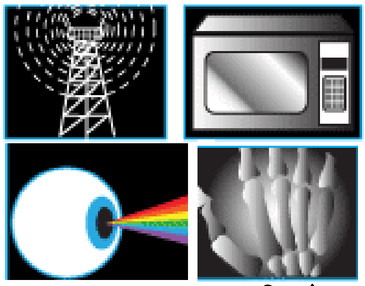


हमारे जीवन में विभिन्न आवृत्तियों वाली विद्युत्-चुंबकीय तरंगों के अनेक उपयोग होते हैं जिनमें से कुछ यहां दिखाए गए हैं।

इकाई 17

विद्युत्-चुंबकीय तरंग संचरण

इकाई की रूपरेखा

अध्ययन निर्देशिका

विद्युत्-चुंबकीय तरंगों के संचरण पर यह इकाई इस पाठ्यक्रम की अंतिम इकाई है और आपने अभी तक इस पाठ्यक्रम में जो कुछ पढ़ा है उसकी परिणति है। इकाई 16 पढ़ते हुए आपको यह समझ आया होगा कि आप उसमें इस पाठ्यक्रम की पिछली सभी इकाइयों में समझायी गयी अवधारणाओं का उपयोग कर रहे थे। आपने तरंग समीकरण और तरंग को अभिलक्षित करने वाली कुछ राशियों का भी उपयोग किया जिनके बारे में आपने स्कूल की भौतिकी में पढ़ा होगा। आप यांत्रिकी नामक पाठ्यक्रम BPHCT-131 की इकाई 19 को फिर से पढ़ना चाहेंगे ताकि आप उसमें दिए गए तरंग समीकरण और उसके हलों को दोहरा लें। इन अवधारणाओं की जानकारी विद्युत्-चुंबकीय तरंगों के संचरण और उनके द्वारा वाहित ऊर्जा को समझने के लिए आवश्यक है, जिनके बारे में आप इस इकाई में पढ़ेंगे। इन अवधारणाओं को अच्छी तरह समझने के लिए आप पाठ में दिए गए सभी चरणों और इकाई में दिए गए सभी उदाहरणों को स्वयं हल करें। साथ ही, आपको इकाई में दिए गए बोध प्रश्नों और अंत के भी प्रश्नों को स्वयं हल करना चाहिए।

"विज्ञान की सभी गणितीय शाखाएं, भौतिकी के नियमों और संख्याओं के नियमों में संबंध पर आधारित हैं।" — **जेम्स सी. मैक्सवेल**

17.1 परिचय

इकाई 16 में आपने सीखा है कि मैक्सवेल समीकरण सर्वत्र विद्युत् और चुंबकीय क्षेत्रों के व्यवहार को निर्धारित करते हैं और समस्त विद्युत्-चुंबकीय परिघटनाओं का वर्णन करते हैं। आज इस्तेमाल होने वाली बहुत सी व्यावहारिक युक्तियों का प्रचालन इन समीकरणों पर आधारित है।आपने यह भी पढ़ा है कि मैक्सवेल समीकरण हमें प्रकाश और अन्य विद्युत्-चुंबकीय तरंगों की प्रकृति के बारे में मूलभूत समझ प्रदान करते हैं।

इस इकाई में आप भाग 17.2 में निर्वात में और भाग 17.3 में डाइलेक्ट्रिक माध्यमों में समतल विद्युत्-चुंबकीय तरंगों के संचरण के बारे में पढ़ेंगे। भाग 17.3 में हम पहले डाइलेक्ट्रिक माध्यम में मैक्सवेल समीकरण लिखेंगे। फिर हम रैखिक, समांग और समदैशिक डाइलेक्ट्रिक माध्यमों में विद्युत्-चुंबकीय तरंगों के लिए तरंग समीकरण व्युत्पन्न करेंगे। इसके बाद हम इन माध्यमों में तरंग संचरण की चर्चा करेंगे। भाग 17.4 में हम तरंगों द्वारा वाहित ऊर्जा की अवधारणाओं का विस्तार विद्युत्-चुंबकीय तरंगों के लिए करेंगे। हम प्वाइन्टिंग प्रमेय भी समझाएंगे जो हमें किसी पृष्ठ के आर-पार प्रति एकक समय में वाहित ऊर्जा की मात्रा बताती है। अंत में हम विद्युत्-चुंबकीय क्षेत्र का ऊर्जा घनत्व ज्ञात करेंगे।

उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप :

- निर्वात में समतल विद्युत्-चुंबकीय तरंग संचरण का गणितीय वर्णन कर सकेंगे और समतल विद्युत्-चुंबकीय तरंगों के लिए तरंग प्राचलों की गणना कर सकेंगे;
- डाइलेक्ट्रिक माध्यमों में मैक्सवेल समीकरणों और (समतल तरंग हलों सहित) विद्युत्-चुंबकीय तरंग समीकरणों को व्युत्पन्न कर सकेंगे; और
- प्वाइन्टिंग प्रमेय का कथन दे सकेंगे, तथा प्वाइन्टिंग सदिश और विद्युत्-चुंबकीय क्षेत्रों के ऊर्जा घनत्व का परिकलन कर सकेंगे।

17.2 निर्वात में विद्युत्-चुंबकीय तरंग संचरण

इस भाग में हम विद्युत्-चुंबकीय तरंग संचरण की चर्चा करेंगे और मुख्यतः **समतल** विद्युत्-चुंबकीय तरंगों पर ध्यान देंगे। इकाई 16 से **समतल** विद्युत्-चुंबकीय तरंगों की अवधारणा याद करें। आपको समझा सकना चाहिए : **समतल विद्युत्-चुंबकीय तरंग क्या होती है**?

याद करें कि शब्द 'समतल' यह प्रकट करता है कि आकाश के प्रत्येक बिंदु पर क्षेत्र सदिश $\vec{\mathbf{E}}$ और $\vec{\mathbf{B}}$ समतल में स्थित होते हैं। साथ ही, दो अलग-अलग बिंदुओं पर स्थित समतल एक-दूसरे के समांतर होते हैं (चित्र 16.4 फिर से देखें)। समतल विद्युत्-चुंबकीय तरंगें भौतिकी, इंजीनियरिंग और प्रौद्योगिकी के विभिन्न क्षेत्रों में काफ़ी उपयोगी सिद्ध होती हैं। जैसाकि आप देख चुके हैं, इकाई 16 के बोध प्रश्न 4 में दिया गया विद्युत्-चुंबकीय क्षेत्र, समतल विद्युत्-चुंबकीय तरंग का एक विशिष्ट उदाहरण है। अब हम निर्वात में (यानी आकाश के आवेश-मुक्त और धारा-मुक्त प्रदेशों में) तरंग समीकरणों के ऐसे व्यापक समतल तरंग हल ज्ञात करना चाहते हैं जो मैक्सवेल समीकरणों को भी

संतुष्ट करते हैं। आपने तरंग समीकरण के व्यापक हलों के बारे में स्कूल की भौतिकी में पढ़ा होगा। आप सत्यापित कर सकते हैं कि निम्नलिखित ज्यावक्रीय अदिश फलन

$$u(z,t) = A\cos(z - vt) \quad \text{या} \quad u(z,t) = A\sin(z - vt) \qquad (17.1\text{क})$$

धनात्मक z-दिशा में संचरित हो रही तरंग के लिए निम्नलिखित एकविम तरंग समीकरण के व्यापक हल हैं :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad (17.1\text{ख})$$

यहां A तरंग का आयाम है और v, उसका वेग। तरंग समीकरण के इन हलों को तरंग की कोणीय आवृत्ति ω और तरंग संख्या k के पदों में निम्नवत् लिखा जा सकता है :

$$u(z,t) = A\cos(kz - \omega t) \quad \text{या} \quad u(z,t) = A\sin(kz - \omega t) \qquad (17.1\text{ग})$$

आप जानते हैं कि तरंगों को साइन फलनों या कोसाइन फलनों या उनके रैखिक संयाजनों द्वारा व्यक्त किया जा सकता है क्योंकि ये हल रैखिकतः स्वतंत्र हैं। **ऋणात्मक** z-दिशा में संचरित हो रही तरंग के लिए, तरंग समीकरण के हल होंगे :

$$u(z,t) = A\cos(z + vt) \quad \text{या} \quad u(z,t) = A\sin(z + vt) \qquad (17.1\text{घ})$$

या

$$u(z,t) = A\cos(kz + \omega t) \quad \text{या} \quad u(z,t) = A\sin(kz + \omega t) \qquad (17.1\text{च})$$

आपने BPHCT-131 की इकाई 19 में ज्यावक्रीय फलनों के कोणांकों के समीकरणों (17.1क, ख, ग, घ और च) से भिन्न व्यंजक पढ़े हैं। चिंता न करें। ये सभी व्यंजक तरंग समीकरण के व्यापक हलों को निरूपित करते हैं। साथ ही, स्कूल की भौतिकी और BPHCT-131 की इकाई 19 से याद करें कि

$$\omega = 2\pi f,\ f = \frac{1}{T},$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \text{ और}$$

$$v = f\lambda$$

इसी तरह, हम विद्युत्-क्षेत्र और चुंबकीय क्षेत्र के लिए विद्युत्-चुंबकीय तरंग समीकरणों के समतल तरंग हल निम्नवत् लिख सकते हैं :

$$\vec{\mathbf{E}}(z,t) = \vec{\mathbf{E}}_0\cos(kz - \omega t) \qquad (17.2\text{क})$$

$$\vec{\mathbf{B}}(z,t) = \vec{\mathbf{B}}_0\cos(kz - \omega t) \qquad (17.2\text{ख})$$

इकाई 16 से याद करें कि ये हल निर्वात में संचरित हो रही विद्युत्-चुंबकीय तरंगों को निरूपित करें, इसके लिए इन हलों को आवेश-मुक्त और धारा-मुक्त प्रदेशों के लिए मैक्सवेल समीकरणों को संतुष्ट करना होगा। आइए, सुनिश्चित करें कि ऐसा है कि नहीं। आपने इकाई 16 के उदाहरण 16.2 में जो सीखा है, उससे आप दिखा सकते हैं कि मैक्सवेल समीकरण (16.21 और 16.23)

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{\mathbf{E}} = 0 \quad \text{और} \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{\mathbf{B}} = 0 \qquad (17.3\text{क})$$

समीकरणों (17.2क और 17.2ख) द्वारा संतुष्ट होते हैं, यदि और केवल यदि

$$E_{0z} = \left(\vec{\mathbf{E}}_0\right)_z = 0 \quad \text{और} \quad B_{0z} = \left(\vec{\mathbf{B}}_0\right)_z = 0 \qquad (17.3\text{ख})$$

ध्यान दें कि समीकरणों (17.2क और ख) में क्षेत्रों $\vec{\mathbf{E}}_0$ और $\vec{\mathbf{B}}_0$ के परिमाण अचर हैं। इस इकाई में हम विद्युत् और चुंबकीय क्षेत्रों के अचर परिमाण ही लेंगे।

आपको संतुष्ट हो जाना चाहिए कि यह सत्य है। इसके लिए बोध प्रश्न 1 हल करें।

बोध प्रश्न 1 – मैक्सवेल समीकरणों का हल

समीकरण (17.3ख) द्वारा दिए गए प्रतिबंध को सत्यापित करें जिसके अधीन समीकरण (17.2क और 17.2ख), मैक्सवेल समीकरणों (17.3क) को संतुष्ट करते हैं।

अब हम यह जांचेंगे कि समीकरण (17.2क और ख), निर्वात में बाकी मैक्सवेल समीकरणों (16.22 और 16.24) को संतुष्ट करते हैं। इसके लिए हम इन्हें पहले मैक्सवेल समीकरण (16.22) में प्रतिस्थापित करेंगे :

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t} \tag{17.4}$$

ध्यान दें कि इस इकाई में हमने x, y और z-अक्षों के अनुदिश एकक सदिशों के लिए प्रतीकों $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$ और $\hat{\mathbf{k}}$ की जगह क्रमशः प्रतीकों $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$ और $\hat{\mathbf{z}}$ का उपयोग किया है ताकि आप तरंग संख्या k और इसके संगत तरंग सदिश $\hat{\mathbf{k}}$ के प्रतीकों और z-अक्ष के अनुदिश एकक सदिश में भेद कर सकें।

आइए, पहले देखें कि समीकरण (17.2क) द्वारा दिया गया विद्युत्-क्षेत्र समीकरण (17.4) को संतुष्ट करता है कि नहीं। इसके लिए हम सदिश क्षेत्र के कर्ल की परिभाषा का उपयोग करेंगे जो आपने इकाई 2 में सीखी है। तब समीकरण (17.3ख) से $E_z = 0$ समीकरण (17.4) में रख कर हम समीकरण (17.4) के वामपक्ष को इस तरह लिख सकते हैं :

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{E}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & 0 \end{bmatrix} \tag{17.5क}$$

अब आप समीकरण (17.2क) से देख सकते हैं कि :

$$E_x = E_{0x} \cos(kz - \omega t) \quad \text{और} \quad E_y = E_{0y} \cos(kz - \omega t) \tag{17.5ख}$$

समीकरण (17.5क) में समीकरण (17.5ख) रख कर, आप सत्यापित कर सकते हैं कि

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{E}} = \hat{\mathbf{x}}\,[-\frac{\partial}{\partial z} E_{0y} \cos(kz - \omega t)] + \hat{\mathbf{y}}\,[\frac{\partial}{\partial z} E_{0x} \cos(kz - \omega t)] \tag{17.6क}$$

या $$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{E}} = \hat{\mathbf{x}}\,[k E_{0y} \sin(kz - \omega t)] + \hat{\mathbf{y}}\,[-k E_{0x} \sin(kz - \omega t)] \tag{17.6ख}$$

समीकरण (17.2ख) के साथ $B_z = 0$ का प्रयोग करने पर समीकरण (17.4) का दक्षिण पक्ष हो जाता है :

$$-\frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\left[\hat{\mathbf{x}} B_{0x} \cos(kz - \omega t) + \hat{\mathbf{y}} B_{0y} \cos(kz - \omega t)\right] \tag{17.7क}$$

या $$-\frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t} = -\omega\, \hat{\mathbf{x}} B_{0x} \sin(kz - \omega t) - \omega \hat{\mathbf{y}} B_{0y} \sin(kz - \omega t) \tag{17.7ख}$$

समीकरणों (17.6क और 17.7ख) की तुलना करने पर हम पाते हैं कि

$$k E_{0y} = -\omega B_{0x} \tag{17.8क}$$

और $$k E_{0x} = \omega B_{0y} \tag{17.8ख}$$

आप सत्यापित कर सकते हैं कि समीकरणों (17.8क और 17.8ख) को इस प्रकार लिखा जा सकता है :

$$\vec{\mathbf{B}}_0 = \frac{k}{\omega} (\hat{\mathbf{z}} \times \vec{\mathbf{E}}_0) \tag{17.9क}$$

