इकाई 2 संबंध एवं फलन*

संरचना

2.0 उद्देश्य

2.1 विषय-प्रवेश

2.2 क्रमित युग्म तथा कार्तीय गुणन (Ordered Pairs and Cartesian Products)

2.2.1 क्रमित युग्म (Ordered Pairs)

2.2.2 समुच्चयों का कार्तीय गुणन (Cartesian Product of Sets)

2.3 संबंध (Relations)

2.3.1 संबंधों के प्रांत एवं परिसर (Domain and Range of Relations)

2.3.2 संबंधों के गुणधर्म (Properties of Relations)

2.3.3 विशिष्ट संबंध (Special Relations)

2.4 फलन (Functions)

2.4.1 फलन का प्रांत, परिसर, लक्ष्य और सहप्रांत (Domain, Range, Target and Codomain of a Function)

2.4.2 एकैकी, आच्छादी एवं एकैकी आच्छादी फलन (Injective, Surjective, Bijective Functions)

2.4.3 फलनों के अंतर्गत समुच्चयों के प्रतिबिंब तथा प्रतिलोम प्रतिबिंब (Image and Inverse Image of Sets under Functions)

2.5 वास्तविक वितान तथा बिंदु समुच्चय (Real Space and Point-Sets)

2.6 संगतता तथा समुच्चय-फलन (Correspondence and Set Functions)

2.6.1 संगतता (Correspondence)

2.6.2 समुच्चय फलन (Set-functions)

2.7 सार-संक्षेप

2.8 बोध प्रश्नों के उत्तर/संकेत

2.0 उद्देश्य

पिछले इकाई में हमने समुच्चयों के बारे में पढ़ा। इस इकाई में समुच्चयों के संयोजन की विधियों के बारे में जानकारी प्राप्त करेंगे और देखेंगे कि समुच्चयों के संयोजन से किस प्रकार नए समुच्चय प्राप्त होते हैं। इस इकाई को पढ़ने के पश्चात् आप समर्थ हो जाएंगे :

- दो समुच्चयों का कार्तीय गुणन ज्ञात करने में;
- संबंधों और फलनों की अवधारणाओं का समझने में;
- फलनों एवं संगतता के अंतर को समझने में;
- वास्तविक वितान तथा बिंदु-समुच्चयों की संकल्पनाओं को समझने में; तथा
- समुच्चय-फलनों की संकलपना को समझने में।

*श्री अनूप चटर्जी

2.1 विषय-प्रवेश

पिछली इकाई में, जो कि इस पाठ्यक्रम की पहली इकाई थी, पाठकों को समुच्चयों की अवधारणा से अवगत करवाया गया जोकि इस पाठ्यक्रम के आधारभूत संदर्भ हैं। हमने उपसमुच्चय, अधिसमुच्चय तथा घात समुच्चय के बारे में भी जानकारी प्राप्त की। यह इकाई पूर्णतः पिछली इकाई में विकसित की गई संकल्पनाओं पर आधारित है। पिछली इकाई में पाठकों को समुच्चयों पर की जाने वाली संक्रियाओं जैसे कि समुच्चयों का सम्मिलन, समुच्चयों का सर्वनिष्ठ तथा समुच्चयों का अंतर आदि की भी चर्चा की गई। यह इकाई समुच्चयों पर एक और संक्रिया, समुच्चयों के गुणन से प्रारंभ होती है। इसके आधार पर हम एक महत्त्वपूर्ण संकल्पना 'संबंध' की व्याख्या करेंगे जिसे समुच्चयों के गुणनफल के उपसमुच्चय द्वारा निरूपित किया जा सकता है।

तत्पश्चात्, इस इकाई में हम फलनों की अवधारणा की व्याख्या करेंगे जो कुछ विशिष्ट प्रकार के संबंध होते हैं। फलन के कुछ नियत तत्व होते हैं जिन्हें प्रांत तथा सह-प्रांत कहते हैं। ये प्रांत तथा सहप्रांत वास्तव में समुच्चय ही होते हैं। यदि इस समुच्चयों के अवयव भी समुच्चय हों तो संगतता तथा समुच्चय फलनों की संकल्पनाओं का उदय होता है। इस सारी चर्चा के दौरान, हमें कुछ विशेष प्रकार के फलनों के बारे में जानने का भी अवसर मिलेगा। हम जानते हैं कि समुच्चय, वस्तुओं के संग्रह होते हैं। मान लीजिए, किसी समुच्चय के अवयव वास्तविक संख्याएँ हैं। इस समुच्चय को हम वास्तविक संख्याओं का समुच्चय कहते हैं। इस इकाई में वास्तविक संख्याओं के समुच्चय तथा उसके कार्तीय गुणन तथा उनके कुछ गुणधर्मों की भी चर्चा की गई है।

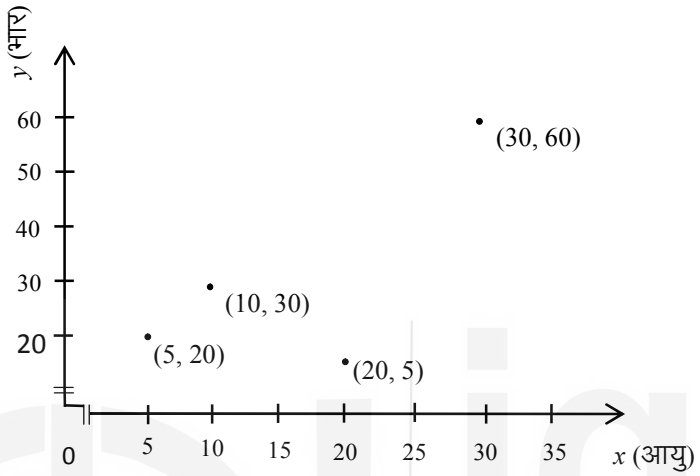
2.2 क्रमित युग्म तथा कार्तीय गुणन (Ordered Pairs and Cartesian Products)

2.2.1 क्रमित युग्म (Ordered Pairs)

