हमारे जीवन में विद्युत्-चुंबकत्व की महत्वपूर्ण भूमिका है। मोबाइल फ़ोन, माइक्रोवेव ओवन, कंप्यूटरों से लेकर बुलेट ट्रेन, MRI मशीनों तक, हमारे चारों ओर ऐसे तमाम यंत्र हैं जो विद्युत्-चुंबकत्व के सिद्धांतों पर आधारित हैं। ये सिद्धांत मैक्सवेल समीकरणों में सूत्रबद्ध हैं। चित्रों का स्रोतः Wikipedia/commons

इकाई 16

मैक्सवेल समीकरण

इकाई की रूपरेखा

अध्ययन निर्देशिका

हमें आशा है कि आपने इस पाठ्यक्रम के खंड 2, खंड 3 और इकाई 15 में समझाए गए विद्युत् और चुंबकीय क्षेत्रों के लिए गाउस नियम, ऐम्पियर नियम और फ़ैराडे नियम पढ़ लिए हैं। इस इकाई को पढ़ने से पहले आप इन नियमों को दोहरा लें और यह सुनिश्चित कर लें कि आप इन्हें लागू करना जानते हैं। इस इकाई में आप मैक्सवेल समीकरणों के बारे में पढ़ेंगे जो इन्हीं नियमों से निगमित की गई हैं। इस इकाई की अवधारणाओं को अच्छी तरह समझने के लिए आपको खंड 2, खंड 3 और इकाई 15 को दोहरा लेना चाहिए। आपको संदर्भ के लिए इस पाठ्यक्रम का खंड 1 भी अपने साथ रखना चाहिए क्योंकि आप सदिश अवकलन, सदिश समाकलन और सदिश सर्वसमिकाओं का इस इकाई में भरपूर उपयोग करेंगे। तरंग समीकरण से संबंधित अवधारणाओं को दोहराने के लिए आपको स्कूल की भौतिकी में पढ़ी हुई तरंग समीकरण को और यांत्रिकी नामक पाठ्यक्रम BPHCT-131 के खंड 4 की इकाई 19 को पढ़ लेना चाहिए। इस इकाई में गणित का बहुत उपयोग किया गया है। अतः, इस इकाई को पढ़ते हुए सदैव अपने साथ कागज़ और पेन/पेन्सिल रखें और सभी चरणों को स्वयं हल करें। आपको हमारी सलाह है कि आप इस इकाई में दिए गए सभी उदाहरणों, बोध प्रश्नों और इकाई के अंत में दिए हुए प्रश्नों को स्वयं हल करें। इससे आपको मैक्सवेल समीकरणों को बेहतर समझने में मदद मिलेगी।

"विज्ञान में प्रत्येक वास्तविक खोज या प्रगति, पूर्णतः सबोध अज्ञानता से प्रारंभ होती है।"	**जेम्स सी. मैक्सवेल**

16.1 परिचय

स्कॉटलैंड के भौतिकीविद् जेम्स क्लर्क मैक्सवेल (1831 – 1879), अपने विद्युत्-चुंबकत्व के सिद्धांत के लिए सर्वप्रसिद्ध हैं। यह सिद्धांत विद्युत्-चुंबकीय विकिरण का क्लासिकी सिद्धांत है जो मैक्सवेल समीकरणों में समाहित है। मैक्सवेल के योगदान के कारण तीन भिन्न दिखने वाले क्षेत्रों – विद्युत्, चुंबकत्व और प्रकाश का एकीकरण हुआ। उन्होंने सिद्ध किया कि ये तीनों एक ही परिघटना, विद्युत्-चुंबकत्व, के विभिन्न स्वरूप थे।