हम तरंग सदिश $\vec{\mathbf{k}}$ द्वारा निरूपित संचरण की किसी भी स्वेच्छ दिशा में, समीकरण (17.9क) का व्यापकीकरण कर सकते हैं। यहां हम व्युत्पत्ति दिए बिना, निर्वात में संचरित

हो रही विद्युत्-चुंबकीय तरंग के लिए, तरंग सदिश $\vec{\mathbf{k}}$ द्वारा निरूपित तरंग संचरण की किसी भी स्वेच्छ दिशा में, समीकरण (17.9क) का व्यापकीकृत रूप लिख रहे हैं :

$$\vec{\mathbf{B}} = \frac{k}{\omega}(\hat{\mathbf{k}} \times \vec{\mathbf{E}}) \quad \text{या} \quad \hat{\mathbf{k}} \times \vec{\mathbf{E}} = c\vec{\mathbf{B}} \quad \left(\because c = \frac{\omega}{k}\right) \qquad (17.9\text{ख})$$

जहां $\hat{\mathbf{k}}$ संचरण की दिशा में एकक सदिश है। आगे पढ़ने से पहले आपको समीकरण (17.9क) को सत्यापित कर लेना चाहिए।

बोध प्रश्न 2 – मैक्सवेल समीकरणों का हल

सत्यापित करें कि समीकरण (17.9क) और समीकरण (17.8क और ख) समतुल्य हैं।

समीकरण (17.9क और ख) हमें क्या बताते हैं? ये समीकरण क्षेत्र $\vec{\mathbf{B}}$ को संचरण की दिशा में एकक सदिश (z-अक्ष या व्यापक तौर पर $\hat{\mathbf{k}}$) और क्षेत्र $\vec{\mathbf{E}}$ के सदिश गुणनफल के रूप में व्यक्त करते हैं। इसका अर्थ है कि चुंबकीय क्षेत्र सदिश $\vec{\mathbf{B}}$, विद्युत्-क्षेत्र सदिश और विद्युत्-चुंबकीय तरंग की संचरण की दिशा में एकक सदिश, दोनों के लंबवत् है।

समीकरण (17.9क और ख) हमें विद्युत्-चुंबकीय तरंग के विद्युत्-क्षेत्र, चुंबकीय क्षेत्र और तरंग की संचरण की दिशा निर्धारित करने का नियम बताते हैं। इस तरह, हम पाते हैं कि इस प्रतिबंध से कि समीकरणों (17.2क और ख) के $\vec{\mathbf{E}}$ और $\vec{\mathbf{B}}$ क्षेत्र निर्वात में मैक्सवेल समीकरणों को संतुष्ट करें, हमें यह परिणाम मिलता है :

समीकरणों (17.2क और ख) के $\vec{\mathbf{E}}$ और $\vec{\mathbf{B}}$ क्षेत्र एक-दूसरे के लंबवत् होते हैं और दोनों क्षेत्र तरंग संचरण की दिशा के लंबवत् होते हैं। ये तरंग समीकरण को संतुष्ट करते हैं और विद्युत्-चुंबकीय तरंग से संबद्ध विद्युत् और चुंबकीय क्षेत्रों को निरूपित करते हैं।

समीकरणों (17.2क और ख) के $\vec{\mathbf{E}}$ और $\vec{\mathbf{B}}$ क्षेत्र विद्युत्-चुंबकीय तरंग समीकरण के **समतल तरंग** हलों को निरूपित करते हैं जैसाकि आपने इकाई 16 में पढ़ा है। इस प्रकार की तरंगों को **एकवर्णी ज्यावक्रीय विद्युत्-चुंबकीय समतल तरंग** भी कहा जाता है। एकवर्णी का अर्थ है एक रंग वाली। क्योंकि आवृत्ति का संबंध रंग से होता है, विशेष रूप से प्रकाश के संदर्भ में, इसलिए **एकल आवृत्ति वाली ज्यावक्रीय तरंगों** को **एकवर्णी** कहा जाता है।

ध्यान दें कि समीकरणों (17.2क और ख) के $\vec{\mathbf{E}}$ और $\vec{\mathbf{B}}$ क्षेत्रों की कलाएं समान हैं। चूंकि $\hat{\mathbf{z}}$ और $\vec{\mathbf{E}}_0$ के बीच का कोण 90° है, अतः, समीकरण (17.9क) में सदिश गुणनफल की परिभाषा से उनके आयामों या परिमाणों के बीच ये संबंध होते हैं :

$$B_0 = \frac{k}{\omega}E_0 = \frac{E_0}{c} \quad \text{या} \quad \frac{|\vec{\mathbf{E}}|}{|\vec{\mathbf{B}}|} = c \qquad (17.10)$$

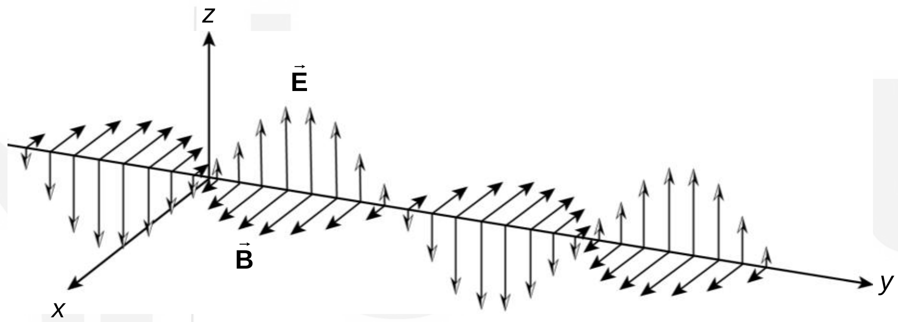
चौथे मैक्सवेल समीकरण से यही परिणाम मिलता है। इसे आप स्वयं सत्यापित करें। इसके लिए बोध प्रश्न 3 हल करें। इससे आप अभी तक के गणितीय चरणों का अभ्यास भी कर सकेंगे।

बोध प्रश्न 3 – मैक्सवेल समीकरणों का हल

सिद्ध करें कि समीकरणों (17.2क और 17.2ख) के $\vec{\mathbf{E}}$ और $\vec{\mathbf{B}}$ क्षेत्र निम्नलिखित मैक्सवेल समीकरण को संतुष्ट करते हैं :

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{B}} = \mu_0 \, \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t} \quad \text{यदि} \quad \hat{\mathbf{k}} \times \vec{\mathbf{B}}_0 = -\frac{\vec{\mathbf{E}}_0}{c}$$

अभी तक आपने सीखा है कि $\vec{\mathbf{E}}$ और $\vec{\mathbf{B}}$ क्षेत्रों के तरंग समीकरणों के समतल तरंग हल जो समीकरणों (17.2क और ख) द्वारा दिए जाते हैं, निर्वात में (यानी आकाश के आवेश-मुक्त और धारा-मुक्त प्रदेशों में) मैक्सवेल समीकरणों को संतुष्ट करते हैं। समीकरण (17.9क या ख) हमें बताता है कि विद्युत्-चुंबकीय तरंग के $\vec{\mathbf{E}}$ और $\vec{\mathbf{B}}$ क्षेत्र एक-दूसरे के लंबवत् होते हैं और तरंग संचरण की दिशा के लंबवत् होते हैं जो व्यापक तौर पर $\hat{\mathbf{k}}$ द्वारा दी जाती है। इस तरह, विद्युत्-चुंबकीय तरंग अनुप्रस्थ तरंग होती है जैसाकि आपने इकाई 16 में पढ़ा है (चित्र 17.1 देखें)।



चित्र 17.1: विद्युत्-चुंबकीय तरंग अनुप्रस्थ तरंग होती है। इस चित्र में दिखाई गई विद्युत्-चुंबकीय तरंग y-दिशा में संचरित हो रही है। तरंग के $\vec{\mathbf{E}}$ और $\vec{\mathbf{B}}$ क्षेत्र क्रमशः z और x-दिशाओं में हैं।

व्यापक तौर पर, $\vec{\mathbf{E}}$ और $\vec{\mathbf{B}}$, x, y, z और t के कोई भी फलन हो सकते हैं। लेकिन यह चर्चा इस पाठ्यक्रम के दायरे से बाहर है। आइए, आपने निर्वात में समतल विद्युत्-चुंबकीय तरंग के संचरण के बारे में जो सीखा है, अब हम उसे दोहराएं।

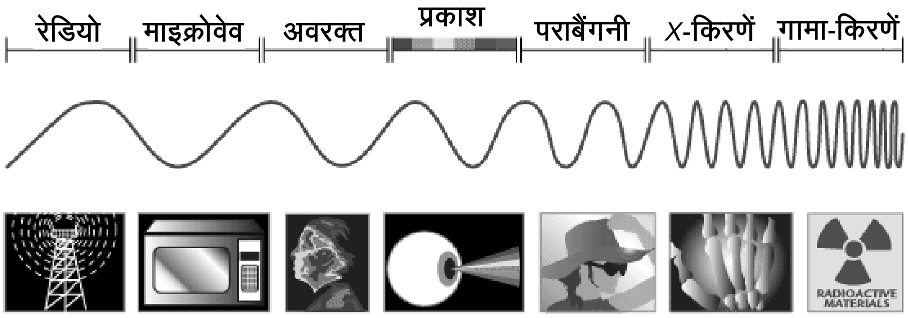
दोहराएं

निर्वात में समतल विद्युत्-चुंबकीय तरंग का संचरण

1. किसी भी क्षण पर निर्वात में संचरित हो रही विद्युत्-चुंबकीय तरंग के प्रत्येक बिंदु पर विद्युत् और चुंबकीय क्षेत्रों का संबंध समीकरण (17.9ख) द्वारा दिया जाता है। उनके परिमाणों का संबंध समीकरण (17.10) द्वारा दिया जाता है।
2. विद्युत्-चुंबकीय तरंग के विद्युत्-क्षेत्र और चुंबकीय क्षेत्र एक-दूसरे के लंबवत् होते हैं और तरंग संचरण की दिशा के भी लंबवत् होते हैं यानी विद्युत्-चुंबकीय तरंग अनुप्रस्थ तरंग होती है।
3. निर्वात में संचरित हो रही विद्युत्-चुंबकीय तरंग चाल c से संचरित होती है।

जैसाकि आप स्कूल की भौतिकी से जानते हैं, रेडियो तरंगें, माइक्रोवेव तरंगें, अवरक्त किरणें, प्रकाश, पराबैंगनी किरणें, X-किरणें और γ-किरणें, सभी विद्युत्-चुंबकीय तरंगें

हैं। इनसे **विद्युत्-चुंबकीय स्पेक्ट्रम** संघटित होता है। ये तरंगें एक-दूसरे से केवल आवृत्ति में भिन्न होती हैं (चित्र 17.2 देखें)।



चित्र 17.2: विद्युत्-चुंबकीय स्पेक्ट्रम।

आप जानते हैं कि तरंग का तरंगदैर्घ्य होता है : $\lambda = \dfrac{2\pi}{k}$ (17.11क)

और उसकी आवृत्ति होती है : $f = \dfrac{c}{\lambda}$ (17.11ख)

जैसाकि आप जानते हैं, k तरंग की **तरंग संख्या** होती है (क्योंकि प्रति एकक दूरी पर तरंग में $k/2\pi$ तरंगदैर्घ्य होते हैं), और $\vec{\mathbf{k}}$ **तरंग सदिश** कहलाता है।

अब आप थोड़ा ठहर कर मैक्सवेल समीकरणों द्वारा प्रागुक्त विद्युत्-चुंबकीय तरंगों और उनके संचरण के बारे में आपने इस भाग में जो सीखा है, उसे दोहरा लें।

मैक्सवेल समीकरण और विद्युत्-चुंबकीय तरंगें

दोहराएं

1. मैक्सवेल समीकरण निर्वात में (यानी आकाश के आवेश-मुक्त और धारा-मुक्त प्रदेश में) विद्युत्-चुंबकीय तरंगों के अस्तित्व की प्रागुक्ति करते हैं। मैक्सवेल समीकरण एक प्रगामी विद्युत्-चुंबकीय तरंग का निदर्शन करते हैं जो कि समय-परिवर्ती विद्युत् और चुंबकीय क्षेत्रों से संघटित होती है।

2. **विद्युत्-चुंबकीय तरंगें स्वपोषी होती हैं और निर्वात में (यानी आकाश के आवेश-मुक्त और धारा-मुक्त प्रदेशों में) प्रकाश की चाल c से चलती हैं।**

3. विद्युत्-चुंबकीय तरंग में विद्युत्-क्षेत्र और चुंबकीय क्षेत्र एक-दूसरे के लंबवत् होते हैं और तरंग संचरण की दिशा के भी लंबवत् होते हैं। अतः, विद्युत्-चुंबकीय तरंग अनुप्रस्थ तरंग होती है। भौतिकी में समतल विद्युत्-चुंबकीय तरंगों में एकल आवृत्ति वाली ज्यावक्रीय तरंगों का अधिक उपयोग किया जाता है।

4. विद्युत्-चुंबकीय तरंग में $\vec{\mathbf{E}}$ और $\vec{\mathbf{B}}$ क्षेत्र अपनी-अपनी तरंग समीकरणों और मैक्सवेल समीकरणों को संतुष्ट करते हैं।

5. समतल विद्युत्-चुंबकीय तरंगों का भौतिकी में विशेष महत्व होता है। इस प्रकार की तरंगों का गुणधर्म यह है कि आकाश के प्रत्येक बिन्दु पर इनके $\vec{\mathbf{E}}$ और $\vec{\mathbf{B}}$ क्षेत्र सदिश एक समतल में स्थित होते हैं और दो अलग-अलग बिन्दुओं पर ये समतल एक-दूसरे के समांतर होते हैं।

अब हम एक उदाहरण लेकर इन संकल्पनाओं को समझाएंगे।

उदाहरण 17.1 : समतल विद्युत्-चुंबकीय तरंगें

निर्वात में एक विद्युत्-चुंबकीय तरंग का विद्युत्-क्षेत्र दिया है :

$$\vec{\mathbf{E}} = (60\ \mathrm{Vm^{-1}})\,\hat{\mathbf{x}}\cos(10^8 t + kz)$$

तरंग के लिए तरंग संचरण की दिशा, तरंग संख्या, आवृत्ति और चुंबकीय क्षेत्र ज्ञात करें।

हल ■ इस प्रश्न को हल करने के लिए हम समीकरणों (17.1घ, 17.2क, 17.9ख, 17.11ख और 17.10) का उपयोग करेंगे।

आइए, सबसे पहले हम पूछें : दिए गए विद्युत्-क्षेत्र से हमें क्या जानकारी मिलती है? विद्युत्-क्षेत्र के व्यंजक की समीकरण (17.2क) से तुलना करने पर आप तुरंत यह देख सकते हैं कि इस तरंग के लिए

$$\omega = 10^8\,\mathrm{s^{-1}} \quad \text{और} \quad E_0 = 60\,\mathrm{V\,m^{-1}}$$