जब हम किसी समुच्चय को {a, b} के रूप में लिखते हैं तो हम इस बात पर ध्यान नहीं देते कि समुच्चय के अवयवों को किस क्रम में लिखा गया है। अर्थात् समुच्चय {a, b} और समुच्चय {b, a} समान हैं। इस स्थिति में हम कहते हैं कि अवयवों (संख्याओं) a और b का युग्म {a, b} एक अक्रमित युग्म है। यदि अवयवों (संख्याओं) का क्रम महत्त्वपूर्ण हो, तो हम a और b के दो पृथक् क्रमित युग्म (a, b) तथा (b, a) प्राप्त करते हैं। ये दोनों क्रमित युग्म एक-दूसरे से अलग होते हैं, अर्थात् $(a, b) \neq (b, a)$ होता है। यद्यपि हमने यहाँ केवल क्रमित युग्मों के बारे में चर्चा की है, परंतु इसी प्रकार हम संख्याओं, अवयवों के क्रमिक त्रिक, चतुष्क अथवा पंचक भी बना सकते हैं। व्यापक रूप में, यदि हमारे पास n-अवयव/संख्याएँ $X = \{x_1, x_2, x_3 \ldots x_n\}$ हों, इस n-टपल में प्रयुक्त अवयव क्रमबद्ध हों तो, हमें एक क्रमित n-टपल प्राप्त होता है। सामान्यतः, क्रमित युग्म, त्रिक अथवा n-टपल, क्रमित समुच्चय कहलाते हैं। क्रमित समुच्चयों को मध्यम कोष्टकों {...} के स्थान पर लघु कोष्ठकों (...) द्वारा व्यक्त किया जाता है। अब हम क्रमित युग्मों के उपयोग के कुछ उदाहरण लेते हैं।

मान लीजिए (x, y) एक क्रमित युग्म है जहाँ $x \in X$ तथा $y \in Y$ है। साथ ही, मान लीजिए कि x एक कक्षा के विद्यार्थियों की आयु को तथा $y = \{y_1, y_2, y_3 \ldots y_n\}$ उनके भार को व्यक्त करता है। इस स्थिति में (x, y), उस कक्षा के विद्यार्थियों के गुणों, आयु तथा भार के युग्म को व्यक्त करेगा। क्रमित युग्म के इस निरूपण को समझने के लिए हम x और y को संख्यात्मक मान देते हैं। मान लीजिए x = 12 वर्ष तथा y = 50

किलोग्राम है। इस स्थिति में, (12, 50) आयु तथा भार के एक क्रमित युग्म को निरूपित करता है जिसमें प्रथम *प्रविष्टि* एक विद्यार्थी की आयु को तथा दूसरी *प्रविष्टि* उसके भार को व्यक्त करती है। यदि हम इन प्रविष्टियों का क्रम बदल दें और (12, 50) के स्थान पर (50, 12) लिखें, तो हमें विद्यार्थी की आयु 50 वर्ष तथा उसका भार 12 वर्ष प्राप्त होगा। क्रमित युग्म की संकल्पना ठीक से समझने के लिए रेखाचित्र 2.1 देखें। ध्यान दें कि इस रेखाचित्र में युग्म (5, 20) तथा (20, 5) की स्थिति अलग-अलग है क्योंकि इनमें उपयुक्त संख्याओं X और Y का क्रम बदल दिया गया है।



रेखाचित्र 2.1

परिभाषा : मान लीजिए X और Y तो कोई भी दो अरिक्त समुच्चय हैं तथा $x \in X$ और $y \in Y$ है। एक क्रमित युग्म (x, y), एक ऐसा युग्म होता है जिसमें $(x, y) \neq (y, x)$ हो यदि $x \neq y$ है। अर्थात् $(x, y) = (y, x)$ केवल तभी होगा, यदि $x = y$ हो। साथ ही, $(p, q) = (r, s)$ तभी और केवल तभी होगा यदि $p = r$ तथा $q = s$ हो।

नोट : किसी क्रमित युग्म (x, y) में x को प्रथम प्रविष्टि घटक तथा y को दूसरी प्रविष्टि कहते हैं।

2.2.2 समुच्चयों का कार्तीय गुणन (Cartesian Product of Sets)

मान लीजिए X और Y दो अरिक्त समुच्चय हैं। X और Y का कार्तीय गुणन, जिसे $X \times Y$ से व्यक्त किया जाता है, ऐसे सभी क्रमित युग्मों (x, y) का संग्रह/समुच्चय है जिनमें $x \in X$ का तथा $y \in Y$ का अवयव है। कार्तीय गुणन $X \times Y$ को इस प्रकार लिया जा सकता है

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X \text{ and } y \in Y\}$$

उदाहरण 1 : मान लीजिए $A = \{a, b, c\}$ और $X = \{2, 5\}$ है।

इस स्थिति में, $H = \{(a,2);(a,5),(b,2);(b,5),(c,2);(c,5)\}$ होगा।

उपरोक्त चर्चा से हम नीचे दिए निष्कर्ष निकाल सकते हैं :

1) हम क्रमित युग्म की परिभाषा से क्रमित n-टपल $(x_1, x_2, ..., x_n)$ की परिभाषा प्राप्त कर सकते हैं। इसी प्रकार n-समुच्चयों $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n \left(n \in \mathbb{N}^+, n > 2\right)$ के कार्तीय गुणन को भी निम्न रूप में परिभाषित किया जा सकता है।

2) हम $A \times A$ को सामान्यतः A^2 लिखते हैं। इसी प्रकार A^n का अर्थ है $\underbrace{A \times A \times ... \times A}_{n}$

2.3 संबंध (Relation)

किसी अरिक्त समुच्चय X से अरिक्त समुच्चय B में एक संबंध, उनके कार्तीय गुणन $X \times Y$ का एक उपसमुच्चय होता है। मान लीजिए X और Y दो समुच्चय है तथा $\rho \subseteq X \times Y$ है, अर्थात्, $\rho \subseteq X \times Y$ का कोई उपसमुच्चय है तो ρ समुच्चय X से समुच्चय Y तक एक संबंध कहलाता है (या ρ, X और Y के अवयवों के बीच एक संबंध है)। यदि $\rho \subseteq X \times X$ है तो हम कहते हैं कि ρ, X में एक संबंध है।

उदाहरण 2 : माना $X = \{1,3,5\}$ तथा $Y = \{2,4,6\}$ है और S समुच्चयों X और Y का कार्तीय गुणन है। अतः

$$S = \{(1,2);(1,4);(1,6);(3,2);(3,4);(3,6);(5,2);(5,4);(5,6)\}$$

होगा। यहाँ हम X से Y तक कोई संबंध (ρ) ज्ञात करना चाहते हैं। निश्चित रूप से X से Y तक यह संबंध $X \times Y$ का एक उपसमुच्चय होगा।

इसके लिए हम नीचे दिए हुए प्रतिबंधों के अनुसार $X \times Y$ के उपसमुच्चय ज्ञात करते हैं। इस प्रकार, प्राप्त प्रत्येक उपसमुच्चय दिए हुए प्रतिबंध के संगत, X से Y तक एक संबंध को निरूपित करेगा।

i) $(x+y)$, 3 का एक गुणज है

ii) $(x+y) \leq 7$

iii) $x > y$

आइये, इन संबंधों को ज्ञात करें :

i) $(1,2);(3,6);(5,4)$

ii) $(1,2);(1,4);(1,6)$; (3, 2); (3, 4); (5, 2)

iii) $(3,2);(5,2);(5,4)$

संबंधों के कुछ उदाहरण :