इस पाठ्यक्रम में अभी तक आप चुंबकीय और वैद्युत परिघटनाओं को नियंत्रित करने वाले चार मूल नियमों – विद्युत्-क्षेत्र से संबंधित गाउस नियम, चुंबकीय क्षेत्र से संबंधित गाउस नियम, ऐम्पियर नियम और फ़ैराडे नियम से परिचित हो चुके हैं। सम्मिलित रूप से इन सभी नियमों द्वारा उन तमाम वैद्युत और चुंबकीय अन्योन्य क्रियाओं की व्याख्या की जा सकती है जो द्रव्य के गुणधर्मों के लिए उत्तरदायी हैं। इस इकाई में हम समझाएंगे कि किस तरह मैक्सवेल ने इन नियमों को एक समीकरण-समुच्चय, जिन्हें **मैक्सवेल समीकरण** कहा जाता है, के रूप में प्रस्तुत किया।

मैक्सवेल समीकरण संपूर्ण समष्टि में विद्युत् और चुंबकीय क्षेत्रों के व्यवहार को निदर्शित करते हैं और सभी विद्युत्-चुंबकीय परिघटनाओं का वर्णन करते हैं। उदाहरण के लिए, मैक्सवेल समीकरणों की मदद से हम अनेक प्राकृतिक परिघटनाओं को समझ सकते हैं जैसेकि कम्पास की सुई की दिशा सदैव उत्तर की ओर क्यों होती है, पानी में प्रवेश करते हुए प्रकाश की किरणें क्यों मुड़ जाती हैं, बिजली क्यों कड़कती है, ध्रुवी प्रदेशों में हमें ध्रुवीय ज्योति (aurora) क्यों दिखाई पड़ती है, आदि। आधुनिक जीवन में प्रयुक्त अनेक मशीनों जैसेकि बिजली के मोटर, टेलिविज़न, टेलिविज़न ट्रान्समीटर और रिसीवर, मोबाइल फ़ोन, माइक्रोवेव ओवन, कम्प्यूटर, रडार, साइक्लोट्रॉन, MRI मशीन आदि का प्रचालन भी इन्हीं समीकरणों पर आधारित है। मैक्सवेल समीकरणों को समझना अपने-आप में एक अत्यंत आनंददायी अनुभव है।

इकाई के भाग 16.2 में हम विद्युत् और चुंबकत्व के चारों मूलभूत नियमों को एक-साथ रखेंगे और समझाएंगे कि किस तरह इन नियमों में असममिति के कारण मैक्सवेल समीकरण प्रस्तुत किए गए। भाग 16.3 में आप जानेंगे कि किस तरह मैक्सवेल ने विस्थापन धारा की अवधारणा देकर इस असममिति को दूर किया। भाग 16.4 में हम मैक्सवेल समीकरणों को एक-साथ रखकर उनका महत्व समझाएंगे। अंत में भाग 16.5 में आप जानेंगे कि मैक्सवेल समीकरणों से किस प्रकार विद्युत्-चुंबकीय तरंगों की प्रागुक्ति की गई और स्थापित किया गया कि प्रकाश विद्युत्-चुंबकीय तरंग है। हम मैक्सवेल समीकरणों से विद्युत्-चुंबकीय तरंग समीकरण व्युत्पन्न करेंगे और विद्युत्-चुंबकीय तरंगों की अनुप्रस्थ प्रकृति समझाएंगे। मैक्सवेल के योगदान को उन्नीसवीं सदी का भौतिकी का महानतम योगदान माना जा सकता है। मैक्सवेल समीकरण हमें प्रकाश और अन्य विद्युत्-चुंबकीय विकिरणों की प्रकृति की मूलभूत जानकारी भी देते हैं। इसके बारे में आप अगली इकाई में पढ़ेंगे, जो इस पाठ्यक्रम की आखिरी इकाई है।

उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप :

- ❖ उन सममिति प्रतिबंधों की व्याख्या कर सकेंगे, जिनके कारण मैक्सवेल समीकरण प्राप्त हुए;
- ❖ विस्थापन धारा की अवधारणा समझा सकेंगे और समझा सकेंगे कि मैक्सवेल ने ऐम्पियर नियम का किस प्रकार व्यापकीकरण किया;
- ❖ आवेश-मुक्त और धारा-मुक्त प्रदेशों के लिए, और आवेश-युक्त और धारा-युक्त प्रदेशों के लिए मैक्सवेल समीकरण लिख सकेंगे; और