तरंग संचरण की दिशा ज्ञात करने के लिए हम तरंग के विद्युत्-क्षेत्र के व्यंजक में कोसाइन फलन के कोणांक की समीकरण (17.1घ) से तुलना करते हैं। आप देख सकते हैं कि तरंग संचरण की दिशा, ऋणात्मक z-दिशा है। हम निम्नलिखित संबंध से तरंग संख्या k ज्ञात कर सकते हैं :

$$c = \frac{\omega}{k} \quad \Rightarrow \quad 3\times 10^8\,\mathrm{m\,s^{-1}} = \frac{10^8\,\mathrm{s^{-1}}}{k} \quad \text{या} \quad k = \frac{1}{3}\mathrm{m^{-1}}$$

समीकरण (17.11ख) से तरंग की आवृत्ति है :

$$f = \frac{10^8}{2\pi}\mathrm{Hz} = 1.67\times 10^7\,\mathrm{Hz}$$

तरंग के चुंबकीय क्षेत्र का रूप वही है जो कि उसके विद्युत्-क्षेत्र $\vec{\mathbf{E}}$ का है :

$$\vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{B}}_0\cos(10^8 t + kz)$$

$\vec{\mathbf{B}}$ का मान ज्ञात करने के लिए हम समीकरणों (17.9ख और 17.10) का उपयोग करते हैं। अतः, चुंबकीय क्षेत्र की दिशा है :

$$\hat{\mathbf{B}} = \hat{\mathbf{k}}\times\hat{\mathbf{E}} = -\hat{\mathbf{z}}\times\hat{\mathbf{x}} = -\hat{\mathbf{y}}$$

समीकरण (17.10) से तरंग के चुंबकीय क्षेत्र का परिमाण $\vec{\mathbf{B}}_0$ है $\left|\vec{\mathbf{B}}_0\right| = \left|\vec{\mathbf{E}}_0\right|/c = (60/c)\mathrm{T}$ । अतः, तरंग से संबद्ध चुंबकीय क्षेत्र है :

$$\vec{\mathbf{B}} = -\left(\frac{60}{c}\,\mathrm{T}\right)\hat{\mathbf{y}}\cos\left(10^8 t + \frac{1}{3}z\right)$$

यह सुनिश्चित करने के लिए कि इस भाग में बतायी गई बातों को आपने अच्छी तरह से समझ लिया है या नहीं, अब आप एक बोध प्रश्न हल करें।

बोध प्रश्न 4 – विद्युत्-चुंबकीय तरंगें

$\vec{\mathbf{E}} = (1000\ \text{Vm}^{-1})\,\hat{\mathbf{y}}\left[\sin\left(\dfrac{\pi x}{25} - \omega t\right)\right]$ द्वारा दिया गया विद्युत्-क्षेत्र आकाश के आवेश-मुक्त और धारा-मुक्त प्रदेश में (यानी निर्वात में) एक समतल विद्युत्-चुंबकीय तरंग के विद्युत्-क्षेत्र को निरूपित करता है। तरंग के तरंगदैर्घ्य और आवृत्ति, तरंग संचरण की दिशा और तरंग से संबद्ध चुंबकीय क्षेत्र ज्ञात करें।

इकाई 16 में और अभी तक इस इकाई में आपने मैक्सवेल समीकरणों और निर्वात में समतल विद्युत्-चुंबकीय तरंगों के संचरण के बारे में सीखा है। अब हम डाइलेक्ट्रिक माध्यम में मैक्सवेल समीकरणों और समतल तरंगों के संचरण पर चर्चा करेंगे। यह अध्ययन इसलिए महत्वपूर्ण है क्योंकि यह अनेक परिघटनाओं जैसेकि कांच और पानी में प्रकाश के संचरण, मनुष्य के शरीर में X-किरणों और गामा किरणों के संचरण आदि को समझने में सहायक होता है। अतः, अगले भाग में हम डाइलेक्ट्रिक माध्यम में पहले मैक्सवेल समीकरण व्युत्पन्न करेंगे और फिर तरंग समीकरण व्युत्पन्न करेंगे।

17.3 डाइलेक्ट्रिक माध्यमों में विद्युत्-चुंबकीय तरंग संचरण

हम पहले डाइलेक्ट्रिक माध्यम में मैक्सवेल समीकरण व्युत्पन्न करेंगे। चर्चा आसान रखने के लिए हम केवल **रैखिक**, **समदैशिक** और **समांग** डाइलेक्ट्रिक माध्यमों की बात करेंगे। इनके बारे में आपने इस पाठ्यक्रम के खंड 3 की इकाई 10 में पढ़ा है।

इस इकाई में जहां भी डाइलेक्ट्रिक माध्यम की चर्चा की जाए, आप मान कर चलें कि वह डाइलेक्ट्रिक माध्यम **रैखिक, समदैशिक और समांग** है।

17.3.1 डाइलेक्ट्रिक माध्यमों में मैक्सवेल समीकरण

इकाई 10 में की गई चर्चा से याद करें कि डाइलेक्ट्रिक पदार्थों में वैद्युत ध्रुवण और चुंबकन होता है। ऐसे पदार्थों में 'परिबद्ध' आवेश और धारा का संचयन होता है। आपने सीखा है कि डाइलेक्ट्रिक में, स्थैतिक अवस्था में, वैद्युत ध्रुवण $\vec{\mathbf{P}}$ के कारण निम्नलिखित परिबद्ध आवेश का संचयन होता है :

$$\rho_P = -\vec{\nabla}.\vec{\mathbf{P}} \tag{17.12क}$$

आप जानते हैं कि परिभाषा से, $\vec{\mathbf{P}}$, प्रति एकक आयतन वैद्युत द्विध्रुव आघूर्ण के बराबर होता है। अस्थैतिक स्थिति के लिए, वैद्युत ध्रुवण में कोई भी परिवर्तन होने पर आवेश का प्रवाह होता है जिसकी वजह से ध्रुवण धारा प्राप्त होती है। संगत ध्रुवण धारा घनत्व $\vec{\mathbf{J}}_P$, जो समय के साथ ρ_P में परिवर्तन होने के कारण उपस्थित होता है, $\dfrac{\partial\vec{\mathbf{P}}}{\partial t}$ के बराबर होता है। अतः,

$$\vec{\mathbf{J}}_P = \frac{\partial\vec{\mathbf{P}}}{\partial t} \tag{17.12ख}$$

इसी तरह, आपने इकाई 14 में सीखा है कि किसी भी पदार्थ में चुंबकन $\vec{\mathbf{M}}$ के कारण निम्नलिखित परिबद्ध धारा प्राप्त होती है :

$$\vec{\mathbf{J}}_M = \vec{\nabla}\times\vec{\mathbf{M}} \tag{17.12ग}$$

जैसाकि आप जानते हैं, चुंबकन, प्रति एकक आयतन चुंबकीय द्विध्रुव आघूर्ण के बराबर होता है। लेकिन आपको यह ध्यान रखना चाहिए कि ध्रुवण धारा $\vec{\mathbf{J}}_P$ का परिबद्ध धारा $\vec{\mathbf{J}}_M$ से कोई संबंध नहीं होता। परिबद्ध धारा का संबंध (डाइलेक्ट्रिक पदार्थों सहित) पदार्थ के चुंबकन से होता है और यह इलेक्ट्रॉनों के प्रचक्रण और कक्षीय गति के कारण उत्पन्न होती है। इसके विपरीत, $\vec{\mathbf{J}}_P$ आवेश की रैखिक गति के कारण होता है जब वैद्युत ध्रुवण में परिवर्तन होता है। अब मान लें कि $\vec{\mathbf{P}}$ की दिशा दायीं ओर है और उसमें वृद्धि हो रही है। तब प्रत्येक धन आवेश दायीं ओर चला जाता है और प्रत्येक ऋण आवेश बायीं ओर, जिसके कारण ध्रुवण धारा उत्पन्न होती है। इस चर्चा को ध्यान में रख कर हम कुल आवेश घनत्व को इस रूप में लिख सकते हैं :

$$\rho = \rho_f + \rho_P = \rho_f - \vec{\nabla}.\vec{\mathbf{P}} \qquad (17.13\text{क})$$

जहां ρ_f मुक्त आवेश घनत्व है। कुल धारा घनत्व है :

$$\vec{\mathbf{J}} = \vec{\mathbf{J}}_f + \vec{\mathbf{J}}_P + \vec{\mathbf{J}}_M = \vec{\mathbf{J}}_f + \frac{\partial \vec{\mathbf{P}}}{\partial t} + \vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{M}} \qquad (17.13\text{ख})$$

जहां $\vec{\mathbf{J}}_f$ मुक्त धारा घनत्व है। हम समीकरणों (17.13क और ख) से ρ और $\vec{\mathbf{J}}$ के व्यंजकों को मैक्सवेल समीकरणों (16.17 से 16.20) में प्रतिस्थापित करते हैं। तब हम डाइलेक्ट्रिक माध्यमों के लिए अवकल रूप में निम्नलिखित मैक्सवेल समीकरण लिख सकते हैं :

$$\vec{\nabla}.\vec{\mathbf{E}} = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(\rho_f - \vec{\nabla}.\vec{\mathbf{P}}\right) \qquad (17.14)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t} \qquad (17.15)$$

$$\vec{\nabla}.\vec{\mathbf{B}} = 0 \qquad (17.16)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{B}} = \mu_0\left(\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t} + \vec{\mathbf{J}}_f + \frac{\partial \vec{\mathbf{P}}}{\partial t} + \vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{M}}\right) \qquad (17.17)$$

आइए, हम समीकरणों (17.14 से 17.17) को समीकरणों (16.17 से 16.20) के रूप में लिखें। इसके लिए हम क्षेत्र $\vec{\mathbf{D}}$ और $\vec{\mathbf{H}}$ परिभाषित करते हैं जिनके बारे में आपने इस पाठ्यक्रम के खंड 3 की इकाइयों 10 और 14 में पढ़ा है :

$$\vec{\mathbf{D}} = \varepsilon_0 \vec{\mathbf{E}} + \vec{\mathbf{P}} \qquad (17.18)$$

$$\vec{\mathbf{H}} = \frac{1}{\mu_0}\vec{\mathbf{B}} - \vec{\mathbf{M}} \qquad (17.19)$$

तब हम समीकरणों (17.14 और 17.17) को इस प्रकार लिख सकते हैं (हाशिए पर दी गई टिप्पणी पढ़ें) :

$$\vec{\nabla}.\vec{\mathbf{D}} = \rho_f \qquad (17.20)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{H}} = \vec{\mathbf{J}}_f + \frac{\partial \vec{\mathbf{D}}}{\partial t} \qquad (17.21)$$

समीकरण (17.14) से हम लिख सकते हैं :

$\varepsilon_0 \vec{\nabla}.\vec{\mathbf{E}} = \rho_f - \vec{\nabla}.\vec{\mathbf{P}}$

या $\vec{\nabla}.\varepsilon_0 \vec{\mathbf{E}} + \vec{\nabla}.\vec{\mathbf{P}} = \rho_f$

या $\vec{\nabla}.(\varepsilon_0 \vec{\mathbf{E}} + \vec{\mathbf{P}}) = \rho_f$

समीकरण (17.18) का प्रयोग करने से हमें समीकरण (17.20) मिलता है :

$\vec{\nabla}.\vec{\mathbf{D}} = \rho_f$

आपने इकाई 10 में सीखा है कि एक रैखिक, समदैशिक और समांग डाइलेक्ट्रिक माध्यम में, $\vec{\mathbf{P}}, \vec{\mathbf{E}}$ के समांतर होता है और $\vec{\mathbf{P}} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{\mathbf{E}}$ होता है जहां χ_e माध्यम की वैद्युत प्रवृत्ति (electric susceptibility) है। आपने इकाई 14 में सीखा है कि $\vec{\mathbf{M}}$, $\vec{\mathbf{H}}$ के समांतर होता है और $\vec{\mathbf{M}} = \chi_M \vec{\mathbf{H}}$ होता है जहां χ_M माध्यम की चुंबकीय प्रवृत्ति (magnetic susceptibility) है। ऐसे पदार्थों के लिए हम समीकरणों (17.18 और 17.19) को निम्नवत् लिख सकते हैं (हाशिए पर दी गई टिप्पणी पढ़ें) :

$$\vec{\mathbf{D}} = \varepsilon \vec{\mathbf{E}} \qquad (17.22)$$

और

$$\vec{\mathbf{H}} = \frac{1}{\mu} \vec{\mathbf{B}} \qquad (17.23)$$

यहां

$$\varepsilon = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) \qquad (17.24)$$

और

$$\mu = \mu_0 (1 + \chi_M) \qquad (17.25)$$

समीकरण (17.18) से
$\vec{\mathbf{D}} = (\varepsilon_0 \vec{\mathbf{E}} + \vec{\mathbf{P}})$
$\vec{\mathbf{P}} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{\mathbf{E}}$ का प्रयोग कर हम लिख सकते हैं :
$\vec{\mathbf{D}} = \varepsilon_0 \vec{\mathbf{E}} + \varepsilon_0 \chi_e \vec{\mathbf{E}}$
या $\vec{\mathbf{D}} = \varepsilon_0 \vec{\mathbf{E}} (1 + \chi_e)$
$\varepsilon = \varepsilon_0 (1 + \chi_e)$ का प्रयोग करने से हमें समीकरण (17.22) मिलता है : $\vec{\mathbf{D}} = \varepsilon \vec{\mathbf{E}}$
समीकरण (17.19) से
$\mu_0 \vec{\mathbf{H}} = \vec{\mathbf{B}} - \mu_0 \vec{\mathbf{M}}$
$\vec{\mathbf{M}} = \chi_M \vec{\mathbf{H}}$ का प्रयोग कर हम लिख सकते हैं :
$\mu_0 \vec{\mathbf{H}} = \vec{\mathbf{B}} - \mu_0 \chi_M \vec{\mathbf{H}}$
या $\vec{\mathbf{H}} = \dfrac{\vec{\mathbf{B}}}{\mu_0 + \mu_0 \chi_M}$
$\mu = \mu_0 (1 + \chi_M)$ का प्रयोग करने से हमें समीकरण (17.23) मिलता है : $\vec{\mathbf{H}} = \dfrac{\vec{\mathbf{B}}}{\mu}$

सामान्यतः ε (माध्यम की विद्युतशीलता) और μ (माध्यम की चुंबकशीलता) आवृत्ति पर निर्भर करते हैं। यदि माध्यम समांग हो तो ε और μ अचर होते हैं यानी एक बिन्दु से दूसरे बिन्दु तक जाने में इनमें कोई परिवर्तन नहीं होता।

इस जानकारी के आधार पर हम ऐसे डाइलेक्ट्रिक माध्यमों में मैक्सवेल समीकरण लिख सकते हैं। इन्हें हमने तालिका 17.1 में लिखा है।