1) किसी अरिक्त समुच्चय X में समानता का संबंध, अर्थात् $\rho_1 = \{(x,x) : x \in X\}$ अतः $(x, y) \in \rho_1 \subseteq X \times X$ यदि और केवल यदि $x = y$ हो।

2) $\mathbb{N}^+$ में विभाज्यता का संबंध

$\rho_2 = \{(m, n) \in \mathrm{N}^+ \times \mathrm{N}^+ : \exists\ \mathrm{k} \in \mathrm{N}^+ \quad n = k\ .\ m\}$

अतः $(m, n) \in \rho_2 \subseteq \mathrm{N}^+ \times \mathrm{N}^+$ iff $m \mid n$, यदि और केवल यदि

अर्थात्, n, m से पूरा-पूरा विभाज्य हो।

टिप्पणी : $\exists$ का अर्थ है, 'हम ज्ञात कर सकते हैं (कम से कम एक)

3) R में 'से कम है' का संबंध

$\rho_3 = \{(x, y) \in \mathrm{R} \times \mathrm{R} : x < y\}$,

अतः $(x, y) \in \rho_3 \subseteq \mathrm{R} \times \mathrm{R}$ iff $y - x$ [यदि और केवल यदि y - x एक धनात्मक संख्या है]।

4) R में 'से अधिक है या के समान है' का संबंध

$\rho_4 = \{(x, y) \in \mathrm{R} \times \mathrm{R} : x \geq y\}$,

अतः $(x, y) \in \rho_4 \subseteq \mathrm{R} \times \mathrm{R}$ यदि और केवल यदि $x - y$ एक अऋणात्मक संख्या है।

5) किसी तल के सभी त्रिभुजों के समुच्चय T और सभी अऋणात्मक वास्तविक संख्याओं के समुच्चय $\mathbb{R}_0^+$ में संबंध

$\rho_5 = \{(t, a) \in T \times \mathbb{R}_0^+ :$ त्रिभुज t का क्षेत्रफल a है$\}$।

6) सभी अऋणात्मक संख्याओं के समुच्चय $\mathbb{R}_0^+$ तथा किसी तल के सभी त्रिभुजों के समुच्चय T में संबंध

$\rho_6 = \{(a, t) \in \mathbb{R}_0^+ \times T:$ त्रिभुज t का क्षेत्रफल a है।

7) किसी तल के सभी वृत्तों के समुच्चय C तथा उसी तल की सभी सरल रेखाओं के समुच्चय L में संबंध

$\rho_7 = \{(c, l) \in C \times L:$ रेखा l, वृत्त c की एक स्पर्श रेखा है$\}$

2.3.1 संबंधों के प्रांत एवं परिसर (Domain and Range of Relations)

मान लीजिए कि X और Y दो अरिक्त समुच्चय है और ρ, X से Y तक एक संबंध है। अर्थात् $\rho \subseteq X \times Y$ है।

1) **संबंध ρ का प्रांत :**

समुच्चय X से समुच्चय Y तक किसी संबंध का प्रांत, ρ में उपस्थित सभी क्रमित युग्मों के प्रथम घटकों का संग्रह/समुच्चय होता है। इसे हम इस प्रकार परिभाषित कर सकते है :

$$D(\rho) := \{x \in X : \exists y \in Y \ (x, y) \in \rho\}$$

2) **संबंध ρ का परिसर :**

समुच्चय X से समुच्चय Y तक किसी संबंध का परिसर, ρ में उपस्थित सभी क्रमित युग्मों के द्वितीय घटकों का संग्रह/समुच्चय होता है। इसे हम इस प्रकार परिभाषित कर सकते है :

$$R(\rho) := \{y \in Y : \exists x \in X \ (x, y) \in \rho\}$$

2.3.2 संबंधों के गुणधर्म/अभिलक्षण (Properties of Relations)

मान लीजिए X का एक अरिक्त समुच्चय है और ρ, X में संबंध है। अर्थात् $\rho \subseteq X^2$ है।

1) **स्वतुल्यता (Reflexivity)**

संबंध ρ *स्वतुल्य* कहलाता है यदि $\forall x \in X \ (x,x) \in \rho.$

टिप्पणी : यहाँ $\forall$ का अर्थ है 'प्रत्येक x के लिए'

2) **अस्वतुल्यता (Irreflexivity)**

संबंध ρ *अस्वतुल्य* कहलाता है यदि $\forall x \in X \ (x,x) \notin \rho.$

3) **सममिति (Symmetry)**

संबंध ρ *सममिति* कहलाता है यदि $\forall (x,y) \in \rho \ (y,x) \in \rho$ जब भी (x, y) ρ में हो तो (x, y) भी ρ में हो। अर्थात् $(x,y) \in \rho = (y,x) \in \rho$

4) **प्रतिसममिति (Antisymmetry)**

संबंध ρ *प्रतिसममित* कहलाता है यदि, जब भी (x, y) और (y, x), दोनों ρ में हो तो निश्चित रूप से $x = y$ हो। अर्थात् $(x, y) \in \rho$ यदि $(y, x) \in \rho = x = y$

5) **सकर्मकता (Transitivity)**

संबंध ρ *सकर्मकता* कहलाता है यदि, जब भी (x, y) और (y, z), दोनों ρ में हो तो (x, z) भी ρ में हो। अर्थात् यदि $(x, y) \in \rho$, $(y, z) \in \rho = (x,z) \in \rho$

2.3.3 विशिष्ट संबंध (Special Relations)

मान लीजिए कि X एक अरिक्त समुच्चय है तथा ρ, X पर एक संबंध है। अर्थात् $\rho \subseteq X^2$ है।

1) **तुल्यता संबंध**

ρ एक *तुल्यता संबंध* कहलाता है यदि वह एक

(क) स्वतुल्य, (ख) सममित, तथा (ग) सकर्मक संबंध है।

2) **क्रम संबंध**

ρ एक *क्रम संबंध* कहलाता है यदि वह एक

(क) स्वतुल्य (ख) प्रतिसममित, तथा (ग) सकर्मक संबंध है।

हम कह सकते हैं कि कोई क्रम संबंध ρ, एक पूर्ण या रेखीय क्रम संबंध कहलाता है यदि प्रत्येक क्रमित युग्म $(x,y) \in X^2$ के लिए या तो $(x,y) \in \rho$ हो अथवा $(y,x) \in \rho$ हो। अन्यथा, ρ को आंशिक क्रम संबंध कहते हैं।