- ❖ मैक्सवेल समीकरणों से विद्युत्-चुंबकीय क्षेत्रों के लिए तरंग समीकरण व्युत्पन्न कर सकेंगे, और विद्युत्-चुंबकीय तरंगों की प्रकृति समझा सकेंगे।

16.2 विद्युत् और चुंबकत्व के मूलभूत नियम

वैद्युत और चुंबकीय परिघटनाओं को नियंत्रित करने वाले उन सभी नियमों को याद करें जिन्हें आपने इस पाठ्यक्रम में पढ़ा है। इन नियमों को इस पृष्ठ के हाशिए पर लिखें।

अब विचार करें : **इन नियमों में से किन को मूलभूत नियम माना जा सकता है?**

क्या आपको विद्युत्-क्षेत्रों के लिए गाउस नियम याद है जो आपने इकाई 6 के भाग 6.3 में पढ़ा है? यह समीकरण (6.16) द्वारा दिया जाता है :

$$\oint\!\!\oint_S \vec{\mathbf{E}}.d\vec{\mathbf{S}} = \frac{q}{\varepsilon_0} \qquad (16.1\text{क})$$

जहां q बंद पृष्ठ S द्वारा परिबद्ध आवेश है। भाग 6.3 को फिर से पढ़ लें। अपने अवकल रूप में यह समीकरण (6.18) द्वारा दिया जाता है :

$$\vec{\nabla}.\vec{\mathbf{E}} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad (16.1\text{ख})$$

याद करें कि गाउस नियम में वह तमाम सूचना निहित है जो आपको कूलॉम नियम से मिलती है और गाउस नियम को ज़्यादा स्थितियों पर लागू किया जा सकता है। अतः, इसे हम विद्युत् का पहला मूलभूत नियम मानेंगे।

अब इकाई 13 से चुंबकीय क्षेत्रों के लिए गाउस नियम याद करें। इसके अनुसार चुंबकीय क्षेत्र रेखाएं न तो किसी बिंदु से प्रारंभ होती और न किसी बिंदु पर उनका अंत होता है। चुंबकीय क्षेत्र रेखाएं स्वयं पर बंद हो जाती हैं यानी संवृत वक्र बनाती हैं। चुंबकीय क्षेत्र के लिए गाउस नियम के समाकल और अवकल रूप निम्नलिखित हैं :

$$\oint\!\!\oint_S \vec{\mathbf{B}}.d\vec{\mathbf{S}} = 0 \qquad (16.2\text{क})$$

और $$\vec{\nabla}.\vec{\mathbf{B}} = 0 \qquad (16.2\text{ख})$$

विद्युत्-चुंबकीय प्रेरण का फ़ैराडे नियम परिवर्ती चुंबकीय क्षेत्रों को प्रेरित विद्युत्-क्षेत्रों से संबद्ध करता है। इस नियम के अनुसार जब किसी परिपथ/लूप/कुंडली से संबद्ध चुंबकीय क्षेत्र परिवर्तित होता है तो उस परिपथ/लूप/कुंडली में विद्युत्-क्षेत्र प्रेरित होता है। समाकल और अवकल रूप में इस नियम के कथन निम्नलिखित हैं :

$$\oint_C \vec{\mathbf{E}}\,.\,d\vec{\mathbf{l}} = -\frac{d}{dt}\oint\!\!\oint_S \vec{\mathbf{B}}.d\vec{\mathbf{S}} \qquad (16.3\text{क})$$

और $$\vec{\nabla}\times\vec{\mathbf{E}} = -\frac{\partial\vec{\mathbf{B}}}{\partial t} \qquad (16.3\text{ख})$$