तालिका 17.1 : रैखिक, समदैशिक और समांग डाइलेक्ट्रिक माध्यमों के लिए मैक्सवेल समीकरण

अवकल रूप	समाकल रूप	
$\vec{\nabla} . \vec{\mathbf{E}} = \dfrac{\rho_f}{\varepsilon}$	$\oiint_S \vec{\mathbf{E}} . d\vec{\mathbf{S}} = \dfrac{q_f}{\varepsilon}$	(17.26)
$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{E}} = -\dfrac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t}$	$\oint_C \vec{\mathbf{E}} . d\vec{\mathbf{l}} = -\dfrac{d\Phi_B}{dt}$	(17.27)
$\vec{\nabla} . \vec{\mathbf{B}} = 0$	$\oiint_S \vec{\mathbf{B}} . d\vec{\mathbf{S}} = 0$	(17.28)
$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{B}} = \mu (\vec{\mathbf{J}}_f + \vec{\mathbf{J}}_d)$ जहां $\vec{\mathbf{J}}_d = \varepsilon \dfrac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t}$	$\oint_C \vec{\mathbf{B}} . d\vec{\mathbf{l}} = \mu (i + i_d)$ जहां $i_d = \varepsilon \dfrac{d\Phi_E}{dt}$	(17.29)

अब आप रैखिक, समदैशिक और समांग डाइलेक्ट्रिक माध्यम में मैक्सवेल समीकरण (17.26 से 17.29) स्वयं व्युत्पन्न करें। इसके लिए आप बोध प्रश्न 5 हल करें।

बोध प्रश्न 5 – डाइलेक्ट्रिक माध्यम में मैक्सवेल समीकरण

समीकरण (17.26 से 17.29) व्युत्पन्न करें।

समीकरण (17.26 से 17.29) [समीकरणों (17.18 और 17.19) और समीकरणों (17.22 और 17.23) के साथ] रैखिक, समदैशिक और समांग डाइलेक्ट्रिक माध्यमों के लिए

विद्युत्-चुंबकत्व के मूलभूत नियम हैं। अब आप ऐसे डाइलेक्ट्रिक माध्यमों में समतल तरंग संचरण के बारे में पढ़ेंगे।

17.3.2 डाइलेक्ट्रिक माध्यमों में समतल तरंग संचरण

आइए, पहले हम डाइलेक्ट्रिक माध्यम के केवल उन्हीं प्रदेशों को लें जहां कोई मुक्त आवेश या मुक्त धारा नहीं। तब डाइलेक्ट्रिक माध्यम के ऐसे प्रदेशों के लिए मैक्सवेल समीकरण निम्न रूप के हो जाते हैं :

$$\vec{\nabla}.\vec{\mathbf{E}} = 0 \tag{17.30}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{\mathbf{E}} = -\frac{\partial\vec{\mathbf{B}}}{\partial t} \tag{17.31}$$

$$\vec{\nabla}.\vec{\mathbf{B}} = 0 \tag{17.32}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{\mathbf{B}} = \mu\varepsilon\frac{\partial\vec{\mathbf{E}}}{\partial t} \tag{17.33}$$

आप यहां यह देख सकते हैं कि ये समीकरण ठीक निर्वात में मैक्सवेल समीकरणों [समीकरण (16.21 से 16.24)] जैसे ही हैं। एक बार फिर आप भाग 16.5 में अपनायी गई विधि का अनुसरण कर सकते हैं और आवेश-मुक्त और धारा-मुक्त रैखिक, समदैशिक और समांग डाइलेक्ट्रिक माध्यम में संचरण कर रही विद्युत्-चुंबकीय तरंग के निम्नलिखित तरंग समीकरण व्युत्पन्न कर सकते हैं :

$$\nabla^2\vec{\mathbf{E}} = \frac{1}{\mu\varepsilon}\frac{\partial^2\vec{\mathbf{E}}}{\partial t^2} \tag{17.34क}$$

और

$$\nabla^2\vec{\mathbf{B}} = \frac{1}{\mu\varepsilon}\frac{\partial^2\vec{\mathbf{B}}}{\partial t^2} \tag{17.34ख}$$

अभ्यास के लिए आप इन समीकरणों को स्वयं व्युत्पन्न करें।

बोध प्रश्न 6 – डाइलेक्ट्रिक माध्यम में तरंग समीकरण

समीकरण (17.34क और 17.34ख) व्युत्पन्न करें।

इस तरह, हम यह पाते हैं कि रैखिक, समदैशिक और समांग डाइलेक्ट्रिक माध्यम में विद्युत्-चुंबकीय तरंगें, चाल

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \tag{17.35}$$

से संचरित होती हैं। अब प्रकाशिकी का एक जाना पहचाना परिणाम है कि पारदर्शी माध्यम में प्रकाश की चाल, माध्यम के अपवर्तनांक n के गुणक से कम हो जाती है। पारदर्शी माध्यम में प्रकाश की चाल का व्यंजक होता है :

$$v = \frac{c}{n} \tag{17.36}$$

समीकरणों (17.35 और 17.36) से आप देख सकते हैं कि n और ऐसे डाइलेक्ट्रिक माध्यमों के वैद्युत और चुंबकीय गुणधर्मों में निम्नलिखित संबंध होता है :

$$n = \sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{\varepsilon_0\,\mu_0}} \qquad (17.37क)$$

जहां हमने समीकरण (17.37क) को प्राप्त करने के लिए परिणाम $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\,\mu_0}}$ का उपयोग किया है। डाइलेक्ट्रिक पदार्थों के लिए प्रायः $\mu \approx \mu_0$ होता है। अतः,

$$n = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}} = \sqrt{\kappa} \qquad (17.37ख)$$

जहां $$\kappa = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \qquad (17.37ग)$$

माध्यम का **डाइलेक्ट्रिक स्थिरांक** (dielectric constant) या **परावैद्युतांक** कहलाता है।

आपको समझना चाहिए कि किसी **माध्यम के अपवर्तनांक का उसके वैद्युत और चुंबकीय गुणधर्मों के साथ संबंध स्थापित करना** मैक्सवेल के विद्युत्-चुंबकत्व के सिद्धांत की एक और बहुत बड़ी उपलब्धि है।

ध्यान दें कि अपवर्तनांक को, जिसका मापन प्रकाशिकी के प्रयोगों में किया जाता है, अब हम आसानी से डाइलेक्ट्रिक स्थिरांक से, जिसका मापन विद्युतिकी के प्रयोगों में किया जाता है, परिकलित कर सकते हैं। यह परिणाम मैक्सवेल की इस खोज का कि प्रकाश विद्युत्-चुंबकीय तरंग है, ठोस प्रमाण है।

एक बार फिर हम रैखिक, समदैशिक और समांग डाइलेक्ट्रिक माध्यम में, जहां कोई मुक्त आवेश और कोई मुक्त धारा नहीं है, तरंग समीकरणों (17.34क और ख) के लिए, उदाहरण 16.2 के समीकरणों (i और ii) के जैसे समतल तरंग हल लिख सकते हैं। अंतर केवल यही है कि ये तरंगें, चाल $v = \frac{\omega}{k}$ से, जो समीकरण (17.35) में दी गई है, संचरित होती हैं :

$$\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{E}}_0 \cos(z - vt) \quad \text{या} \quad \vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{E}}_0 \cos(kz - \omega t) \qquad (17.38क)$$

$$\vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{B}}_0 \cos(z - vt) \quad \text{या} \quad \vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{B}}_0 \cos(kz - \omega t) \qquad (17.38ख)$$

आप यह सत्यापित कर सकते हैं कि निम्नलिखित प्रतिबंधों के अधीन,
समीकरणों (17.38क और ख) के रूप की एकवर्णी ज्यावक्रीय समतल तरंगें, आवेश-मुक्त और धारा-मुक्त रैखिक, समदैशिक और समांग डाइलेक्ट्रिक माध्यम में तरंग समीकरण और मैक्सवेल समीकरणों को संतुष्ट करती हैं :

$$E_{0z} = \left(\vec{\mathbf{E}}_0\right)_z = 0 \quad \text{और} \quad B_{0z} = \left(\vec{\mathbf{B}}_0\right)_z = 0 \qquad (17.39)$$

साथ ही, $$\vec{\mathbf{B}}_0 = \frac{k}{\omega}(\hat{\mathbf{z}} \times \vec{\mathbf{E}}_0) \quad \text{और} \quad B_0 = \frac{k}{\omega}E_0 = \frac{E_0}{v} \qquad (17.40)$$

या व्यापक तौर पर,

$$\vec{\mathbf{B}} = \frac{k}{\omega}(\hat{\mathbf{k}} \times \vec{\mathbf{E}}) \quad \text{या} \quad \hat{\mathbf{k}} \times \vec{\mathbf{E}} = v\vec{\mathbf{B}} \quad (\because v = \frac{\omega}{k}) \qquad (17.41)$$

जहां समीकरण (17.35) से $v = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$ ।

इन समीकरणों को देखने से यह पता चलता है कि एक रैखिक, समदैशिक और समांग डाइलेक्ट्रिक माध्यम में, जहां कोई मुक्त आवेश और मुक्त धारा न हो, तरंग समीकरण के समतल तरंग हल, निर्वात में तरंग समीकरण के समतल तरंग हल से मिलते-जुलते हैं : $\vec{\mathbf{B}}$, $\vec{\mathbf{E}}$ के लंबवत् है और तरंग $\hat{\mathbf{k}}$ की दिशा में चलती है जो $\vec{\mathbf{E}}$ और $\vec{\mathbf{B}}$ दोनों के लंबवत् है। इन दोनों प्रकार के हलों में अंतर क्या है?

ध्यान दें कि डाइलेक्ट्रिक माध्यम में तरंग जिस चाल v से चलती है, वह निर्वात में प्रकाश की चाल c से भिन्न है। चाल c और चाल v में एक अचर गुणांक का अनुपात होता है जिसे (प्रकाशिकी में) **अपवर्तनांक** (index of refraction) कहा जाता है।

इस तरह, यदि हम डाइलेक्ट्रिक माध्यम की एक प्रगामी तरंग की तुलना समान आवृत्ति वाली निर्वात की एक प्रगामी तरंग से करें तो **डाइलेक्ट्रिक माध्यम में तरंग का तरंगदैर्घ्य निर्वात में तरंग के तरंगदैर्घ्य से गुणक** $(1/n)$ **से कम होगा**, क्योंकि (आवृत्ति × तरंगदैर्घ्य = तरंग की चाल)।

अब इस इकाई के अंतिम भाग (भाग 17.4) में, हम विद्युत्-चुंबकीय तरंगों के एक अन्य रोचक पहलू पर चर्चा करेंगे। इसके लिए निम्नलिखित स्थिति पर विचार करें :

जब आप जाड़े के मौसम में दिन में धूप सेंकते हैं तो थोड़े ही समय में आपको गर्माहट महसूस होती है। ऐसा क्यों होता है? स्पष्ट है कि यह सूर्य की किरणों द्वारा लायी जा रही ऊर्जा होती है जो आपके पास पहुंचती है और आपको गर्माहट पहुंचाती है। आप यह तो जानते ही हैं कि तरंगें आकाश के एक प्रदेश से दूसरे प्रदेश तक ऊर्जा ले जाती हैं। अगले भाग में हम आकाश में विद्युत्-चुंबकीय तरंगों द्वारा वाहित ऊर्जा की मात्रा ज्ञात करेंगे।

17.4 विद्युत्-चुंबकीय तरंगों द्वारा वाहित ऊर्जा

याद करें कि खंड 2 की इकाई 9 के भाग 9.4 में हमने (सजातीय आवेशों के कूलॉम प्रतिकर्षण के विरुद्ध) स्थैतिक आवेश वितरण को एकत्रित करने के लिए किया गया आवश्यक कार्य ज्ञात किया था, जिसका मान है :

$$W_E = \frac{1}{2}\iiint_V \rho\phi\, dV \tag{17.42}$$

हम इस व्यंजक को विद्युत्-क्षेत्र के पदों में व्यक्त कर सकते हैं। इसके लिए पहले हम गाउस नियम या मैक्सवेल समीकरण (16.17) का प्रयोग करके ρ को $\vec{\mathbf{E}}$ के पदों में व्यक्त करते हैं :

$$\rho = \varepsilon_0 \vec{\nabla}.\vec{\mathbf{E}} \tag{17.43क}$$

अतः,
$$W_E = \frac{\varepsilon_0}{2}\iiint_V (\vec{\nabla}.\vec{\mathbf{E}})\phi\, dV \tag{17.43ख}$$

अब हम निम्नलिखित सदिश सर्वसमिका [खंड 1 की इकाई 2 का समीकरण (2.6ग)] का उपयोग करते हैं :

$$\vec{\nabla}.(\vec{\mathbf{E}}\phi) = \phi(\vec{\nabla}.\vec{\mathbf{E}}) + \vec{\mathbf{E}}.(\vec{\nabla}\phi)$$

समीकरण (17.43ख) में इस सदिश सर्वसमिका का उपयोग कर और $\vec{\mathbf{E}} = -\vec{\nabla}\phi$ [खंड 2 की इकाई 9 का समीकरण (9.13)] रख कर हम उसे इस रूप में लिख सकते हैं :

$$W_E = \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\iiint_V \vec{\nabla}.(\phi\vec{\mathbf{E}})dV - \iiint_V \vec{\mathbf{E}}.(\vec{\nabla}\phi)dV\right)$$

या
$$W_E = \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\iiint_V \vec{\nabla}.(\phi\vec{\mathbf{E}})dV + \iiint_V E^2 dV\right) \quad (17.43\text{ग})$$

इकाई 4 से डाइवर्जेन्स प्रमेय याद करें :

$$\iiint_V (\vec{\nabla}.\vec{\mathbf{A}})dV = \oiint_S \vec{\mathbf{A}}.d\vec{\mathbf{S}}$$

हम डाइवर्जेन्स प्रमेय में $\vec{\mathbf{A}} = \phi\vec{\mathbf{E}}$ रखते हैं जिससे हमें समीकरण (17.43घ) मिलता है।

समीकरण (17.43ग) के प्रथम पद पर डाइवर्जेन्स प्रमेय लागू करने पर हमें मिलता है :

$$W_E = \frac{\varepsilon_0}{2}\left[\iint_S \phi\vec{\mathbf{E}}.d\vec{\mathbf{S}} + \iiint_V E^2 dV\right] \quad (17.43\text{घ})$$

अब मान लें कि हम आयतन को बढ़ा देते हैं। तब अतिरिक्त आयतन का W_E में योगदान नहीं होगा क्योंकि उस अतिरिक्त आयतन में $\rho = 0$ होगा। लेकिन जैसे-जैसे हम आयतन बढ़ायेंगे, E^2 का समाकल अधिक होता जायेगा क्योंकि समाकल्य धनात्मक है। अतः, पृष्ठ समाकल का मान घटेगा क्योंकि दोनों का योग समान ही रहना है ताकि ऊर्जा संरक्षित रहे (हाशिए पर दी गई टिप्पणी पढ़ें)। यदि हम यह समाकलन संपूर्ण समष्टि पर करें तो पृष्ठ समाकल शून्य हो जाएगा और शेष बचा रहेगा आयतन समाकल। अतः, W_E का व्यंजक निम्न रूप का हो जाएगा :