3) **व्युत्क्रम संबंध**

मान लीजिए X और Y दो अरिक्त संबंध हैं तथा ρ, X से Y तक एक संबंध है अर्थात् $\rho \subseteq X \times Y$ है। ρ के व्युत्क्रम या प्रतिलोम संबंध जिसे ρ^{-1} से व्यक्त किया जाता है, को इस प्रकार परिभाषित किया जाता है :

$$\rho^{-1} = \{(y,x) \in Y \times X : \ (x,y) \in \rho\}$$

समुच्चयों का वर्गीकरण

मान लीजिए कि X एक अरिक्त समुच्चय है। X के उपसमुच्चयों का एक समुच्चय (Z द्वारा दिखाया गया) X का एक वर्गीकरण कहलाता है यदि ये शर्तें संतुष्ट हो रही हों :

i) $\forall A \in Z, A$ X का एक अरिक्त उपसमुच्चय हो,

ii) ($A, B \in Z$ और $A \neq B$) का अर्थ है $A \cap B = \phi$,

iii) $\cup Z$ [उपसमुच्चयों के समुच्चय Z का एक योग] $= X$

Z A के घटकों को वर्गीकरण के वर्ग कहा जाता है।

तुल्यता वर्ग

मान लीजिए X एक अरिक्त समुच्चय है और ρ, X पर एक तुल्यता संबंध है।

प्रत्येक $x \in X$ के लिए हम A का एक उपसमुच्चय इस प्रकार परिभाषित करते हैं

$$A_x := \{y \in X : (x, y) \in \rho\} \in \mathcal{P}(X)$$

यहाँ $\in \mathcal{P}(X)$ के घात समुच्चय को निरूपित करता है।

A_x को x का तुल्यता वर्ग कहते है।

बोध प्रश्न 1

1) संबंध क्या है?

.....

.....

.....

.....

.....

2) तुल्यता वर्ग क्या है?

.....

.....

.....

.....

.....

3) किसी संबंध के प्रांत एवं परिसर की परिभाषा दीजिए।

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2.4 फलन (Functions)

हमने ऊपर की गई चर्चा में देखा कि एक क्रमित युग्म $\{x, y\}$, x के मान के संगत y का मान देता है। अतः, हम y और x के बीच एक संबंध की परिकल्पना कर सकते हैं। इस संबंध के द्वारा हमें x के एक मान के लिए, y के एक या एक से अधिक मान निर्दिष्ट किए जा सकते हैं। इस कथन को ठीक से समझने के लिए हम कुछ उदाहरण लेते हैं।

उदाहरणः मान लीजिए $X = \{2, -2\}$ एक समुच्चय है और $y = \left(x^2\right)$ और x में y एक संबंध है। इस संबंध में यदि हम $x = 2$ लेते हैं तो हमें $y = 4$ प्राप्त होता है। इसी प्रकार $x = -2$ लेने पर भी हमें $y = 4$ प्राप्त होता है। अतः, इस स्थिति में हम पाते हैं कि y के एक मान से संबंधित x के दो मान हैं।

उदाहरण : यदि क्रमित त्रयीं $X = \{1,3,5\}$ और $Y = \{2,4,6\}$ दो समुच्चय है तो संबंध $x > y$ को संतुष्ट करने वाले हमें तीन क्रमित युग्म प्राप्त होते हैं, $\{(3,2);(5,2);(5,4)\}$ यहाँ हम देख सकते हैं कि x के एक मान $x = 5$ से संबंधित y के दो मान $y = 2$ तथा $y = 4$ हैं।

इन उदाहरणों में हमने देखा कि यदि हमें x का कोई मान दिया हो, तो यह आवश्यक नहीं है कि किसी दिए हुए संबंध से y के एक अद्वितीय मान का निर्धारण किया जा सके। तथापि, यदि कोई संबंध ऐसा हो जिसमें x के प्रत्येक मान के संगत y का एक अद्वितीय मान हो, तो y, x का एक फलन कहा जाता है। इसे हम $y = f(x)$ से व्यक्त करते हैं। समुच्चय x से समुच्चय y तक किसी फलन को $y = f(x)$ से व्यक्त किया जाता है।

प्रतीकात्मक रूप में, यदि x और y दो अरिक्त समुच्चय हैं, तो X से Y तक एक संबंध $f \subseteq X \times Y$ एक फलन कहलाता है यदि

i) $D(f) = X$

ii) $\forall x \in X$ समुच्चय $\{y \in Y : (x,y) \in f\}$ में केवल एक ही सदस्य हो। अर्थात्, $\forall x \in X$ के लिए, समुच्चय y का एक और केवल एक अवयव $y \in Y$ होगा जिसके लिए $(x,y) \in f$ है।

टिप्पणी : अंकन "$y = f(x)$ का अर्थ है" y x का एक फलन है तथा $X \to Y$ का अर्थ है कि यह फलन X से Y तक है, अर्थात् $x \in X$ के लिए, एक ऐसा $y \in Y$ मिलता है कि $(x,y) \in f$ है। दूसरे शब्दों में, $y = f(x)$, y का वह अवयव है जो f के द्वारा x से संबंधित है।

हम इसे f के अंतर्गत x का प्रतिबिंब या f का x पर मान भी कहते हैं। जब हम किसी फलन को $y = f(x)$ के रूप में लिखते हैं तो x को फलन का कोणांक तथा y को फलन का मान कहते हैं। अर्थशास्त्र में सामान्यतः x को स्वतंत्र चर के रूप में प्रयोग किया जाता है तथा y को निर्भर चर के रूप में।

2.4.1 फलन का प्रांत, परिसर, लक्ष्य और सहप्रांत (Domain, Range, Target and Codomain of a Function)

मान लीजिए X और Y दो अरिक्त समुच्चय हैं तथा $y = f(x)$, X से Y तक एक फलन है।

ध्यान दें कि X से Y तक प्रत्येक फलन, वास्तव में, X से Y तक एक ऐसा विशिष्ट संबंध होता है जिसमें X के प्रत्येक अवयव x के लिए, Y का एक और केवल एक अवयव y होता है।

अतः, हम फलन f के प्रांत तथा परिसर को निम्न रूप में परिभाषित कर सकते हैं।

f का प्रांत $D(f) = \{x : (x, y) \in f\} = X$

f का परिसर $R(f) = \{f(x) : x \in D(f)\}$

इसे $f(X)$ से भी व्यक्त किया जा सकता है।

ध्यान दें कि f का परिसर $R(f)$, f के प्रांत के अवयवों के प्रतिबिंबों का समूह है।

निश्चित रूप से $R(f)$, Y का उपसमुच्चय होगा। अर्थात् $R(f) \subseteq Y$ हो।

यदि $f : X \to Y$ तक एक फलन है तो Y को f का **सहप्रांत** कहते हैं। हम देख सकते हैं कि किसी फलन f का परिसर उसके सहप्रांत का उपसमुच्चय होता है।