अंत में हम अपरिवर्ती धाराओं के लिए समाकल और अवकल रूप में ऐम्पियर नियम लिखते हैं।

इस नियम के अनुसार अपरिवर्ती विद्युत् धाराओं के कारण चुंबकीय क्षेत्र उत्पन्न होते हैं (इकाई 13 याद करें) :

$$\oint_C \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{l}} = \mu_0 i \qquad (16.4\text{क})$$

और

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{B}} = \mu_0 \vec{\mathbf{J}} \qquad (16.4\text{ख})$$

शायद आप सोच रहे हों : **हमने बायो-सावर्ट नियम को मूलभूत नियम क्यों नहीं माना**? ऐसा इसलिए है कि बायो-सावर्ट नियम चुंबकीय क्षेत्र से संबंधित गाउस नियम और ऐम्पियर नियम से प्राप्त किया जा सकता है। इस तरह, हम यह देखते हैं कि कूलॉम नियम और बायो-सवार्ट नियम दोनों को ही ऊपर बताए गए चार नियमों में से दो नियमों का संयोजन करके प्राप्त किया जा सकता है। इस पाठ्यक्रम में प्रस्तुत अन्य सभी समीकरण विशिष्ट स्थितियों पर लागू होते हैं और वे सभी ऊपर बताए गए चार नियमों में सम्मिलित हैं। इस अर्थ में हम मान सकते हैं कि ये चार नियम विद्युत् और चुंबकत्व के मूलभूत नियम हैं। आइए, अब हम इन नियमों को एक-साथ तालिका 16.1 में रखें।

तालिका 16.1 : वैद्युत और चुंबकीय परिघटनाओं को नियंत्रित करने वाले मूलभूत नियम।

क्र.सं.	**नियम**	**नियम क्या बताता है**	**गणितीय कथन**
1.	विद्युत्-क्षेत्र के लिए गाउस नियम	बंद पृष्ठ से हो कर जाने वाला वैद्युत अभिवाह उस पृष्ठ द्वारा परिबद्ध आवेश के समानुपाती होता है। यानी आवेशों से विद्युत्-क्षेत्र उत्पन्न होता है।	$\oiint_S \vec{\mathbf{E}}.d\vec{\mathbf{S}} = \frac{q}{\varepsilon_0}$ (16.1क) या $\vec{\nabla}.\vec{\mathbf{E}} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ (16.1ख)
2.	चुंबकीय क्षेत्र के लिए गाउस नियम	बंद पृष्ठ से हो कर जाने वाला कुल चुंबकीय अभिवाह शून्य होता है। इसका अर्थ यह है कि चुंबकीय क्षेत्र रेखाएं स्वयं पर बंद हो जाती हैं। वियुक्त चुंबकीय आवेश का अस्तित्व नहीं होता।	$\oiint_S \vec{\mathbf{B}}.d\vec{\mathbf{S}} = 0$ (16.2क) या $\vec{\nabla}.\vec{\mathbf{B}} = 0$ (16.2ख)
3.	फ़ैराडे का विद्युत्-चुंबकीय प्रेरण नियम	परिवर्ती चुंबकीय क्षेत्र से विद्युत्-क्षेत्र उत्पन्न होता है।	$\oint_C \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{l}} = -\frac{d}{dt}\oiint_S \vec{\mathbf{B}}.d\vec{\mathbf{S}}$ (16.3क) या $\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t}$ (16.3ख)
4.	ऐम्पियर नियम (केवल अपरिवर्ती धाराओं के लिए)	अपरिवर्ती विद्युत् धारा से चुंबकीय क्षेत्र उत्पन्न होता है।	$\oint_C \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{l}} = \mu_0 i$ (16.4क) या $\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{B}} = \mu_0 \vec{\mathbf{J}}$ (16.4ख)

आइए, अब हम तालिका 16.1 में एक-साथ रखे गए इन नियमों पर विचार करें। क्या आपको इनमें कुछ समानताएं दिखाई देती हैं?