ध्यान दें कि हमने अपनी व्युत्पत्ति में यह माना है कि W_E, संतत स्थैतिक आवेश वितरण को जुटाने में सजातीय आवेशों के कूलॉम प्रतिकर्षण के विरुद्ध किया गया कार्य है। चूंकि कूलॉम बल संरक्षी होता है, अतः, निकाय की स्थिर वैद्युत ऊर्जा संरक्षित रहेगी। अतः, इस बल द्वारा किया गया कार्य अचर होगा।

$$W_E = \frac{\varepsilon_0}{2}\iiint_V E^2 dV \quad (17.44\text{क})$$

जहां $\vec{\mathbf{E}}$ परिणामी विद्युत्-क्षेत्र है। इसी प्रकार इकाई 15 के समीकरण (15.27) में हमने विरोधी विद्युत्-वाहक बल के विरुद्ध धारा उत्पन्न करने के लिए किया गया आवश्यक कार्य ज्ञात किया है :

$$W_{EB} = \frac{1}{2\mu_0}\iiint_V B^2 dV \quad (17.44\text{ख})$$

जहां $\vec{\mathbf{B}}$ परिणामी चुंबकीय क्षेत्र है। अतः, हम धारा और आवेश वितरण में संचित कुल ऊर्जा को इस वितरण द्वारा उत्पन्न विद्युत् और चुंबकीय क्षेत्रों के पदों में इस प्रकार व्यक्त कर सकते हैं :

$$W_{EB} = \frac{1}{2}\iiint_V \left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{\mu_0}\right)dV \quad (17.44\text{ग})$$

अब हम ऊर्जा संरक्षण नियम को ध्यान में रखकर अधिक व्यापक रूप में समीकरण (17.44ग) को व्युत्पन्न करेंगे। इस तरह, हम **प्वाइन्टिंग प्रमेय** प्राप्त करेंगे जो विद्युत्-चुंबकत्व में ऊर्जा संरक्षण को व्यक्त करती है।

17.4.1 प्वाइन्टिंग प्रमेय

मान लें कि किन्हीं आवेश और धारा विन्यासों के कारण समय t पर क्षेत्र $\vec{\mathbf{E}}$ और $\vec{\mathbf{B}}$ उत्पन्न होते हैं। मान लें कि ये आवेश समष्टि में वेग $\vec{\mathbf{v}}$ से गतिमान हैं। हम जानना चाहेंगे : **लघु समयांतराल *dt* में इन आवेशों पर विद्युत्-चुंबकीय बल द्वारा किया गया**

कार्य dW क्या है? लोरेन्ट्स बल नियम के अनुसार आवेश के एक अल्पांश dq पर किया गया कार्य होता है :

$$dW = \vec{\mathbf{F}}.d\vec{\mathbf{l}} = dq(\vec{\mathbf{E}} + \vec{\mathbf{v}}\times\vec{\mathbf{B}}).\vec{\mathbf{v}}dt = \vec{\mathbf{E}}.\vec{\mathbf{v}}dq\,dt \qquad [\because (\vec{\mathbf{a}}.(\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}}) = 0] \quad (17.45\text{क})$$

अब हम $dq = \rho dV$ और $\rho\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{J}}$ लिख सकते हैं (हाशिए पर दी गई टिप्पणी पढ़ें)। अतः, हम लिख सकते हैं :

$$dW = \vec{\mathbf{E}}.\frac{\vec{\mathbf{J}}}{\rho}\rho dV\,dt = \vec{\mathbf{E}}.\vec{\mathbf{J}}dV\,dt \qquad (17.45\text{ख})$$

किसी आयतन dV में आवेशों को दी गई शक्ति होगी :

$$\frac{dW}{dt} = \vec{\mathbf{E}}.\vec{\mathbf{J}}dV \qquad (17.45\text{ग})$$

अतः, किसी आयतन V में सभी आवेशों को दी गई कुल शक्ति का मान हम समीकरण (17.45ग) को संपूर्ण आयतन पर समाकलित करके प्राप्त कर सकते हैं :

$$P = \iiint_V (\vec{\mathbf{E}}.\,\vec{\mathbf{J}})dV \qquad (17.46)$$

आइए, हम समीकरण (17.17) का उपयोग कर $\vec{\mathbf{J}}$ का निराकरण करके केवल क्षेत्रों के पदों में समीकरण (17.46) को व्यक्त करें :

$$\vec{\mathbf{E}}.\vec{\mathbf{J}} = \frac{1}{\mu_0}\vec{\mathbf{E}}\,.(\vec{\nabla}\times\vec{\mathbf{B}}) - \varepsilon_0\vec{\mathbf{E}}\,.\,\frac{\partial\vec{\mathbf{E}}}{\partial t} \qquad (17.47\text{क})$$

हम खंड 1 की इकाई 2 के समीकरण (2.9च) की सदिश सर्वसमिका का उपयोग करके लिख सकते हैं :

$$\vec{\nabla}.\,(\vec{\mathbf{E}}\times\vec{\mathbf{B}}) = \vec{\mathbf{B}}\,.(\vec{\nabla}\times\vec{\mathbf{E}}) - \vec{\mathbf{E}}.\,(\vec{\nabla}\times\vec{\mathbf{B}}) \qquad (17.47\text{ख})$$

इस परिणाम को फ़ैराडे नियम, $\vec{\nabla}\times\vec{\mathbf{E}} = -\frac{\partial\vec{\mathbf{B}}}{\partial t}$, के साथ लेने पर हमें मिलता है :

$$\vec{\mathbf{E}}.\,(\vec{\nabla}\times\vec{\mathbf{B}}) = -\vec{\mathbf{B}}\,.\,\frac{\partial\vec{\mathbf{B}}}{\partial t} - \vec{\nabla}.\,(\vec{\mathbf{E}}\times\vec{\mathbf{B}}) \qquad (17.47\text{ग})$$

हम लिख सकते हैं (हाशिए पर दी गई दूसरी टिप्पणी पढ़ें) :

$$\vec{\mathbf{B}}\,.\,\frac{\partial\vec{\mathbf{B}}}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(B^2) \quad \text{और} \quad \vec{\mathbf{E}}.\,\frac{\partial\vec{\mathbf{E}}}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(E^2) \qquad (17.47\text{घ})$$

समीकरण (17.47क) में समीकरण (17.47ग और घ) रखने पर हमें मिलता है :

$$\vec{\mathbf{E}}.\vec{\mathbf{J}} = \frac{1}{\mu_0}[-\vec{\mathbf{B}}\,.\,\frac{\partial\vec{\mathbf{B}}}{\partial t} - \vec{\nabla}.\,(\vec{\mathbf{E}}\times\vec{\mathbf{B}})] - \frac{\varepsilon_0}{2}\frac{\partial}{\partial t}(E^2)$$

या

$$\vec{\mathbf{E}}.\vec{\mathbf{J}} = \frac{1}{\mu_0}[-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(B^2) - \vec{\nabla}.\,(\vec{\mathbf{E}}\times\vec{\mathbf{B}})] - \frac{\varepsilon_0}{2}\frac{\partial}{\partial t}(E^2) \qquad (17.48)$$

इस तरह, हम लिख सकते हैं :

आइए, संबंध $\rho\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{J}}$ प्राप्त करें। इसके लिए हम अनुप्रस्थ परिच्छेद A वाला लघु बेलन लेते हैं जिसमें सभी आवेशित कण जिनमें से प्रत्येक पर आवेश q है, समान चाल v से चलते हैं। समय dt में, आवेशित कण दूरी vdt तय करते हैं। अतः, बेलन का आयतन $Avdt$ है। फिर यदि प्रति एकक आयतन आवेशित कणों की संख्या n है, तो बेलन में आवेशित कणों की संख्या $nAvdt$ है और उसमें कुल आवेश $qnAvdt$ है। बेलन से होकर बहने वाली धारा का मान है :

$$i = \frac{qnAvdt}{dt} = qnAv$$

चूंकि परिभाषा से धारा घनत्व, आवेशित कणों के वेग के लम्बवत् प्रति एकक क्षेत्रफल में धारा के मान के बराबर होता है, अतः, हम लिख सकते हैं : $J = \frac{i}{A} = qnv$

चूंकि J की दिशा आवेशित कणों के प्रवाह की वास्तविक दिशा है, अतः, वह वेग $\vec{\mathbf{v}}$ के समांतर है और हम लिख सकते हैं $\vec{\mathbf{J}} = qn\vec{\mathbf{v}}$

ध्यान दें कि गुणनफल nq धारावाही आवेशों का आयतन आवेश घनत्व है। अतः, हमें मिलता है : $\vec{\mathbf{J}} = \rho\vec{\mathbf{v}}$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(B^2) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\mathbf{B}}.\vec{\mathbf{B}})$$
$$= \frac{1}{2}\frac{\partial\vec{\mathbf{B}}}{\partial t}.\vec{\mathbf{B}} + \frac{1}{2}\vec{\mathbf{B}}.\frac{\partial\vec{\mathbf{B}}}{\partial t}$$
$$= \vec{\mathbf{B}}.\frac{\partial\vec{\mathbf{B}}}{\partial t}$$

चूंकि सदिश गुणनफल क्रमविनिमेय होता है।

$$\vec{\mathbf{E}}.\vec{\mathbf{J}} = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0}B^2\right) - \frac{1}{\mu_0}\vec{\nabla}.(\vec{\mathbf{E}}\times\vec{\mathbf{B}}) \qquad (17.49)$$

समीकरण (17.46) में समीकरण (17.49) रखने पर हमें शक्ति का व्यंजक मिलता है :

$$P = -\frac{d}{dt}\iiint_V \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0}B^2\right)dV - \frac{1}{\mu_0}\iiint_V \vec{\nabla}.(\vec{\mathbf{E}}\times\vec{\mathbf{B}})dV \qquad (17.50)$$

ध्यान दें कि समीकरण (17.50) में हमने $\frac{\partial}{\partial t}$ के स्थान पर $\frac{d}{dt}$ लिखा है क्योंकि हमने उसे समाकल के बाहर ले लिया है ।

अब समीकरण (17.50) के दक्षिण पक्ष के दूसरे पद पर डाइवर्जेन्स प्रमेय लागू करने पर हमें मिलता है :

$$P = -\frac{d}{dt}\iiint_V \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0}B^2\right)dV - \frac{1}{\mu_0}\iint_S (\vec{\mathbf{E}}\times\vec{\mathbf{B}}).d\vec{\mathbf{a}} \qquad (17.51)$$

जहां S आयतन V को परिबद्ध करने वाला पृष्ठ है और $d\vec{\mathbf{a}}$ पृष्ठ क्षेत्रफल का अवयव है। समीकरण (17.51) में समीकरण (17.44ग) रख कर हम लिख सकते हैं :

$$P = -\frac{d}{dt}W_{EB} - \frac{1}{\mu_0}\iint_S (\vec{\mathbf{E}}\times\vec{\mathbf{B}}).d\vec{\mathbf{a}} \qquad (17.52)$$

समीकरण (17.52) **प्वाइन्टिंग प्रमेय** का गणितीय कथन है। यह प्रमेय **विद्युत्-चुंबकत्व में ऊर्जा संरक्षण** को व्यक्त करती है।

समीकरण (17.51) के दक्षिण पक्ष का पहला समाकल उस दर को निरूपित करता है जिससे धारा/आवेश वितरण में संचित ऊर्जा, विद्युत्-चुंबकीय क्षेत्रों द्वारा आयतन V से, उसे परिबद्ध करने वाले पृष्ठ की परिसीमा से बाहर ले जायी जाती है। दूसरा पद उस विद्युत्-चुंबकीय क्षेत्र ऊर्जा को निरूपित करता है जो पृष्ठ से बाहर प्रवाहित होती है। तब प्वाइन्टिंग प्रमेय के अनुसार

विद्युत्-चुंबकीय बल द्वारा आवेशों पर गए कार्य की दर, क्षेत्र में संचित ऊर्जा में हुए ह्रास से, पृष्ठ से बाहर प्रवाहित हो गई विद्युत्-चुंबकीय क्षेत्र ऊर्जा को घटा कर प्राप्त होती है।

राशि

$$\vec{\mathbf{S}} = \frac{1}{\mu_0}(\vec{\mathbf{E}}\times\vec{\mathbf{B}}) \qquad (17.53क)$$

को **प्वाइन्टिंग सदिश** कहा जाता है। यह ऊर्जा अभिवाह घनत्व है यानी $\vec{\mathbf{S}}.d\vec{\mathbf{a}}$, क्षेत्रफल $d\vec{\mathbf{a}}$ वाले पृष्ठ पर प्रति एकक समय में विद्युत्-चुंबकीय क्षेत्र द्वारा अभिगमित या वाहित ऊर्जा है।

ध्यान दें कि किसी बिंदु पर विद्युत्-चुंबकीय तरंग के प्वाइन्टिंग सदिश की दिशा, तरंग संचरण की दिशा के अनुदिश होती है। इसका परिमाण है :

$$S = \frac{1}{\mu_0}EB = \frac{1}{c\mu_0}E^2 = \frac{c}{\mu_0}B^2 \quad \text{चूंकि} \quad E = cB \qquad (17.53ख)$$

प्वाइन्टिंग सदिश का परिमाण किसी क्षण पर ऊर्जा प्रवाह की दर बताता है। हम प्वाइन्टिंग प्रमेय को और अधिक संक्षिप्त रूप में प्वाइन्टिंग सदिश $\vec{\mathbf{S}}$ और W_{EB} के पदों

में व्यक्त कर सकते हैं। समीकरण (17.53क) से $\vec{\mathbf{S}}$ को समीकरण (17.52) में रख कर हम लिख सकते हैं :

$$P = -\frac{dW_{EB}}{dt} - \iint_S \vec{\mathbf{S}}.d\vec{\mathbf{a}} \qquad (17.54)$$

हां, यह अवश्य है कि आवेशों पर किए गए कार्य W के कारण उनकी यांत्रिक ऊर्जा (गतिज, स्थितिज या ऊर्जा के किसी अन्य रूप) में वृद्धि हो जाएगी।

मान लें कि U_M यांत्रिक ऊर्जा घनत्व को प्रकट करता है। तब

$$P = \frac{d}{dt}\iiint_V U_M \, dV \qquad (17.55)$$

हम विद्युत्-चुंबकीय क्षेत्र के ऊर्जा घनत्व U_{EB} को इस तरह परिभाषित करते हैं :

$$U_{EB} = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0}B^2\right) \qquad (17.56)$$

