम प्राप्त होते हैं।

प्राकृतिक लघुगणकों के नियम : किसी भी चर Z तथा किन्ही भी धनात्मक चरों X और Y के लिए :

i) $\ln\left(e^Z\right) = Z$

ii) $e^{\ln X} = X$

iii) $\ln XY = \ln X + \ln Y$

iv) $\ln\left(\dfrac{X}{Y}\right) = \ln X - \ln Y$

iv) $\ln X^Z = Z \ln X$

4.5.3 घातांकीय फलन [Power Functions]

एक घातांकीय फलन का व्यापक रूप $f(x) = kx^r$ होता है जहाँ k और r कोई भी अचर हो सकते हैं। प्राचल r को फलन का घातांक (exponent) कहते हैं। हमें घातांकीय फलन और चलघातांकीय फलन के अंतर को स्पष्ट रूप से समझ लेना चाहिए। एक चरघातांकीय फलन में, आधार एक अचर होता है जबकि घातांक (exponent) एक चर होता है। अर्थात् इस फलन में चर घातांक के रूप में उपस्थित होता है। दूसरी ओर एक घातांकीय फलन में आधार चर तथा घातांक एक प्राचल होता है अर्थात् इस फलन में स्वतंत्र चर आधार में होता है। घातांकीय फलन का उपयोग करने में घातांक से संबंधित नियम सहायक सिद्ध होते हैं।

4.6 अतिपरवलय फलन [Hyperbolic Functions]

अतिपरवलय की आधार भूत संकल्पना इस प्रकार हैः कोई भी फलन जो समीकरण $y = \dfrac{a}{bx + c}$ से व्यक्त किया जाता है, एक अतिपरवलय फलन कहलाता है। यहाँ a, b और c अचर हैं। $y = \dfrac{1}{x}$ अतिपरवलय फलन का सरलतम रूप है। ध्यान दें कि इस फलन में $a = 1$, $b = 1$ तथा $c = 0$ है। यह एक समकोणीय अतिपरवलय फलन कहलाता है। $y = \dfrac{1}{x}$ का आलेख बनाने से पूर्व ध्यान दें कि यह फलन $x = 0$ के लिए परिभाषित नहीं है अर्थात् $x = 0$ के लिए y का कोई भी मान प्राप्त नहीं होगा। अतः इस फलन के

आलेख पर कोई भी ऐसा बिंदु नहीं हो सकता जिसमें $x = 0$ हो। अर्थात् इस फलन का वक्र x-अक्ष को कभी नहीं काटेगा। इसी प्रकार हम यह भी देख सकते हैं कि यह वक्र y-अक्ष को भी कभी नहीं काटता। यदि हम $x = 0$ के पास x के कुछ मान लें तो हमें y के विभिन्न मान प्राप्त होंगे। नीचे दी गई तालिका में x के कुछ मान और उसके संगत y के कुछ मान दिए गए हैं :

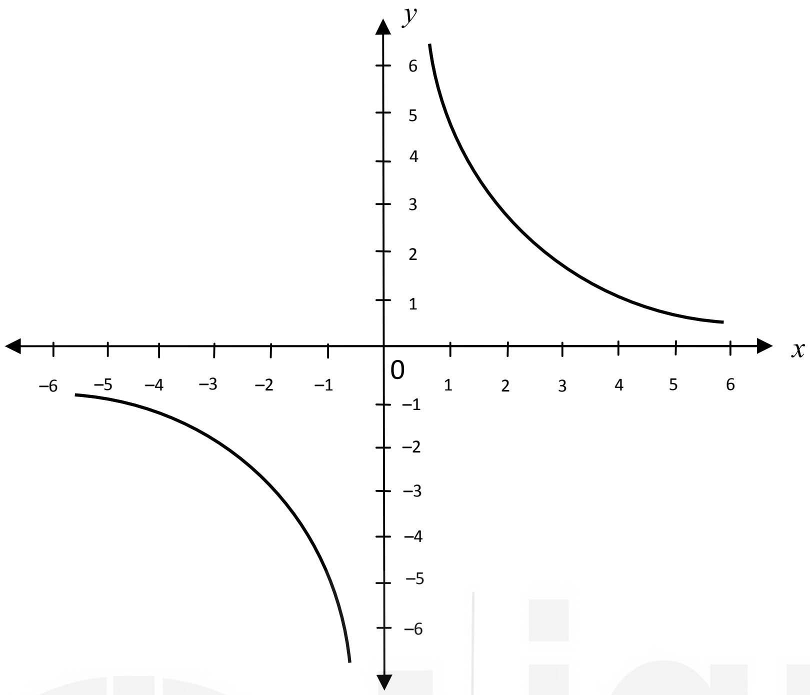
तालिका : x के दिए हुए मानों के सापेक्ष y के मान