ध्यान दें कि समीकरण युग्मों (16.1क, ख और 16.2क, ख) और (16.3क, ख और 16.4क, ख) के वाम पक्ष एक-जैसे हैं सिवाय इसके कि इनमें $\vec{E}$ और $\vec{B}$ की अदला-बदली हुई है। समीकरणों (16.1क और 16.2क) के वाम पक्ष में बंद पृष्ठों पर पृष्ठ समाकल हैं। समीकरणों (16.3क और 16.4क) के वाम पक्ष में बंद पथों पर रेखा समाकल हैं। इन सभी समीकरण युग्मों के वाम पक्ष में अंतर यह है कि इनमें $\vec{E}$ और $\vec{B}$ की अदला-बदली हुई है। इसका अर्थ यह है कि इन समीकरण युग्मों के वाम पक्ष में हम $\vec{E}$ की जगह $\vec{B}$ और $\vec{B}$ की जगह $\vec{E}$ रख दें तो इनके वाम पक्ष पहले जैसे ही दिखेंगे।

अतः, हम कह सकते हैं **तालिका 16.1 के समीकरण युग्मों (16.1क, ख और 16.2क, ख) और (16.3क, ख और 16.4क, ख) के वाम पक्ष $\vec{E}$ और $\vec{B}$ की अदला-बदली के अधीन सममित हैं**। इन नियमों के दक्षिण पक्ष के बारे में हम क्या कह सकते हैं? क्या इनमें भी ऐसी ही सममिति है? इनमें $\vec{E}$ और $\vec{B}$ की अदला-बदली के अधीन सममिति नहीं दिखती। आप जानना चाहेंगे : **इन नियमों में क्या असममिति है**? आइए, अब हम इस पर चर्चा करें।

16.2.1 विद्युत् और चुंबकत्व के मूलभूत नियमों में असममिति

इन नियमों के दक्षिण-पक्ष में हमें दो प्रकार की असममिति देखने को मिलती है।

1. पहले प्रकार की असममिति समीकरणों (16.1क, ख और 16.2 क, ख) के दायें पक्ष में दिखती है।

   ध्यान दें कि विद्युत्-क्षेत्रों से संबंधित गाउस नियम [समीकरण (16.1क, ख)] के दक्षिण पक्ष में पृष्ठ से घिरा आवेश q है। लेकिन चुंबकत्व से संबद्ध गाउस नियम [समीकरण (16.2क, ख)] के दक्षिण पक्ष में शून्य है। इसमें कोई तुल्य चुंबकीय आवेश नहीं है। **इस असममिति का कारण निम्नवत् है और इसे आपको हमेशा याद रखना चाहिए।**

प्रकृति में वियुक्त विद्युत् आवेश उपस्थित होते हैं, पर अभी तक इस बात का कोई प्रमाण नहीं मिला है कि प्रकृति में वियुक्त चुंबकीय आवेश भी उपस्थित होते हैं।

इसीलिए दूसरे नियम के दक्षिण पक्ष में परिबद्ध चुंबकीय आवेश शून्य होता है। भविष्य में जब भी कभी चुंबकीय एकध्रुवों का पता चलेगा तब इस नियम का दक्षिण पक्ष किसी नेट चुंबकीय आवेश को परिबद्ध करने वाले पृष्ठ के लिए शून्येतर हो जाएगा।

इसी प्रकार, समीकरणों (16.4क, ख) के दक्षिण पक्ष में विद्युत् आवेशों के प्रवाह को निरूपित करने वाले पद $\mu_0 i$ $(=\mu_0\, dq/dt), \mu_0\vec{J}$ उपस्थित हैं। लेकिन (चुंबकीय एकध्रुवों की धारा को निरूपित करने वाले) इस प्रकार के कोई पद समीकरणों (16. 3क, ख) के दक्षिण पक्ष में मौजूद नहीं है।