तब हम समीकरण (17.54) को इस तरह लिख सकते हैं :

$$\frac{d}{dt}\iiint_V (U_M + U_{EB})dV = -\iint_S \vec{\mathbf{S}}.d\vec{\mathbf{a}} = -\iiint_V (\vec{\nabla}.\vec{\mathbf{S}})dV \qquad (17.57\text{क})$$

जहां हमने डाइवर्जेन्स प्रमेय का उपयोग किया है। इस तरह, हमें मिलता है :

$$\iiint_V \frac{\partial}{\partial t}(U_M + U_{EB})dV = -\iiint_V (\vec{\nabla}.\vec{\mathbf{S}})dV \qquad (17.57\text{ख})$$

या

$$\iiint_V [(\vec{\nabla}.\vec{\mathbf{S}}) + \frac{\partial}{\partial t}(U_M + U_{EB})]dV = 0 \qquad (17.57\text{ग})$$

चूंकि आयतन V स्वेच्छ है, अतः, समीकरण (17.57ग) का आयतन समाकल तभी शून्य होगा जब समाकल्य शून्य हो। अतः, हमें मिलता है :

$$\vec{\nabla}.\vec{\mathbf{S}} = -\frac{\partial}{\partial t}(U_M + U_{EB}) \qquad (17.58)$$

यह **प्वाइन्टिंग प्रमेय का अवकल रूप** है। इसकी तुलना ऊर्जा-संरक्षण को व्यक्त करने वाले सांतत्य समीकरण से करें :

$$\vec{\nabla}.\vec{\mathbf{J}} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

ध्यान दें कि समीकरण (17.58) में आवेश घनत्व के स्थान पर कुल ऊर्जा घनत्व (यांत्रिक और विद्युत्-चुंबकीय) प्रतिस्थापित किया गया है जबकि धारा घनत्व के स्थान पर प्वाइन्टिंग सदिश प्रतिस्थापित किया गया है। इस तरह,

प्वाइन्टिंग सदिश $\vec{\mathbf{S}}$ ऊर्जा-प्रवाह का वर्णन ठीक उसी प्रकार करता है जिस प्रकार $\vec{\mathbf{J}}$ आवेश प्रवाह का वर्णन करता है।

अब आइए, इस इकाई में आपने जो कुछ पढ़ा है, हम उसका सारांश दें।

17.5 सारांश

अवधारणा	विवरण
विद्युत् और चुंबकीय क्षेत्रों के लिए विद्युत्-चुंबकीय तरंग समीकरणों के समतल तरंग हल	■ निर्वात में विद्युत्-चुंबकीय तरंग से संबद्ध विद्युत् और चुंबकीय क्षेत्रों के लिए तरंग समीकरण होते हैं : $$\nabla^2 \vec{\mathbf{E}} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{\mathbf{E}}}{\partial t^2} \quad \text{और} \quad \nabla^2 \vec{\mathbf{B}} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{\mathbf{B}}}{\partial t^2}$$ जहां निर्वात में विद्युत्-चुंबकीय तरंग की चाल है : $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$ यहां c निर्वात में प्रकाश की चाल है। विद्युत् और चुंबकीय क्षेत्रों के लिए विद्युत्-चुंबकीय तरंग समीकरणों के एकवर्णी समतल तरंग हल होते हैं : $$\vec{\mathbf{E}}(z,t) = \vec{\mathbf{E}}_0 \cos(kz - \omega t) \quad \text{और} \quad \vec{\mathbf{B}}(z,t) = \vec{\mathbf{B}}_0 \cos(kz - \omega t)$$ बशर्ते ये हल मैक्सवेल समीकरणों को भी संतुष्ट करते हों। इस प्रकार की विद्युत्चुंबकीय तरंगों का वर्णन उनकी आवृत्ति f या कोणीय आवृत्ति ω, निर्वात में संचरण की चाल c, तरंग संख्या k, तरंगदैर्घ्य λ द्वारा किया जाता है। इस प्रतिबंध से कि ये हल आवेश-मुक्त और धारा-मुक्त प्रदेशों के लिए मैक्सवेल समीकरणों को संतुष्ट करें, ताकि ये निर्वात में संचरित हो रही विद्युत्-चुंबकीय तरंगों को निरूपित कर सकें, निम्नलिखित समीकरण मिलते हैं : $$(\vec{\mathbf{E}}_0)_z = 0, \qquad (\vec{\mathbf{B}}_0)_z = 0,$$ $$\hat{\mathbf{k}} . \vec{\mathbf{E}} = 0, \qquad \hat{\mathbf{k}} \times \vec{\mathbf{E}} = c\vec{\mathbf{B}},$$ $$\hat{\mathbf{k}} . \vec{\mathbf{B}} = 0, \qquad \hat{\mathbf{k}} \times \vec{\mathbf{B}} = -\frac{\vec{\mathbf{E}}}{c}$$ जहां $\hat{\mathbf{k}}$ तरंग संचरण की दिशा में एकक सदिश है। साथ ही, $$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = \frac{\omega}{k} \quad \text{जहां} \quad \omega = 2\pi f \quad \text{और} \quad \lambda = \frac{2\pi}{k}$$ विद्युत् और चुंबकीय क्षेत्रों के परिमाणों का संबंध होता है : $$\lvert\vec{\mathbf{E}}\rvert = c\lvert\vec{\mathbf{B}}\rvert$$
रैखिक, समदैशिक और समांग डाइलेक्ट्रिक माध्यमों के लिए मैक्सवेल समीकरण	■ रैखिक, समदैशिक और समांग डाइलेक्ट्रिक माध्यमों के लिए मैक्सवेल समीकरण हैं : $$\vec{\nabla} . \vec{\mathbf{E}} = \frac{\rho_f}{\varepsilon} \qquad \oiint_S \vec{\mathbf{E}} . d\vec{\mathbf{S}} = \frac{q_f}{\varepsilon}$$ $$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t} \qquad \oint_C \vec{\mathbf{E}} . d\vec{\mathbf{l}} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

$$\vec{\nabla}.\vec{\mathbf{B}} = 0 \qquad \oiint_S \vec{\mathbf{B}}.d\vec{\mathbf{S}} = 0$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{\mathbf{B}} = \mu\left(\vec{\mathbf{J}}_f + \varepsilon\frac{\partial\vec{\mathbf{E}}}{\partial \mathbf{t}}\right) \qquad \oint_C \vec{\mathbf{B}}.d\vec{\mathbf{l}} = \mu(i + i_d) \quad \text{जहां} \quad i_d = \varepsilon\frac{d\Phi_E}{dt}$$

रैखिक, समदैशिक और समांग डाइलेक्ट्रिक माध्यमों में विद्युत्-चुंबकीय तरंग समीकरण

- रैखिक, समदैशिक और समांग डाइलेक्ट्रिक माध्यमों में जिनमें मुक्त आवेश और मुक्त धारा न संचरित हो रही हो, विद्युत्-चुंबकीय तरंगों के तरंग समीकरण होते हैं :

$$\nabla^2\vec{\mathbf{E}} = \frac{1}{\mu\varepsilon}\frac{\partial^2\vec{\mathbf{E}}}{\partial t^2} \qquad \text{और} \qquad \nabla^2\vec{\mathbf{B}} = \frac{1}{\mu\varepsilon}\frac{\partial^2\vec{\mathbf{B}}}{\partial t^2}$$

जहां ε माध्यम की विद्युतशीलता है और μ, उसकी चुंबकशीलता। ऐसे डाइलेक्ट्रिक माध्यमों में विद्युत् और चुंबकीय क्षेत्रों के लिए तरंग समीकरणों के वे हल जो मैक्सवेल समीकरणों को भी संतुष्ट करते हैं, उन विद्युत्-चुंबकीय तरंगों को निरूपित करते हैं जो माध्यम में चाल $v = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{c}{n}$ से संचरित होती हैं। यहां n माध्यम का अपवर्तनांक है।

डाइलेक्ट्रिक पदार्थों के लिए

$$n = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}} = \sqrt{\kappa} \qquad \text{जहां} \qquad \kappa = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \text{ को पदार्थ का}$$

डाइलेक्ट्रिक स्थिरांक कहते हैं।

रैखिक, समदैशिक और समांग डाइलेक्ट्रिक माध्यमों के लिए विद्युत्-चुंबकीय तरंग समीकरणों के समतल तरंग हल

- रैखिक, समदैशिक और समांग डाइलेक्ट्रिक माध्यमों के लिए जिनमें मुक्त आवेश और मुक्त धारा न संचरित हो रही हो, तरंग समीकरणों के समतल तरंग हल होते हैं :

$$\vec{\mathbf{E}}(z,t) = \vec{\mathbf{E}}_0\cos(z - vt) \qquad \text{और} \qquad \vec{\mathbf{B}}(z,t) = \vec{\mathbf{B}}_0\cos(z - vt)$$

जहां v माध्यम में तरंग की चाल है। निम्नलिखित प्रतिबंधों के अधीन, ऐसे डाइलेक्ट्रिक माध्यमों में विद्युत्-चुंबकीय तरंगें मैक्सवेल समीकरणों को संतुष्ट करती हैं :

$$\hat{\mathbf{k}}.\vec{\mathbf{E}} = 0, \quad \hat{\mathbf{k}}.\vec{\mathbf{B}} = 0, \quad \hat{\mathbf{k}}\times\vec{\mathbf{E}} = v\vec{\mathbf{B}}, \quad \frac{|\vec{\mathbf{E}}|}{|\vec{\mathbf{B}}|} = v \quad \text{जहां} \quad v = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

विद्युत्-चुंबकीय तरंगों द्वारा वाहित ऊर्जा : प्वाइन्टिंग प्रमेय और प्वाइन्टिंग सदिश

- **प्वाइन्टिंग प्रमेय** विद्युत्-चुंबकत्व में ऊर्जा संरक्षण को व्यक्त करती है। प्वाइन्टिंग प्रमेय के अनुसार

विद्युत्-चुंबकीय बल द्वारा आवेशों पर गए कार्य की दर, क्षेत्र में संचित ऊर्जा में हुए ह्रास से, पृष्ठ से बाहर प्रवाहित हो गई विद्युत्-चुंबकीय क्षेत्र ऊर्जा को घटा कर प्राप्त होती है।

प्वाइन्टिंग प्रमेय का गणितीय कथन है :

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{d}{dt}\iiint_V \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0}B^2\right)dV - \frac{1}{\mu_0}\iint_S (\vec{\mathbf{E}}\times\vec{\mathbf{B}}).d\vec{\mathbf{a}}$$

प्वाइन्टिंग सदिश $\vec{\mathbf{S}} = \frac{1}{\mu_0}(\vec{\mathbf{E}}\times\vec{\mathbf{B}})$ ऊर्जा अभिवाह घनत्व को निरूपित करता है यानी $\vec{\mathbf{S}}.d\vec{\mathbf{a}}$, क्षेत्रफल $d\vec{\mathbf{a}}$ वाले पृष्ठ पर प्रति एकक समय में विद्युत्-चुंबकीय क्षेत्र द्वारा वाहित ऊर्जा है। प्वाइन्टिंग सदिश $\vec{\mathbf{S}}$ ऊर्जा-प्रवाह का वर्णन ठीक उसी प्रकार करता है जिस प्रकार $\vec{\mathbf{J}}$ आवेश प्रवाह का वर्णन करता है।

प्वाइन्टिंग प्रमेय का अवकल रूप है :

$$\vec{\nabla}.\vec{\mathbf{S}} = -\frac{\partial}{\partial t}(U_M + U_{EB})$$

जहां U_M यांत्रिक ऊर्जा घनत्व है और U_{EB}, विद्युत्-चुंबकीय क्षेत्र का ऊर्जा घनत्व है, जिसका मान है :

$$U_{EB} = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0}B^2\right)$$

17.6 अंत में कुछ प्रश्न

1. एक समतल विद्युत्-चुंबकीय ज्यावक्रीय तरंग इन प्राचलों द्वारा अभिलक्षित होती है : तरंग $-\hat{\mathbf{x}}$ दिशा में चल रही है, इसकी आवृत्ति 100 MHz है, संबद्ध विद्युत्-क्षेत्र $\hat{\mathbf{z}}$ की दिशा के लंबवत् है। विद्युत्-क्षेत्र का आयाम 100 Vm^{-1} है। इस तरंग को निर्दिष्ट करने वाले $\vec{\mathbf{E}}$ और $\vec{\mathbf{B}}$ क्षेत्रों के व्यंजक लिखें।

2. निर्वात में एक विद्युत्-चुंबकीय तरंग का विद्युत्-क्षेत्र है :

   $$E_x = 0, E_y = 30\cos[(2\pi/3)x - 2\pi\times10^7 t], E_z = 0$$

   जहां E Vm^{-1} में है, t सेकंड में और x मीटर में। तरंग की आवृत्ति ν, तरंगदैर्घ्य λ, तरंग संचरण की दिशा और संबद्ध चुंबकीय क्षेत्र की दिशा ज्ञात करें।

3. $\vec{\mathbf{E}} = (1000\,\text{Vm}^{-1})\hat{\mathbf{x}}[\cos(50y - \omega t)]$ द्वारा दिया गया विद्युत्-क्षेत्र, आवेश-मुक्त और धारा-मुक्त प्रदेश में समतल विद्युत्-चुंबकीय तरंग से संबद्ध विद्युत्-क्षेत्र है। तरंग के तरंगदैर्घ्य और आवृत्ति ज्ञात करें। तरंग से संबद्ध चुंबकीय क्षेत्र की गणना करें।

4. जब निश्चित आवृत्ति की विद्युत्-चुंबकीय तरंग निर्वात से डाइलेक्ट्रिक माध्यम में जाती है, तो तरंग से संबद्ध किन राशियों में परिवर्तन होता है : तरंग की चाल, तरंगदैर्घ्य या तरंग की आवृत्ति?

5. एक डाइलेक्ट्रिक माध्यम में प्रकाश की चाल का मान निर्वात में प्रकाश की चाल के मान का दो-तिहाई है। माध्यम के अपवर्तनांक और डाइलेक्ट्रिक स्थिरांक की गणना करें।

6. एक समतल विद्युत्-चुंबकीय तरंग जिसका विद्युत्-क्षेत्र

   $$\vec{\mathbf{E}} = (100\,\text{Vm}^{-1})\hat{\mathbf{z}}\cos(6\pi x - \omega t)$$

   है, एक डाइलेक्ट्रिक माध्यम में, जिसके लिए $\varepsilon = 9\varepsilon_0$ और $\mu = 4\mu_0$ हैं, संचरित होती है। माध्यम में तरंग की चाल क्या है? तरंग के तरंगदैर्घ्य और आवृत्ति ज्ञात करें। माध्यम के अपवर्तनांक और डाइलेक्ट्रिक स्थिरांक क्या हैं? डाइलेक्ट्रिक माध्यम में तरंग से संबद्ध चुंबकीय क्षेत्र का व्यंजक लिखें।

7. किसी क्षण पर एक विद्युत्-चुंबकीय तरंग से संबद्ध विद्युत् और चुंबकीय क्षेत्र क्रमशः धनात्मक x और y-अक्षों के अनुदिश हैं। प्वाइन्टिंग सदिश की दिशा क्या है? उस क्षण पर तरंग किस दिशा में ऊर्जा वाहित करती है?