फलन का सीमा बंधन

मान लीजिए कि X, Y और A अरिक्त समुच्चय है, $A \subseteq X$ है तथा $f : X \to Y$ तक एक फलन है। फलन $g : A \to Y$ जहाँ $g : A \to Y$, $g(x) = f(x)$ $A \subseteq X$ हो f *का* A तक/पर सीमाबंधन कहलाता है। इसे हम सांकेतिक रूप से $f|_A = g$ निरूपित करते हैं।

2.4.2 एकैक, आच्छादी तथा एकैकी-आच्छादी फलन (Injective, Surjective, Bijective Functions)

मान लीजिए X और Y दो अरिक्त समुच्चय हैं और $f : X \to Y$ एक फलन है।

1) **एकैक/एकैकी फलन**

f एक एकैकी फलन कहलाता है यदि $\forall\ x, z \in X$, $f(x) = f(z)$ का अर्थ है $x = z$, या दूसरे शब्दों में $x \neq z = f(x) \neq f(z)$. अतः, कोई फलन $f : X \to Y$ एकैकी होगा यदि f के अंतर्गत, X के भिन्न अवयवों के प्रतिबिंब भी भिन्न हों।

2) **आच्छादी फलन**

f एक आच्छादी फलन कहलाता है यदि

$$\forall y \in Y,\ x \in X\ :\ f(x) = y, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$R(f) = Y.$$

अर्थात् y का प्रत्येक अवयव, f के अंतर्गत X के किसी न किसी अवयव का प्रतिबिंब है। (1) में दिए हुए व्यंजक को हम इस प्रकार पढ़ते हैं Y के प्रत्येक अवयव Y के लिए, X का एक ऐसा अवयव x प्राप्त किया जा सकता है कि $f(x) = y$, हो।

ध्यान दें, कि यदि $f : X \to Y$ तक एक आच्छादी फलन है तो f का परिसर Y के बराबर होगा। अर्थात् $f(x) = y$, होगा।

3) **एकैकी आच्छादी फलन :** f एक एकैकी आच्छादी फलन कहलाता है यदि f एक एकैकी फलन भी है और आच्छादी फलन भी। अर्थात्, फलन $f : X \to Y$ एक एकैकी आच्छादी फलन होगा यदि Y के प्रत्येक अवयव Y के लिए X का एक और केवल एक अवयव x हो जिसके लिए $f(x) = y$ है।

फलनों की समानता

मान लीजिए f और g दो फलन हैं। f और g समान फलन कहलाते हैं अर्थात् $f = g$ होता है। यदि और केवल यदि

i) $D(f) = D(g)$ और (ii) $\forall x \in X,\ f(x) = g(x)$.

प्रतिलोम फलन

मान लीजिए $f : X \to Y$ एक एकैकी आच्छादी फलन है। स्पष्टतः $R(f) = Y$ होगा। f का प्रतिलोम फलन, f^{-1}, $R(f)$ से X तक एक ऐसा फलन है जिसमें $f^{-1}(y) = x$ होगा जहाँ x समुच्चय X का वह अद्वितीय अवयव है जिसके लिए $f(x) = y$ है।

सांकेतिक भाषा में $f^{-1} : R(f) \to X$ को हम इस प्रकार परिभाषित कर सकते हैं –

$$f^{-1}(y) = x \langle = \rangle f(x) = y$$

फलनों का संयोजन

मान लीजिए कि $g : X \to Y$ तथा $f : Y \to Z$ दो फलन हैं हम फलनों f और g के संयोजन को जिसे हम $f o g$ से निरूपित करते हैं –

तथा $(f o g) : X \to Z$,

$(f o g)(x) = f\{(g(x)\}\ \forall x \in X$

द्वारा परिभाषित होता है। स्पष्टतः $D(f o g) = \{x \in X : g(x) \in Y\}$

2.4.3 फलनों के अंतर्गत समुच्चयों के प्रतिबिंब तथा प्रतिलोम प्रतिबिंब (Image and Inverse Image of Sets under Functions)

मान लीजिए $f : X \to Y$ तक एक फलन है तथा A और B कोई दिए हुए समुच्चय है।

1) **f के अंतर्गत A का प्रतिबिंब**

हम समुच्चय A को f के अंतर्गत प्रतिबिंब को $f(A)$ से निरूपित करते हैं तथा इसे $f(A) := \{f(x) : x \in A\}$ के रूप में परिभाषित करते हैं।

ध्यान दें कि $f(A) = f(A \cap X) \subset f(X) = R(f) \subset Y$

2) ***f* के अंतर्गत *B* का प्रतिलोम प्रतिबिंब :**

f के अंतर्गत समुच्चय B के प्रतिलोम प्रतिबिंब को हम $f^{-1}(B)$ से व्यक्त करते हैं तथा इसे $f^{-1}(B) := \{x \in X : f(x) \in B\}$ के रूप में परिभाषित करते हैं।

ध्यान दें कि $f^{-1}(B) = f^{-1}(B \cap Y) \subset f^{-1}(Y) = f^{-1}(R(f)) = X$

$f^{-1}(B)$ के विषय में यह ध्यान देना आवश्यक है कि किसी भी समुच्चय B के लिए और किसी भी फलन f के लिए "$f^{-1}(B)$" ज्ञात किया जा सकता है यदि f का प्रतिलोम न हो, तब भी। चिन्ह f^{-1} (B) में f^{-1} f से प्रतिलोम फलन को व्यक्त नहीं करता।

परंतु यदि फलन f एकैकी है तो f^{-1} (B) , f के प्रतिलोम फलन f^{-1} के अंतर्गत B का प्रतिबिंब होगा।

बोध प्रश्न 2

1) फलन की परिभाषा क्या है?

.....

.....

.....

.....

.....

2) किसी आच्छादी फलन का उदाहरण दीजिए।

.....

.....

.....

.....

.....

3) प्रतिलोम फलन की परिभाषा दीजिए।

.....

.....

.....

.....

.....