x	$y = \frac{1}{x}$
-2	-0.5
-1.5	-0.67
-1	-1
-0.5	-2
0	undefined
0.5	2
1	1
1.5	0.67
2	0.5

इस तालिका में हमने स्पष्ट रूप में दर्शाया है कि $x = 0$ के लिए y अपरिभाषित है। यह $y = \frac{1}{x}$ का एक विशेष गुण है। इसी प्रकार समकोणीय अतिपरवलय के समीकरण $y = \frac{1}{x}$ में हम इसकी एक और विशिष्टता देख सकते हैं। यह गुणधर्म है कि x और y विलोम रूप से संबंधित हैं।

x का मान जितना छोटा होगा, y का मान उतना ही अधिक होगा। यह परिणाम x के ऋणात्मक मानों के लिए भी सत्य है। ऐसा इसलिए है कि x के बड़े निरपेक्ष मान के संगत y का निरपेक्ष मान छोटा होता है। जब x धनात्मक होता है, तो जैसे–जैसे x का मान बढ़ता है, y

का मान वैसे-वैसे ही कम होता जाता है। अतः वक्र x-अक्ष के समीप आता जाता है। परंतु यह वक्र कभी x-अक्ष को स्पर्श नहीं करता। x का मान कितना भी बड़ा हो जाए, y का मान 0 से बड़ा ही रहता है, यह कभी 0 के बराबर नहीं होता। x-अक्ष को स्पर्श करने के लिए y=0 होना चाहिए। हम y को x-अक्ष के जितना चाहें पास ला सकते हैं, परंतु कभी भी 0 नहीं बना सकते। अतः, हम कह सकते है कि जब y, 0 की ओर आता है अर्थात् जब x, ∞ की ओर जाता है तो y की सीमा 0 के बराबर होती है। अर्थात् y की सीमा 0 है (हम इकाई 7 में सीमाओं के बारे में अध्ययन करेंगे। यही परिणाम x के ऋणात्मक, मानों के लिए भी सत्य होगा। रेखाचित्र 4.1 में यह देखा जा सकता है। इस रेखाचित्र में हम देख सकते हैं कि x-अक्ष एक क्षैतिज अनंतस्पर्शी रेखा है और y-अक्ष इसकी एक ऊर्ध्वा अनंतस्पर्शी रेखा है।



रेखाचित्र 4.1

किसी वक्र की अनंतस्पर्शी रेखा एक ऐसी रेखा होती है जिसकी वक्र से दूरी 0 की ओर जाती है। इसी प्रकार हम रेखाचित्र 4.1 में यह भी देख सकते हैं कि समकोणीय अतिपरवलय का वक्र $x = 0$ पर संतत नहीं है। (हम इकाई 8 में संतत एवं असंतत फलनों के बारे में पढ़ेंगे)।