8. किसी क्षण पर एक विद्युत्-चुंबकीय तरंग से संबद्ध विद्युत्-क्षेत्र धनात्मक x-अक्ष के अनुदिश है। तरंग ऋणात्मक y-दिशा में ऊर्जा अभिगमित करती है। उस क्षण पर तरंग से संबद्ध चुंबकीय क्षेत्र की दिशा ज्ञात करें।

9. किसी क्षण पर एक समतल विद्युत्-चुंबकीय तरंग से संबद्ध विद्युत् और चुंबकीय क्षेत्र हैं :

$$\vec{\mathbf{E}} = E_0 \cos(kx - \omega t)\hat{\mathbf{z}} \text{ और } \vec{\mathbf{B}} = B_0 \cos(kx - \omega t)\hat{\mathbf{y}}$$

उस क्षण पर तरंग के लिए प्वाइन्टिंग सदिश के परिमाण और दिशा ज्ञात करें।

10. अंत के प्रश्न 9 के विद्युत्-चुंबकीय क्षेत्र का ऊर्जा घनत्व ज्ञात करें।

17.7 हल और उत्तर

बोध प्रश्न

1. समीकरणों (17.2क और 17.2ख) को समीकरण (17.3क) के पहले समीकरण में रखने पर हमें मिलता है :

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{\mathbf{E}} = \vec{\nabla}\cdot[\vec{\mathbf{E}}_0 \cos(kz - \omega t)]$$

$$= [\hat{\mathbf{i}}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}}\frac{\partial}{\partial z}]\cdot[E_{0x}\hat{\mathbf{i}} + E_{0y}\hat{\mathbf{j}} + E_{0z}\hat{\mathbf{k}}]\cos(kz - \omega t)$$

$$= \frac{\partial}{\partial z}[E_{0z}\cos(kz - \omega t)]$$

$\vec{\nabla}\cdot\vec{\mathbf{E}} = 0$ संतुष्ट हो इसके लिए $E_{0z} = 0$ होना चाहिए क्योंकि फलन $\cos(kz - \omega t)$ का z के सापेक्ष अवकलज शून्य नहीं होता। इसी तरह हम दिखा सकते हैं कि

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{\mathbf{B}} = \vec{\nabla}\cdot[\vec{\mathbf{B}}_0 \cos(kz - \omega t)]$$

$$= [\hat{\mathbf{i}}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}}\frac{\partial}{\partial z}]\cdot[B_{0x}\hat{\mathbf{i}} + B_{0y}\hat{\mathbf{j}} + B_{0z}\hat{\mathbf{k}}]\cos(kz - \omega t)$$

$$= \frac{\partial}{\partial z}[B_{0z}\cos(kz - \omega t)]$$

$\vec{\nabla}\cdot\vec{\mathbf{B}} = 0$ संतुष्ट हो इसके लिए $B_{0z} = 0$ होना चाहिए क्योंकि फलन $\cos(kz - \omega t)$ का z के सापेक्ष अवकलज शून्य नहीं होता।

2. हम समीकरण $\vec{\mathbf{B}}_0 = \frac{k}{\omega}(\hat{\mathbf{z}} \times \vec{\mathbf{E}}_0)$ को इस तरह लिख सकते हैं :

$$(B_{0x}\hat{\mathbf{x}} + B_{0y}\hat{\mathbf{y}} + B_{0z}\hat{\mathbf{z}}) = \frac{k}{\omega}\begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ 0 & 0 & 1 \\ E_{0x} & E_{0y} & E_{0z} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{k}{\omega}(-E_{0y})\hat{\mathbf{x}} + \frac{k}{\omega}(E_{0x})\hat{\mathbf{y}}$$

इस समीकरण के दक्षिण और वाम पक्षों की तुलना करने पर हमें मिलता है :

$$kE_{0y} = -\omega B_{0x} \quad \text{और} \quad kE_{0x} = \omega B_{0y}$$

अतः, समीकरण (17.9क) और समीकरण (17.8क और ख) समतुल्य हैं।

3. समीकरणों (17.2क और ख) को समीकरण $\vec{\nabla}\times\vec{\mathbf{B}} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{\mathbf{E}}}{\partial t}$ में रखने पर हमें मिलता है :

$$\vec{\nabla}\times[\vec{\mathbf{B}}_0\cos(kz-\omega t)] = \mu_0\,\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}[\vec{\mathbf{E}}_0\cos(kz-\omega t)]$$

या $$\vec{\nabla}\times[(B_{0x}\hat{\mathbf{x}}+B_{0y}\hat{\mathbf{y}}+B_{0z}\hat{\mathbf{z}})\cos(kz-\omega t)] = \mu_0\,\varepsilon_0\omega\vec{\mathbf{E}}_0\sin(kz-\omega t)$$

पहले हम इस समीकरण के वाम पक्ष को हल करेंगे :

$$\left(\hat{\mathbf{x}}\frac{\partial}{\partial x}+\hat{\mathbf{y}}\frac{\partial}{\partial y}+\hat{\mathbf{z}}\frac{\partial}{\partial z}\right)\times(B_{0x}\hat{\mathbf{x}}+B_{0y}\hat{\mathbf{y}}+B_{0z}\hat{\mathbf{z}})\cos(kz-\omega t)$$

$$= -\hat{\mathbf{x}}\frac{\partial}{\partial z}[B_{0y}\cos(kz-\omega t)] + \hat{\mathbf{y}}\frac{\partial}{\partial z}[B_{0x}\cos(kz-\omega t)]$$

$$= k(\hat{\mathbf{x}}\,B_{0y}-\hat{\mathbf{y}}B_{0x})\sin(kz-\omega t)$$

तो हमें मिलता है :

$$k(\hat{\mathbf{x}}\,B_{0y}-\hat{\mathbf{y}}B_{0x})\sin(kz-\omega t) = \mu_0\,\varepsilon_0\omega\vec{\mathbf{E}}_0\sin(kz-\omega t)$$

या $$k(\hat{\mathbf{x}}\,B_{0y}-\hat{\mathbf{y}}B_{0x}) = \mu_0\,\varepsilon_0\omega\vec{\mathbf{E}}_0 \qquad \text{(i)}$$

आप निम्नवत् सत्यापित कर सकते हैं कि समीकरण (i) का वाम पक्ष $-(\vec{\mathbf{k}}\times\vec{\mathbf{B}}_0)$ ही है।

चूंकि $\vec{\mathbf{k}}$, z-दिशा में है, अतः, हम लिख सकते हैं कि $\vec{\mathbf{k}} = k\hat{\mathbf{z}}$ जिससे

$$\vec{\mathbf{k}}\times\vec{\mathbf{B}}_0 = k\hat{\mathbf{z}}\times(B_{0x}\hat{\mathbf{x}}+B_{0y}\hat{\mathbf{y}}+B_{0z}\hat{\mathbf{z}}) = \hat{\mathbf{y}}kB_{0x}-\hat{\mathbf{x}}kB_{0y} \qquad \text{(ii)}$$

समीकरण (ii) को समीकरण (i) में रखने पर और $\vec{\mathbf{k}} = k\hat{\mathbf{k}}$ लेने पर हमें मिलता है :

$$-k(\hat{\mathbf{k}}\times\vec{\mathbf{B}}_0) = \mu_0\,\varepsilon_0\omega\vec{\mathbf{E}}_0 = \frac{1}{c^2}\omega\vec{\mathbf{E}}_0 \qquad \left(\because c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\,\varepsilon_0}}\right)$$

या $$(\hat{\mathbf{k}}\times\vec{\mathbf{B}}_0) = -\frac{1}{c^2}\frac{\omega}{k}\vec{\mathbf{E}}_0 = -\frac{1}{c^2}c\,\vec{\mathbf{E}}_0 = -\frac{1}{c}\vec{\mathbf{E}}_0$$

इस तरह, हमें मिलता है :

$$\hat{\mathbf{k}}\times\vec{\mathbf{B}}_0 = -\frac{\vec{\mathbf{E}}_0}{c}$$

4. $\vec{\mathbf{E}} = (1000\ \text{Vm}^{-1})\,\hat{\mathbf{y}}\sin\left(\frac{\pi x}{25}-\omega t\right)$ द्वारा दिए गए विद्युत्-क्षेत्र की व्यंजक $\vec{\mathbf{E}} = \hat{\mathbf{y}}E_0\sin(kx-\omega t)$ से तुलना करने पर हम देख सकते हैं कि

$$k = \frac{2\pi}{50}\text{m}^{-1} \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{(2\pi)\times 50}{2\pi}\text{m} = 50\,\text{m}$$

निर्वात में

$$f = \frac{c}{\lambda} \Rightarrow f = \frac{3\times10^8\,\text{ms}^{-1}}{50\,\text{m}} = 6\times10^6\,\text{Hz}$$

दिए गए विद्युत्-क्षेत्र के व्यंजक की समीकरण (17.1ग) से तुलना करने पर हम देख सकते हैं कि तरंग संचरण की दिशा धनात्मक x-दिशा है। संबद्ध चुंबकीय क्षेत्र के व्यंजक के लिए, हमें उसका आयाम, दिशा और ω ज्ञात करने हैं।

$$\omega = 2\pi f = 12\pi \times 10^6 \text{ Hz}$$

समीकरण (17.10) से संबद्ध चुंबकीय क्षेत्र का आयाम है :

$$B_0 = \frac{E_0}{c} = \frac{1000 \text{ V m}^{-1}}{3\times10^8 \text{ ms}^{-1}} = 3\times10^{-6} \text{ T}$$

क्योंकि तरंग संचरण धनात्मक x-दिशा में है और विद्युत्-क्षेत्र धनात्मक y-दिशा में है, अतः, समीकरण (17.9ख) से चुंबकीय क्षेत्र धनात्मक z-दिशा में होगा।

$$\vec{\mathbf{B}} = \hat{\mathbf{z}}(3\times10^{-6} \text{ T}) \sin\left(\frac{\pi x}{25} - \omega t\right)$$

5. पहले हम $\vec{\nabla}.\vec{\mathbf{E}} = \frac{\rho_f}{\varepsilon}$ यानी समीकरण (17.26) को सिद्ध करेंगे।

समीकरण (17.14) से $\vec{\nabla}.\vec{\mathbf{E}} = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(\rho_f - \vec{\nabla}.\vec{\mathbf{P}}\right)$ या $\vec{\nabla}.(\varepsilon_0 \vec{\mathbf{E}} + \vec{\mathbf{P}}) = \rho_f$

या $\vec{\nabla}.\vec{\mathbf{D}} = \rho_f$ या $\varepsilon \vec{\nabla}.\vec{\mathbf{E}} = \rho_f$ $(\because \vec{\mathbf{D}} = \varepsilon \vec{\mathbf{E}})$

या $\vec{\nabla}.\vec{\mathbf{E}} = \frac{\rho_f}{\varepsilon}$

समीकरण को उसके समाकल रूप में लिखने के लिए हम दोनों पक्षों को आयतन V पर समाकलित करते हैं :

$$\iiint_V \vec{\nabla}.\vec{\mathbf{E}}\, dV = \frac{1}{\varepsilon}\iiint_V \rho_f \, dV$$

हम समीकरण के वाम पक्ष पर डाइवर्जेन्स प्रमेय लागू करते हैं और ध्यान देते हैं कि समीकरण के दक्षिण पक्ष में आयतन समाकल, आयतन द्वारा परिबद्ध नेट आवेश q_f के बराबर है। तब

$$\oiint_S \vec{\mathbf{E}}.d\vec{\mathbf{S}} = \frac{q_f}{\varepsilon},$$ जहां S आयतन V को परिबद्ध करने वाला बंद पृष्ठ है।

समीकरण (17.27 और 17.28), समीकरणों (16.18 और 16.19) जैसे हैं।

समीकरण (17.29), $\vec{\nabla}\times\vec{\mathbf{B}} = \mu\left(\vec{\mathbf{J}}_f + \vec{\mathbf{J}}_d\right)$ को सिद्ध करने के लिए हम उसे समीकरण (17.17) के रूप में लिखते हैं :

$$\vec{\nabla}\times\vec{\mathbf{B}} = \mu_0\left(\varepsilon_0\frac{\partial\vec{\mathbf{E}}}{\partial t} + \vec{\mathbf{J}}_f + \frac{\partial\vec{\mathbf{P}}}{\partial t} + \vec{\nabla}\times\vec{\mathbf{M}}\right)$$

या $$\vec{\nabla}\times(\vec{\mathbf{B}} - \mu_0\vec{\mathbf{M}}) = \frac{\partial}{\partial t}(\mu_0\varepsilon_0\vec{\mathbf{E}} + \mu_0\vec{\mathbf{P}}) + \mu_0\vec{\mathbf{J}}_f$$

समीकरण (17.19) से $\vec{\mathbf{H}} = \frac{1}{\mu_0}\vec{\mathbf{B}} - \vec{\mathbf{M}}$ है और समीकरण (17.18) से $\vec{\mathbf{D}} = \varepsilon_0\vec{\mathbf{E}} + \vec{\mathbf{P}}$ लेकर हम उपरोक्त समीकरण को ऐसे लिख सकते हैं :

$$\mu_0\vec{\nabla}\times\vec{\mathbf{H}} = \mu_0\frac{\partial\vec{\mathbf{D}}}{\partial t} + \mu_0\vec{\mathbf{J}}_f \quad \text{या} \quad \vec{\nabla}\times\vec{\mathbf{H}} = \frac{\partial\vec{\mathbf{D}}}{\partial t} + \vec{\mathbf{J}}_f$$

समीकरणों (17.22 और 17.23) से हम लिख सकते हैं :

$$\vec{\nabla}\times\vec{\mathbf{B}} = \mu\varepsilon\frac{\partial\vec{\mathbf{E}}}{\partial t} + \mu\vec{\mathbf{J}}_f \quad \text{या} \quad \vec{\nabla}\times\vec{\mathbf{B}} = \mu\left(\vec{\mathbf{J}}_f + \vec{\mathbf{J}}_d\right)$$

जहां $\vec{\mathbf{J}}_d = \varepsilon \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t}$ जो समीकरण (17.29) ही है। समीकरण को उसके समाकल रूप में लिखने के लिए हम दोनों पक्षों को खुले पृष्ठ S पर समाकलित करेंगे :

$$\iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{B}}) \,.d\vec{\mathbf{S}} = \mu\varepsilon \iint_S \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t}.d\vec{\mathbf{S}} + \mu \iint_S \vec{\mathbf{J}}_f .d\vec{\mathbf{S}}$$