2.5 वास्तविक वितान तथा बिंदु-समुच्चय (Real Space and Point- Sets)

अब तक हमने जाना है कि समुच्चय, संबंध और फलन क्या होते हैं। हम संख्या रेखा के बारे में भी जानते हैं, जिसमें 0 को एक बिंदु से निरूपित किया जाता है रेखा इस (मध्य) बिंदु के दोनों ओर अनंत तक जाती है। यह रेखा वास्तविक संख्याओं के समुच्चय को दर्शाती है, जिसे R से व्यक्त किया जाता है। अब एक अंतराल $[a, b]$ पर विचार कीजिए। यह a और b के बीच में आने वाली सभी संख्याओं का समुच्चय/समूह है।

तथा इसमें संख्याएँ a और b भी सम्मिलित हैं। हम देख सकते हैं कि यह अंतराल $[a, b]$, R का एक उपसमुच्चय है।

अतः हम वास्तविक संख्याओं के समुच्चय की अवधारणा को भली-भाँति समझते हैं। अर्थशास्त्र में पायी जाने वाली राशियों को सामान्यतः वास्तविक संख्याओं के उपसमुच्चयों द्वारा व्यक्त किया जाता है। इससे हम समझ सकते हैं कि अर्थशास्त्र की संकल्पनाओं को समझने में वास्तविक संख्याओं का समुच्चय और उसके उपसमुच्चय अत्याधिक महत्त्वपूर्ण है। हम इन समुच्चयों को बिंदुओं के समुच्चयों के रूपमें देख सकते हैं क्योंकि इन्हें संख्या रेखा पर बिंदुओं के रूप में दर्शाया जाता है। हम इन्हें बिंदु-समुच्चय कह सकते हैं। वास्तविक संख्याओं को दिखाने वाली संख्या-रेखा को **वास्तविक रेखा** कहते हैं।

आइये, अब हम समुच्चयों के कार्तीय गुणन की संकल्पना का उपयोग करें, जिसके बारे में हम पहले ही पढ़ चुके हैं। हमारे समक्ष वास्तविक संख्याओं का समुच्चय R है। क्या हम इस समुच्चय का किसी दिए हुए समुच्चय से गुणा कर सकते हैं? बिल्कुल कर सकते हैं। और यदि वह दिया हुआ समुच्चय भी R ही हो तो? अर्थात् यदि हम R का गुणन स्वयं R से ही करें, तो ऐसा करने पर जो समुच्चय हमें प्राप्त होता है उसे R^2 से व्यक्त करते हैं।

इस समुच्चय, R^2 के अवयव क्या हैं? स्पष्टतः R^2 वास्तविक संख्याओं के सभी क्रमित युग्मों का समुच्चय है। हम इसे एक रेखाचित्र के रूप में कैसे दर्शा सकते हैं? इसे सामान्यतः x और y-अक्षों के तल द्वारा (x-y-तल) दर्शाया जाता है। x-अक्ष और y-अक्ष, दोनों ही वास्तविक संख्याओं (वास्तविक संख्या रेखा) को निरूपित करते हैं, जो धनात्मक तथा ऋणात्मक, दोनों दिशाओं में अनंत तक जाती हैं। अंतर मात्र इतना ही है जहाँ x-अक्ष में संख्या रेखा क्षैतिज होती है, वहीं y-अक्ष में यह ऊर्ध्वाधर दिशा में अर्थात् अधोलंब के रूप में होती है। इस प्रकार, पूरा तल चार चतुर्थांशों में विभाजित हो जाता है। तल पर प्रत्येक बिंदु वास्तविक संख्याओं का एक क्रमित युग्म होता है जिसमें से प्रथम घटक (पहली संख्या) को x-अक्ष पर तथा दूसरे घटक (दूसरी संख्या) को y-अक्ष पर निरूपित किया जाता है। यद्यपि एक क्रमित युग्म (x, y) और एक अंतराल (x, y) को एक ही प्रकार से व्यक्त किया जाता है, परंतु संदर्भ से यह स्पष्ट हो जाता है कि हम किसी क्रमित युग्म की बात कर रहे हैं अथवा अंतराल की। वास्तविक संख्याओं का प्रत्येक क्रमित युग्म R^2 का सदस्य/अवयव होता है। इस प्रकार, R^2 भी एक बिंदु-समुच्चय (बिंदुओं का एक समुच्चय) है।

मान लीजिए कि ऐसा उपभोक्ता जो केवल सेबों और संतरों का उपभोग करता है। उसके द्वारा उपभोग किए गए सेबों तथा संतरों की संख्याओं के विभिन्न संयोजनों से वास्तव में, हमें संख्याओं के क्रमित युग्त प्राप्त होते हैं। इनमें से प्रत्येक युग्म R^2 का सदस्य है। परंतु इसके लिए हमें एक वस्तु को पहले तथा दूसरी को बाद में लिखना पड़ेगा। उदाहरण के लिए, मान लीजिए x-अक्ष सेबों की संख्या को तथा y-अक्ष संतरों की संख्या को निरूपित करता है। इस प्रकार, $(x, y) = (3, 4)$ का अर्थ होगा 3 सेब तथा 4 संतरे। क्योंकि यहां हम सेबों तथा संतरों की अऋणात्मक मात्राओं के माप की बात कर रहे हैं, इस स्थिति में प्राप्त होने वाले सभी क्रमित युग्म x-अक्ष और y-अक्ष के प्रतिच्छेदन से प्राप्त चतुर्थांशों में से पहले अर्थात् उत्तर-पूर्व चतुर्थांश में स्थित होंगे।

याद रहे कि दूसरे या उत्तर-दक्षिणी चतुर्थांश में वे क्रमित युग्म होते हैं जिनमें x-निर्देशांक ऋणात्मक तथा y-निर्देशांक धनात्मक होता है। इसी प्रकार, दक्षिण-पश्चिमी में दोनों संख्याएँ (निर्देशांक) ऋणात्मक होते हैं तथा दक्षिण-पूर्वी चतुर्थांश में x धनात्मक

तथा y ऋणात्मक होता है। प्रत्येक चतुर्थांश में बिंदुओं को क्रमित युग्मों द्वारा निरूपित किया जा सकता है। अतः, समुच्चय R^2 भी एक बिंदु समुच्चय अर्थात् बिंदुओं का समुच्चय है, जिनमें से प्रत्येक बिंदु एक क्रमित युग्म है। अतः ध्यान रहे कि यद्यपि प्रत्येक क्रमित युग्म दो संख्याओं से बनता है, तथापि क्रमित युग्म स्वयं एक ही बिंदु है अर्थात् वह समुच्चय R^2 का केवल एक अवयव है। संक्षेप में, हम कह सकते हैं कि R^2 एक ऐसा समुच्चय है जिसके अवयव क्रमित युग्म हैं, प्रत्येक क्रमित युग्म एक बिंदु है तथा फलस्वरूप R^2 एक बिंदु-समुच्चय है।

हमने ऊपर दो विशिष्ट बिंदु-समुच्चयों की चर्चा की है : R, जिसमें बिंदु वास्तविक संख्याएँ हैं तथा R^2, जिसमें बिंदु वास्तविक संख्याओं के क्रमित-युग्म हैं। क्या हम इस अवधारणा का और विस्तार कर सकते हैं। अर्थात् क्या हम ऐसे समुच्चयों की कल्पना कर सकते हैं जिनमें प्रत्येक अवयव (बिंदु) 2 से अधिक संख्याओं से बना हो? निश्चित रूप से हम ऐसा कर सकते हैं। ध्यान रहे कि हमने R^2 बनाने के लिए R का R से कार्तीय गुणन किया और R को $R \times R$ के रूप में प्राप्त किया।