यह एक प्रकार की असममिति है जो इन नियमों में उपस्थित है। यह असममिति उस स्थिति में दूर हो जाएगी जब हमें चुंबकीय एकध्रुवों के अस्तित्व की निश्चित जानकारी हो जाएगी। वर्तमान प्रारंभिक कण सिद्धांतों के कारण, जिनके अनुसार एकध्रुवों का अस्तित्व होता है, इनकी खोज ज़ोर-शोर से की जा रही है।

2. इन नियमों में एक अन्य प्रकार की असममिति है। फ़ैराडे नियम [समीकरण (16.3ख)] के दक्षिण पक्ष में पद $-\partial\vec{\mathbf{B}}/dt$ है। याद करें कि इस नियम के अनुसार **परिवर्ती चुंबकीय क्षेत्रों के कारण विद्युत्-क्षेत्र उत्पन्न होता है।** अब इस प्रकार का कोई पद (जो परिवर्ती विद्युत्-क्षेत्रों को निरूपित करता हो) हमें ऐम्पियर नियम [समीकरण (16. 4ख)] में देखने को नहीं मिलता। तो क्या कोई ऐसी बात है जो हमसे छूट रही है? सममिति को ध्यान में रखकर क्या हम निम्नलिखित सुझाव दे सकते हैं?

परिवर्ती विद्युत्-क्षेत्र के कारण चुंबकीय क्षेत्र उत्पन्न होता है।

मैक्सवेल ने यही तर्क दिया था। वैद्युत और चुंबकीय परिघटनाओं की सममिति के संबंध में एक पैनी समझ प्रदर्शित करते हुए उन्होंने **परिवर्ती विद्युत्-क्षेत्रों के कारण प्रेरित चुंबकीय क्षेत्रों और विस्थापन धारा** की अवधारणाएं प्रस्तुत की। इस तरह, उन्होंने विद्युत् और चुंबकत्व के मूलभूत नियमों में मौजूद असममिति को दूर किया। इसके लिए उन्होंने ऐम्पियर नियम का व्यापकीकरण किया और फ़ैराडे नियम से मिलता जुलता सममिति युक्त नियम प्राप्त किया।

अगले भाग में आप जानेंगे कि उन्होंने यह कैसे किया। लेकिन उससे पहले आप एक बोध प्रश्न करें।

बोध प्रश्न 1 – विद्युत् और चुंबकत्व के मूलभूत नियम

क) विद्युत् और चुंबकत्व के चार मूलभूत नियम लिखें। इन नियमों को मूलभूत नियम क्यों कहा जाता है और अन्य समीकरणों को, जिन्हें आपने इस पाठ्यक्रम में पढ़ा है, क्यों नहीं?

ख) बताएं कि इन चार नियमों में क्या सममिति है।

ग) विद्युत् और चुंबकत्व के मूलभूत नियमों में क्या असममितियां हैं?

16.3 मैक्सवेल द्वारा ऐम्पियर नियम का व्यापकीकरण

आइए, हम अपरिवर्ती धाराओं से संबद्ध ऐम्पियर नियम पर फिर से विचार करें। गणितीय सुविधा के लिए यहां हम इसके निम्नलिखित अवकली रूप का उपयोग करेंगे :

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{B}} = \mu_0 \vec{\mathbf{J}} \qquad (16.5)$$

जहां $\vec{\mathbf{J}}$ विद्युत् धारा i से संबद्ध **धारा घनत्व** (curret density) है।

धारा और धारा घनत्व में निम्नलिखित संबंध होता है :

$$i = \iint_S \vec{\mathbf{J}}.d\vec{\mathbf{S}} \qquad (16.6)$$

आइए, देखें कि हम समय के साथ बदल रहे क्षेत्रों के लिए समीकरण (16.5) का प्रयोग कर सकते हैं या नहीं। यदि हम समीकरण (16.5) के दोनों पक्षों का डाइवर्जेन्स लें तो हमें मिलता है :

$$\vec{\nabla}.(\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{B}}) = \mu_0\, (\vec{\nabla}.\vec{\mathbf{J}}) \qquad (16.7)$$