हम जानते हैं कि वैद्युत अभिवाह $\Phi_E = \iint_S \vec{\mathbf{E}}.d\vec{\mathbf{S}}$ और धारा $i = \iint_S \vec{\mathbf{J}}_f .d\vec{\mathbf{S}}$ हैं।

अतः, समीकरण का दक्षिण पक्ष हो जाता है : $\mu\varepsilon \frac{d\Phi_E}{dt} + \mu i$

अब हम समीकरण के वाम पक्ष पर स्टोक्स प्रमेय लागू करते हैं और तब हमें मिलता है :

$$\oint_C \vec{\mathbf{B}}.\, d\vec{\mathbf{l}} = \mu\varepsilon \frac{d\Phi_E}{dt} + \mu i = \mu(i + i_d) \qquad \left(\because i_d = \varepsilon \frac{d\Phi_E}{dt}\right)$$

जहां C खुले पृष्ठ S को परिबद्ध करने वाला बंद वक्र है। यह समीकरण (17.29) का समाकल रूप है।

6. एक बार फिर हम समीकरण (17.31) के $\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{E}}$ का कर्ल लेंगे :

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{E}}) = -\frac{\partial (\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{B}})}{\partial t}$$

या $$\vec{\nabla}(\vec{\nabla}.\vec{\mathbf{E}}) - \nabla^2 \vec{\mathbf{E}} = -\mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{\mathbf{E}}}{\partial t^2} \qquad \left(\because \vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{B}} = \mu\varepsilon \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t}\right)$$

या $$\nabla^2 \vec{\mathbf{E}} = \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{\mathbf{E}}}{\partial t^2}$$ [चूंकि समीकरण (17.30) से $\vec{\nabla}.\vec{\mathbf{E}} = 0$]

इसी तरह, हम समीकरण (17.33) के $\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{B}}$ का कर्ल लेते हैं :

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{B}}) = \mu\varepsilon \frac{\partial (\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{E}})}{\partial t}$$

या $$\vec{\nabla}(\vec{\nabla}.\vec{\mathbf{B}}) - \nabla^2 \vec{\mathbf{B}} = -\mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{\mathbf{B}}}{\partial t^2} \qquad \left(\because \vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t}\right)$$

या $$\nabla^2 \vec{\mathbf{B}} = \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{\mathbf{B}}}{\partial t^2}$$ [चूंकि समीकरण (17.32) से $\vec{\nabla}.\vec{\mathbf{B}} = 0$]

अंत में कुछ प्रश्न

1. चूंकि तरंग $-\hat{\mathbf{x}}$ दिशा में चल रही है, इसका विद्युत्-क्षेत्र $\hat{\mathbf{x}}$ के लंबवत् होगा। दिया है कि $\vec{\mathbf{E}}$, $\hat{\mathbf{z}}$ दिशा के लंबवत् है। तो $\vec{\mathbf{E}}$ या तो $\hat{\mathbf{y}}$ या $-\hat{\mathbf{y}}$ दिशा में होगा। मान लें कि $\vec{\mathbf{E}}$, $\hat{\mathbf{y}}$ की दिशा में है। तब समीकरण (17.41) से, चुंबकीय क्षेत्र $\vec{\mathbf{B}}$ की दिशा $-\hat{\mathbf{z}}$ के अनुदिश होगी। दिया है कि तरंग की आवृत्ति 100 MHz है। अतः,

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \times 10^8 \,\text{Hz}$$

और $$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi f}{c} = \frac{2\pi \times 10^8 \,\text{Hz}}{3 \times 10^8 \,\text{ms}^{-1}} = \frac{2\pi}{3}\,\text{m}^{-1}$$

अतः, $\vec{\mathbf{E}} = \hat{\mathbf{y}}(100\,\text{Vm}^{-1}) \cos 2\pi\left(\frac{x}{3} + 10^8 t\right)$

संगत $\vec{\mathbf{B}}$ क्षेत्र है :

$$\vec{\mathbf{B}} = -\hat{\mathbf{z}}\frac{100\,\text{Vm}^{-1}}{3\times 10^8\,\text{ms}^{-1}} \cos 2\pi\left(\frac{x}{3} + 10^8 t\right)$$

$$= -\hat{\mathbf{z}}\,(3\times 10^{-7}\,\text{T}) \cos 2\pi\left(\frac{x}{3} + 10^8 t\right)$$

2. दिए गए विद्युत्-क्षेत्र के व्यंजक की $\vec{\mathbf{E}} = \hat{\mathbf{y}} E_0 \cos(kx - \omega t)$ से तुलना करने पर हम देख सकते हैं कि निर्वात में तरंग की

   आवृत्ति $\nu = 10^7\,\text{Hz}$ और

   तरंगदैर्घ्य $\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{(2\pi)}{(2\pi/3)}\text{m} = 3\text{m}$

   विद्युत्-क्षेत्र के व्यंजक की समीकरण (17.1ग) से तुलना करने पर, हम देख सकते हैं कि तरंग संचरण की दिशा धनात्मक x-दिशा में है। चूंकि $\vec{\mathbf{E}}$ धनात्मक y-दिशा में है और $\hat{\mathbf{k}}$ धनात्मक x-दिशा में, अतः, समीकरण (17.9ख) से, संबद्ध चुंबकीय क्षेत्र z-दिशा में होगा।

3. हम बोध प्रश्न 4 के चरणों का अनुसरण करेंगे। दिए गए विद्युत्-क्षेत्र

   $$\vec{\mathbf{E}} = (1000\,\text{Vm}^{-1})\hat{\mathbf{x}} \cos(50y - \omega t) \qquad \text{(i)}$$

   से व्यंजक $\vec{\mathbf{E}} = \hat{\mathbf{x}} E_0 \cos(ky - \omega t)$ की तुलना करने पर, हम देख सकते हैं कि

   $$k = 50\,\text{m}^{-1} \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{(2\pi)}{50}\text{m} = \frac{\pi}{25}\text{m} \text{ और}$$

   निर्वात में $f = \frac{c}{\lambda} \Rightarrow f = \frac{3\times 10^8 \times 25\,\text{ms}^{-1}}{\pi\text{m}} = 2.4\times 10^9\,\text{Hz}$

   समीकरण (i) की समीकरण (17.1ग) से तुलना करने पर, हम देख सकते हैं कि तरंग संचरण की दिशा धनात्मक y-दिशा में है। संबद्ध चुंबकीय क्षेत्र का व्यंजक ज्ञात करने के लिए, हमें उसके आयाम और दिशा, और ω ज्ञात करने होंगे।

   $$\omega = 2\pi f = 1.5\times 10^{10}\,\text{rads}^{-1}$$

   समीकरण (17.10) से, संबद्ध चुंबकीय क्षेत्र का आयाम है :

   $$B_0 = \frac{E_0}{c} = \frac{1000\,\text{Vm}^{-1}}{3\times 10^8\,\text{ms}^{-1}} = 3\times 10^{-6}\,\text{T}$$

   चूंकि तरंग संचरण की दिशा, धनात्मक y-दिशा में है, और विद्युत्-क्षेत्र धनात्मक x-दिशा में है, अतः, समीकरण (17.9ख) से चुंबकीय क्षेत्र ऋणात्मक z-दिशा में होगा। इसका मान है :

   $$\vec{\mathbf{B}} = -\hat{\mathbf{z}}(3\times 10^{-6}\,\text{T}) \cos(50y - 1.5\times 10^{10} t)$$

4. जब एक विद्युत्-चुंबकीय तरंग निर्वात से डाइइलेक्ट्रिक माध्यम में गमन करती है तो उसकी चाल और तरंगदैर्घ्य बदल जाते हैं।

5. समीकरण (17.36) से अपवर्तनांक का मान है : $n = \dfrac{c}{v} = \dfrac{c}{(2/3)c} = 1.5$

समीकरण (17.37ख) से माध्यम का डाइइलेक्ट्रिक स्थिरांक है : $\kappa = n^2 = 2.25$

6. माध्यम में तरंग की चाल है :

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{1}{\sqrt{36\mu_0\varepsilon_0}} = \frac{1}{6\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} = \frac{c}{6} = \frac{3\times10^8\,\mathrm{ms}^{-1}}{6} = 0.5\times10^8\,\mathrm{ms}^{-1}$$

दिए हुए विद्युत्-क्षेत्र की, व्यंजक $\vec{\mathbf{E}} = \hat{\mathbf{z}}E_0\cos(kx - \omega t)$ से तुलना करने पर हम देख सकते हैं कि तरंग की तरंग संख्या है : $k = 6\pi\,\mathrm{m}^{-1} \Rightarrow \lambda = \dfrac{2\pi}{6\pi} = \dfrac{1}{3}\mathrm{m}$

और आवृत्ति है :

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{0.5\times10^8\,\mathrm{ms}^{-1}}{(1/3)\mathrm{m}} = 1.5\times10^8\,\mathrm{Hz}$$

माध्यम का अपवर्तनांक है : $n = \dfrac{c}{v} = \dfrac{c}{c/6} = 6$

समीकरण (17.37ख) से माध्यम का डाइइलेक्ट्रिक स्थिरांक है :

$$\kappa = n^2 = 36$$

चूंकि $\hat{\mathbf{k}}$ धनात्मक x-दिशा में है और विद्युत्-क्षेत्र $\vec{\mathbf{E}}$ धनात्मक z-दिशा में है, अतः, समीकरण (17.9ख) से चुंबकीय क्षेत्र $\vec{\mathbf{B}}$ ऋणात्मक y-दिशा में होगा। अतः, डाइलेक्ट्रिक माध्यम में तरंग से संबद्ध चुंबकीय क्षेत्र का मान है :

$$\vec{\mathbf{B}} = -\hat{\mathbf{y}}\left(\frac{100\,\mathrm{Vm}^{-1}}{v}\right)\cos\left(6\pi x - 3\pi\times10^8 t\right)$$

या
$$\vec{\mathbf{B}} = -\hat{\mathbf{y}}\left(\frac{100}{0.5\times10^8}\mathrm{T}\right)\cos\left(6\pi x - 3\pi\times10^8 t\right)$$

$$= -\hat{\mathbf{y}}\left(2\times10^{-6}\,\mathrm{T}\right)\cos\left(6\pi x - 3\pi\times10^8 t\right)$$

7. समीकरण (17.53क) से $\vec{\mathbf{S}} = \dfrac{1}{\mu_0}(\vec{\mathbf{E}}\times\vec{\mathbf{B}})$। चूंकि किसी क्षण पर विद्युत्-चुंबकीय तरंग का विद्युत्-क्षेत्र धनात्मक x-अक्ष की दिशा में है और उसका चुंबकीय क्षेत्र धनात्मक y-अक्ष की दिशा में है, अतः, समीकरण (17.53क) से प्वाइन्टिंग सदिश की दिशा उस क्षण पर धनात्मक z-अक्ष की दिशा में होगी। उस क्षण पर तरंग धनात्मक z-अक्ष के अनुदिश ऊर्जा वाहित करती है।

8. हम पुनः समीकरण (17.53क) का उपयोग करते हैं। दिया है कि विद्युत्-चुंबकीय तरंग का विद्युत्-क्षेत्र किसी क्षण पर धनात्मक x-अक्ष की दिशा में है। तरंग ऋणात्मक y-दिशा में ऊर्जा वाहित करती है। अतः, उस क्षण पर प्वाइन्टिंग सदिश की दिशा ऋणात्मक y-अक्ष की दिशा में है। अतः, समीकरण (17.53क) से उस क्षण पर चुंबकीय क्षेत्र की दिशा धनात्मक z-अक्ष की दिशा में होगी।

9. समीकरण (17.53क) से $\vec{\mathbf{S}} = \dfrac{1}{\mu_0}(\vec{\mathbf{E}}\times\vec{\mathbf{B}}) = \dfrac{1}{\mu_0}E_0 B_0\cos^2(kx - \omega t)(\hat{\mathbf{z}}\times\hat{\mathbf{y}})$

$$= -\,\hat{\mathbf{x}}\,\frac{E_0 B_0}{\mu_0}\cos^2(kx - \omega t)$$

दिए गए क्षण पर इस समतल विद्युत्-चुंबकीय तरंग के लिए प्वाइन्टिंग सदिश का परिमाण है :

$$\frac{E_0 B_0}{\mu_0}\cos^2(kx - \omega t)$$

उस क्षण पर प्वाइन्टिंग सदिश की दिशा ऋणात्मक x-अक्ष की दिशा में है।

10. समीकरण (17.56) से अंत के प्रश्न 9 के विद्युत्-चुंबकीय क्षेत्र का ऊर्जा घनत्व है :

$$U_{EB} = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0}B^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\cos^2(kx - \omega t)\left(\varepsilon_0 E_0^2 + \frac{1}{\mu_0}B_0^2\right)$$

भौतिक नियतांकों की तालिका

प्रतीक	राशि	मान
c	निर्वात में प्रकाश की चाल	3.00×10^{8} ms^{-1}
μ_0	मुक्त आकाश की चुंबकशीलता	1.26×10^{-6} NA^{-2}
ε_0	मुक्त आकाश की विद्युत्शीलता	8.85×10^{-12} $C^{2} N^{-1} m^{-2}$
$1/4\pi\varepsilon_0$		8.99×10^{9} $Nm^{2} C^{-2}$
e	प्रोटॉन का आवेश	1.60×10^{-19} C
$-e$	इलेक्ट्रॉन का आवेश	-1.60×10^{-19} C
h	प्लांक नियतांक	6.63×10^{-34} Js
$\hbar$	$h / 2\pi$	1.05×10^{-34} Js
m_e	इलेक्ट्रॉन का विराम द्रव्यमान	9.11×10^{-31} kg
$-e/m_e$	इलेक्ट्रॉन के आवेश और द्रव्यमान का अनुपात	-1.76×10^{11} Ckg^{-1}
m_p	प्रोटॉन का विराम द्रव्यमान	1.67×10^{-27} kg (1 amu)
m_n	न्यूट्रॉन का विराम द्रव्यमान	1.68×10^{-27} kg
a_0	बोर त्रिज्या	5.29×10^{-11} m
N_A	आवोगाद्रो नियतांक	6.02×10^{23} mol^{-1}
R	सार्वत्रिक गैस नियतांक	$8.31\, Jmol^{-1} K^{-1}$
k_B	बोल्ट्समान नियतांक	1.38×10^{-23} $J\,K^{-1}$
G	सार्वत्रिक गुरुत्वाकर्षण नियतांक	6.67×10^{-11} $Nm^{2} kg^{-2}$

खगोल भौतिकीय आंकड़े

खगोलीय पिंड	द्रव्यमान (kg)	माध्य त्रिज्या (m)	पृथ्वी के केंद्र से माध्य दूरी (m)
सूर्य	1.99×10^{30}	6.96×10^{8}	1.50×10^{11}
चंद्रमा	7.36×10^{22}	1.74×10^{6}	3.82×10^{8}
पृथ्वी	5.98×10^{24}	6.37×10^{6}	0