इसी प्रकार, हम R^3 की कल्पना $R \times R \times R$ के रूप में कर सकते हैं। इस समुच्चय का प्रत्येक अवयव एक क्रमित त्रिक (x, y, z) होगा। अर्थात्

$$R^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in R\}$$

यदि हम तीन अक्ष, x-अक्ष, y-अक्ष तथा z-अक्ष लें, तो R^3 का प्रत्येक अवयव के तीन घटक x, y और z होंगे। जबकि R को एक सरल रेखा से निरूपित किया जा सकता है और R^2 को एक तल द्वारा, R^3 एक त्रि-आयामी संरचना है। इन तीनों समुच्चयों के अवयव बिंदु हैं। वास्तविक जीवन की स्थितियों के चित्रण में R^3 की अवधारणा का महत्त्व समझने के लिए कि ऊपर उदाहरण में विचाराधीन उपभोक्ता सेबों और संतरों के साथ-साथ केलों का भी उपभोग करता है। अतः, यदि हम प्रत्येक वस्तु (फल) की उपभोग की मात्रा को एक अक्ष पर अंकित करें, तो हमें उपभोग किए गए फलों को चित्रित करने के लिए तीन अक्षों की आवश्यकता होगी क्योंकि यहाँ तीन फल हैं।

अब मान लीजिए कि हमारे पास n वस्तुएँ हैं जहाँ $n > 3$ है। क्योंकि हम प्रत्येक वस्तु के माप को एक अक्ष पर निरूपित करते हैं, तो इन वस्तुओं की मात्राओं के किसी भी संयोजन को व्यक्त करने के लिए, हमें n-अक्षों की आवश्यकता होगी। ये n-अक्ष हमें कैसे प्राप्त होंगे? R के n बार कार्तीय गुणन द्वारा। इस प्रकार हमें एक नया समुच्चय प्राप्त करते हैं : $R \times R \times R \times \ldots \times$x R ($n$ बार)। इस समुच्चय के किसी अवयव का प्रारूप कैसा होगा? इस समुच्चय का प्रत्येक n अवयव संख्याओं का क्रमित संयोजन होगा जिसे हम $(x_1, x_2, x_3 \ldots x_n)$ के रूप में व्यक्त करते हैं तथा इसे एक n-टपल कहते हैं। अर्थात्

n-अक्षों को दर्शाने वाले किसी चित्र को बनाना निश्चित रूप से संभव नहीं है। परंतु हम इसे अमूर्त रूप में R, R^2, R^3,.....R^n इत्यादि के विस्तार के तौर पर समझ सकते हैं। हमने देखा कि R, R^2, R^3,.....R^n... इत्यादि सभी समुच्चयों के अवयव बिंदु होते हैं। अतः, ये सभी समुच्चय, बिंदु-समुच्चय कहलाते हैं।

R^n के अवयवों अर्थात् प्रत्येक n-टपल को एक सदिश कहते हैं। अर्थात्, क्रमित युग्म, क्रमित त्रिक इत्यादि सभी सदिश हैं। हम आगे पढ़ाए जाने वाले 'अर्थशास्त्र में गणितीय विधियाँ' पाठ्यक्रमों में पाएँगे कि सदिश अर्थशास्त्रीय विश्लेषण में एक महत्त्वपूर्ण भूमिका निभाते हैं।

2.6 संगतता तथा समुच्चय-फलन (Correspondence and Set Functions)

इस इकाई के अब तक के खंडों में आपका परिचय फलन की अवधारणा/संकल्पना से हुआ। आइये, हम एक बार फिर से देखें कि एक फलन के विभिन्न तत्व क्या हैं : एक फलन में सर्वप्रथम हमें दो समुच्चयों की आवश्यकता होती है। एक फलन का प्रांत कहलता है तथा दूसरा फलन का परिसर। इसके साथ ही एक नियम का होना आवश्यक है जो फलन के प्रांत के प्रत्येक अवयव को उसके परिसर के एक अद्वितीय अवयव पर ले जाए। परिसर के इस अवयव को प्रांत के उस अवयव विशेष का प्रतिबिंब कहते हैं। दूसरे शब्दों में, हम कह सकते हैं कि एक फलन एक ऐसा नियम है जो प्रांत के प्रत्येक अवयव के साथ, परिसर का एक (अद्वितीय) अवयव संबद्ध करता है।

2.6.1 संगतता (Correspondence)

एक समुच्चय A लीजिए। मान लीजिए यह किसी फलन का प्रांत है। मान लीजिए समुच्चय B इस फलन का सह-प्रांत है। इस समुच्चय B के अनेक उपसमुच्चय हो सकते हैं। एक नए समुच्चय D की कल्पना कीजिए जिसके अवयव B के विभिन्न उपसमुच्चय हों। एक सामान्य फलन अपने प्रांत के प्रत्येक अवयव को अपने परिसर के एक और केवल एक अवयव पर ले जाता है। इसलिए सामान्य फलन को एकल-मान फलन भी कहते हैं। दूसरी ओर, एक ऐसा फलन जो प्रांत के एक अवयव को एक ऐसे अवयव पर ले जाता है जो स्वयं में एक समुच्चय है (अतः, अनेक वस्तुओं का समूह है), एक बहुमान फलन कहलाता है। आइये, हम बहुमान फलन की संकल्पना को एक उदाहरण द्वारा समझने की कोशिश करें।

मान लीजिये $A = \{2,7,9,11,14\}$ तथा $B = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$ है। अब हम अपनी चर्चा के प्रमुख भाग पर आते हैं : मान लीजिए D एक ऐसा उपसमुच्चय है जिसके अवयव, B के कुछ उपसमुच्चय है। दूसरे शब्दों में, D वास्तव में समुच्चयों का एक कुल है। मान लीजिए $D = \{\{a, c, f\}, \{b, a, d\}, \{i, c, h, g, d\}\}$ है। अब समुच्चय A के अवयवों से समुच्चय B के अवयवों तक एक फलन लीजिए। मान लीजिए A का अवयव 9, समुच्चय D के अवयव $\{b, a, d\}$ पर तथा समुच्चय A का अवयव 14 समुच्चय D के अवयव $\{a, c, f\}$ पर जाता है। अब हम संगतता का अर्थ समझने का प्रयास करते हैं कि इसे बहुमान फलन क्यों कहा जाता है। इस उदाहरण में A का एक अवयव 9 D के अवयव $\{b, a, d\}$ पर जाता है परंतु इस अवयव में 3 मान हैं : b, a और d. अतः, संगतता एक अवयव को एक समुच्चय के किसी उपसमुच्चय पर ले जाता है। A के अवयव, D के अवयवों पर जाते हैं जो कि B के उपसमुच्चय हैं।

2.6.2 समुच्चय फलन (Set Functions)