अतिपरवलय फलन का व्यापक रूप $y = \frac{a}{bx+c}$ होता है। इसका आलेख भी $y = \frac{1}{x}$ के प्रकार का ही होता है। परंतु $y = \frac{a}{bx+c}$ का वक्र $bx + c = 0$ अर्थात् $x = \frac{-c}{b}$ पर परिभाषित नहीं होता। $y = \frac{a}{bx+c}$ के प्रकार फलन औसत लागत वक्र तथा आपूर्ति एवं माँग फलनों को चित्रित करने में उपयोगी सिद्ध होते हैं। समकोणीय अतिपरवलय अर्थशास्त्रीय अनुप्रयोगों में अक्सर देखने को मिलते हैं। प्रतिलोम माँग फलन $p = \frac{15}{q^D}$ पर विचार करें। यह एक अतिपरवलय फलन है। माँग फलन में कीमत को ऊर्ध्वा अक्ष पर तथ माँग की मात्रा x-अक्ष पर अंकित किया जाता है। x-अक्ष और y-अक्ष इस वक्र के लिए अनंतस्पर्शी रेखाएं हैं। यहाँ से अर्थशास्त्रीय की दृष्टि से तीन महत्वपूर्ण परिणाम प्राप्त कर सकते हैं। पहला, कीमत जितनी भी अधिक हो जाए, उपभोक्ता उपभोग को कभी भी शून्य नहीं करेगा और वस्तु की कुछ न कुछ मात्रा अवश्य खरीदेगा। दूसरे, चाहे किसी वस्तु की कीमत कम होने पर उसकी कुछ अधिक मात्रा अवश्य खरीदेगा। वह कभी भी संतृप्त नहीं होता।

तीसरे बिंदु को माँग फलन के समीकरण

$$p = \frac{k}{q^d}$$

में देखा जा सकता है। इस समीकरण को q^d से गुणा करने पर हमें $pq^d = k$ प्राप्त होता है। अतः, हम देख सकते हैं कि कुल व्यय, अर्थात् कीमत और उपभोग की गई मात्रा का गुणनफलन सदैव समान रहता है। यह वस्तु की कीमत और उपभोग की गई मात्रा के साथ नहीं बदलता। हम व्यष्टि अर्थशास्त्र के नियमों से भी यह जानते हैं कि ऐसे माँग वक्र के सभी बिंदुओं पर माँग की लोच समान रहती है।

बोध प्रश्न 3

1) चरघातांकीय तथा घातांकीय फलनों में अंतर स्पष्ट कीजिए।

....

....

....

....

....

2) लघुगणक से आप क्या समझते हैं? एक लघुगणकीय फलन तथा एक चरघातांकीय फलन में क्या संबंध है?

....

....

....

....

....

3) अतिपरवलय फलन से आप क्या समझते हैं? किसी अतिपरवलय माँग फलन की विशिष्टताएं बताईए।

....

....

....

....

....

4.7 सार-संक्षेप

इस इकाई का लक्ष्य गणित तथा अर्थशास्त्र में प्रयोग होने वाले विभिन्न प्रकार के फलनों से पाठक को अवगत करवाना था। इस इकाई में हमने इकाई 2 में की गई चर्चा को आगे बढ़ाया। इकाई 2 में फलनों के सामान्य रूप और गुणों की चर्चा की गई थी। इस

इकाई में हमने फलनों को चरों के बीच संबंध के रूप में देखा। हमने इस इकाई का प्रारंभ चर, अचर तथा प्राचल की परिभाषा से किया। समीकरणों और सर्वसमिकाओं की भी व्याख्या की गई। इसी प्रकार अंतर्जातीय तथा बहिर्जातीय चरों को भी परिभाषित किया गया, तथा एक समीकरण और एक फलन के बीच अंतर भी स्पष्ट किया गया।

इसके पश्चात् इस इकाई में विभिन्न प्रकार के फलनों की चर्चा की गई। फलनों को दो प्रकार से वर्गीकृत किया गया : रैखिक एवं अरैखिक फलन तथा बीजीय तथा अबीजीय फलन। हमने यह भी जाना कि किसी फलन का ढाल तथा अक्ष- अन्तः खंड क्या होते हैं। हमने देखा कि किसी रैखीय फलन का ढाल प्रत्येक बिंदु पर समान होता है। यह एक ऐसा विशिष्ट लक्षण है जो एक रैखिक फलन को एक अरैखिक फलन से अलग करता है। एक रैखिक फलन में चरों की घात केवल 1 हो सकती है और कुछ नहीं। इसके पश्चात् हमने ऐसे फलनों का अध्ययन किया जिनमें चरों की घात दो (द्विघातीय फलन), तीन (त्रिघातीय फलन) या और अधिक (व्यापक बहुपद फलन) हो सकती है।

इसके पश्चात्, अन्य अनुच्छेदों में हमने, चरघातांकीय फलनों के बारे में चर्चा की जिनमें स्वतंत्र चर एक घातांक के रूप में होता है। चरघातांकीय फलनों में एक निश्चित आधार का एक चर घातांक होता है। ये फलन घातांकीय फलनों से भिन्न होते है। जिन्हें हमने इस इकाई में बाद में पढ़ा। इस इकाई में लघुगणकीय फलनों के बारे में विस्तार से चर्चा की गई। लघुगणकीय फलन, चरघातांकीय फलनों के प्रतिलोम फलन होते हैं। चरघातांकीय फलन $y = a^x$ का प्रतिलोम फलन $x = a^y$ है। लघुगणकीय फलन $y = \log_a x$ को चरघातांकीय फलन $x = a^y$ के समतुल्य परिभाषित किया गया। चरघातांकीय तथा लघुगणकीय फलन, अबीजीय फलनों के उदाहरण हैं क्योंकि यह बीजीय संबंधों से परे हैं। अंत में हमने अतिपरवलय फलनों और अर्थशास्त्र में उनके अनुप्रयोगों पर चर्चा की। पाठकों से आग्रह है कि वे इस इकाई के साथ इकाई 5 भी अवश्य पढ़ें। दो इकाईयों को साथ–साथ पढ़ने से उन्हें विषय और विभिन्न संकल्पनाओं को और ठीक से समझने में सहायता मिलेगी।

4.8 बोध प्रश्नों के उत्तर/संकेत

बोध प्रश्न 1

1) $ax + b = c$ द्वारा दर्शाए गए रैखिक समीकरण से x का अद्वितीय मान a,b,c नामक प्राचलों के रूप में मिल जाता है। किंतु रैखिक फलन प्रायः $y = ax + b$ के रूप में होता है। यहां x का कोई एक अद्वितीय मान नहीं होता, वस्तुतः x और y के अनेक संयोजन इस फलन को संतुष्ट कर सकते है।

2)

रैखिक फलन	गैर-रैखिक फलन
1. चर x की घात केवल इकाई होती है	1. चर x की घात इकाई से कम या अधिक होती है
2. इसका रेखांकन स्थिर ढाल वाली सरल रेखा होगा- x में एक इकाई की कमी या वृद्धि से y में एक समान इकाइयों का परिवर्तन होता है।	2. रेखांकन सरल रेखीय नहीं रहता और x में एक इकाई परिवर्तन से y में होने वाले परिवर्तन भी एक समान नहीं रहते।

3) भाग 4.3 देखें ओर अपना उत्तर लिखें।

बोध प्रश्न 2

1) भाग 4.4.1 देखें और उत्तर लिखें

2) भाग 4.4.2 देखें और उत्तर लिखें

3) प्रायः घन घातीय फलन S आकार का वक्र बनाता है। अर्थशास्त्र में इसके अनेक उदाहरण है : कुल उत्पाद फलन, कुल लागत फलन

बोध-प्रश्न 3

1) एक घातांकीय फलन को $y = x^n$ द्वारा दर्शाते हैं जहाँ x आधार तथा n उसका घातांक होता है। इसके विपरीत चरघातीय फलन $y = n^x$ में चर को घातांक और स्थिर अंक को आधार माना जाता है।

2) भाग 4.5.2 देखकर पहले भाग का उत्तर लिखें। समीकरण $y = \log_b x$ वस्तुतः $x = b^y$ के समतुल्य ही है, जहाँ $b > 0, b \neq 1$

3) देखें भाग 4.6 और अपना उत्तर लिखें।