एक संगतता में हमने एक समुच्चय लिया और एक ऐसा समुच्चय बनाया जिसके सदस्य इस प्रदत्त (दिए हुए) समुच्चय के कुछ (या सभी) उपसमुच्चय थे। इस प्रकार प्राप्त समुच्चय को हमने परिसर माना था। अब हम इस समुच्चय को प्रांत के रूप में लेते हैं। मान लीजिए $H = \{12, 17, 3, 9, 8, 6\}$ के समुच्चय है तथा $J = \{\{12, 17, 8\}, \{17, 9, 3\}, \{17, 12, 6, 9\}\}$ । एक ऐसा समुच्चय है जिसके अवयव H के कुछ उपसमुच्चय हैं। अब समुच्चय J से किसी समुच्चय $M = \{a, b, c, d\}$ तक एक फलन लीजिए। ऐसा फलन एक समुच्चय-फलन कहलाता है। मान लीजिए यह फलन J के अवयव {17, 12, 6, 9} को M के अवयव b पर ले जाता है। यह फलन निश्चित रूप से एक एकल-मान

फलन होगा क्योंकि प्रांत का प्रत्येक अवयव परिसर के एक ही अवयव पर जाता है। परंतु, ध्यान दें कि इस उदाहरण में प्रांत का प्रत्येक अवयव, समुच्चय H का एक उपसमुच्चय है। अर्थात् प्रांत J का प्रत्येक अवयव एक समुच्चय है क्योंकि हम यहाँ J से M तक एक फलन की परिकल्पना कर रहे हैं, न कि H से M तक। ऐसे फलन जो ऐसे अवयवों, जो कि स्वयं समुच्चय हैं, को परिसर के केवल एक अकेले अवयव पर ले जाते हैं, समुच्चय फलन कहलाते हैं।

बोध प्रश्न 3

1) हम बिंदुओं के समुच्चय से क्या समझते हैं? इस संदर्भ में शब्द बिंदु का क्या अर्थ है।

.....

.....

.....

.....

.....

2) निम्नलिखित अवधारणाओं/संकल्पनाओं की व्याख्या कीजिए –

क) संगतता

ख) समुच्चय-फलन

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2.7 सार-संक्षेप

समुच्चयों पर संक्रियाओं के आधार पर, इस इकाई में हमने, अपनी चर्चा को संबंधों और फलनों की संकल्पना तक विस्तृत किया। जहाँ संबंधों को क्रमित युग्मों के समुच्चय के रूप में परिभाषित किया गया वहीं फलनों को विशेष प्रकार के संबंधों के रूप में सूत्रबद्ध किया गया। हमने फलन की संकल्पना, इसके प्रतिपादन तथा सामान्यतः पाए जाने वाले विभिन्न प्रकार के निरूपणों पर चर्चा की। यह इकाई समुच्चयों के कार्तीय गुणन की विस्तृत व्याख्या से प्रारंभ हुई और देखा कि किस प्रकार दो समुच्चयों का कार्तीय गुणन क्रमित युग्मों का एक संग्रह होता है। तत्पश्चात् हमने संबंध जैसी अत्यंत महत्त्वपूर्ण संकल्पना की चर्चा समुच्चयों के कार्तीय गुणन के उपसमुच्चय के रूप में की।

इसके पश्चात्, हमने फलनों का परिचय दिया। आप किसी फलन को एक चर की दूसरे चर पर निर्भरता दर्शाने वाले नियम के रूप से पहले से ही परिचित थे। यहाँ हमने फलन की एक समुच्चय (जिसे फलन का प्रांत कहा जाता है) के अवयवों तथा एक अन्य समुच्चय (जिसे फलन का परिसर कहा जाता है) के अवयवों तक एक प्रतिचित्रण अथवा रूपांतरण अथवा इनके बीच एक संबंध के रूप में व्याख्या की। हमने देखा कि किस

प्रकार एक फलन वास्तव में एक संबंध का उपसमुच्चय होता है अर्थात् किस प्रकार किसी संबंध पर कुछ प्रतिबंध लगाकर एक फलन प्राप्त किया जा सकता है। अतः, हमने देखा कि दो समुच्चयों के बीच एक संबंध उनके कार्तीय गुणन का एक उपसमुच्चय होता है तथा एक फलन एक संबंध का उपसमुच्चय होता है। इस इकाई में हमने फलनों के विभिन्न प्रकारों जैसे कि एकैकी फलन, आच्छादी फलन तथा एकैकी आच्छादी फलन।

तत्पश्चात्, इस इकाई में वास्तविक संख्याओं एवं वास्तविक वितान तथा अर्थशास्त्र में इनके महत्त्व की चर्चा की गई। इस चर्चा के दौरान बिंदुओं के समुच्चय या बिंदु-समुच्चयों की महत्त्वपूर्ण संकल्पना की भी चर्चा की गई। अंत में, इस इकाई में, कुछ विशिष्ट फलनों की चर्चा की गई जिनमें फलन के प्रांत अथवा परिसर के अवयव, किसी समुच्चय के सभी अथवा कुछ उपसमुच्चय होते हैं। इन्हें संगतता या बहुमान फलन या समुच्चय फलन भी कहते हैं।

2.8 बोध प्रश्नों के उत्तर/संकेत

बोध प्रश्न 1

1) समुच्चयों के कार्तीय गुणन के किसी उपसमुच्चय को एक संबंध कहते हैं। दूसरे शब्दों में, संबंध एक क्रमित युग्मों का समुच्चय होता है (आगे की व्याख्या 2.3 में देखें)।

2) यदि कोई संबंध ρ स्वतुल्य, सममित और सकर्मक हो तो उसे 'तुल्य' संबंध कहते हैं।

3) संबंध ρ के प्रथम पदों का समुच्चय उसका प्रांत कहलाता है। संबंध के प्रतिबिंबों का समुच्चय उसका परिसर कहा जाता है– यह संबंध ρ के द्वितीय पदों का समुच्चय ही है।

बोध प्रश्न 2

1) समुच्चय X से Y की ओर एक संबंध ρ, जिसमें प्रत्येक X तत्व के लिए Y में एक अद्वितीय प्रतिबिंब की परिभाषा हो जाती हो X से Y की ओर फलन कहलाता है।

2) एक फलन $f : X \to Y$ आच्छादी होता है या 'के ऊपर फलन' होता है यदि f का परिसर f के सहप्रांत के समान हो। उदाहरण, $f = \{(1,0),(2,0),(3,5)\}$ जहाँ $X = \{1,2,3\}$ तथा $Y = \{0,5\}$ एक आच्छादी फलन है। ऐसे ही अन्य उदाहरण भी बनाए जा सकते हैं।

3) भाग 2.4 देखें।

बोध प्रश्न 3

1) भाग 2.5 देखें।

2) भाग 2.6 देखें।