समीकरण (16.7) का वाम पक्ष शून्य है क्योंकि किसी भी सदिश क्षेत्र के कर्ल का डाइवर्जेन्स शून्य होता है [इस पाठ्यक्रम के खंड 1 की इकाई 2 का समीकरण (2.10छ) याद करें]। तब समीकरण (16.7) हो जाता है :

$$\vec{\nabla}\, .\, \vec{\mathbf{J}} = 0 \qquad (16.8)$$

ध्यान दें कि समीकरण (16.8) केवल अपरिवर्ती धाराओं के लिए ही सत्य है। इसमें समय के साथ बदलने वाले क्षेत्रों से संबद्ध कोई पद नहीं है। इस बात को समझने के लिए आपको किसी क्षेत्र में आवेश प्रवाह के सांतत्य समीकरण की जानकारी होनी चाहिए। आप इस समीकरण को इकाई 12 के भाग 12.2 में सीख चुके हैं [समीकरण (12.5) याद करें]। आइए, सांतत्य समीकरण को इसके समाकल और अवकल रूपों में फिर से लिखें :

$$\oiint_S \vec{\mathbf{J}}.d\vec{\mathbf{S}} = -\frac{d}{dt}\iiint_V \rho\, dV \qquad (16.9\text{क})$$

$$\vec{\nabla}.\vec{\mathbf{J}} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \qquad (16.9\text{ख})$$

समीकरण (16.9क या ख) हमें बताते हैं कि **किसी प्रदेश से धारा घनत्व $\vec{\mathbf{J}}$ का नेट बहिर्वाह इस प्रदेश में स्थित आवेश की ह्रास-दर के बराबर होता है।**

अपरिवर्ती धाराओं के लिए, $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ और हमें मिलता है : $\vec{\nabla}.\vec{\mathbf{J}} = 0$

यह इकाई 12 का समीकरण (12.16) ही है। अतः, ध्यान दें कि समीकरण (16.5) अपरिवर्ती धाराओं के लिए ही सत्य है। इस तरह सांतत्य समीकरण के कारण हम यह समझ पाते हैं कि समीकरण (16.5) में समय के साथ बदल रहे क्षेत्रों से संबद्ध कोई पद नहीं है। मैक्सवेल ने ऐम्पियर के नियम में छुटे हुए पद की इस समस्या को कैसे दूर किया? उन्होंने इस नियम का व्यापकीकरण कैसे किया? उन्होंने इसके लिए सममिति पर विचार किया। आइए, समझें कि मैक्सवेल का तर्क क्या था।

16.3.1 ऐम्पियर नियम का व्यापकीकरण

भौतिकी में **सममिति** का विचार बहुत शक्तिशाली है। अभी तक की चर्चा से आपने इतना तो समझ लिया होगा कि सममिति के विचार से यह नतीजा निकलता है कि समीकरण (16.5) में समय के साथ परिवर्तित होने वाला पद भी होना चाहिए। प्रश्न यह है : **इस प्रकार के पद का स्वरूप क्या होना चाहिए**? हम कह सकते हैं कि यह पद किसी सदिश क्षेत्र का **समय-अवकलज** होना चाहिए जिससे कि व्यापकीकृत समीकरण, स्थैतिक क्षेत्रों के लिए समीकरण (16.5) के रूप का हो जाए।

संभवतः मैक्सवेल का सबसे महत्वपूर्ण योगदान इस छुटे हुए पद को मालूम करना ही था। उन्होंने सवाल किया :

क्या एक परिवर्ती विद्युत्-क्षेत्र/वैद्युत अभिवाह, एक चुंबकीय क्षेत्र को प्रेरित कर सकता है?

मैक्सवेल ने ऐम्पियर नियम [समीकरण (16.5)] में एक पद $\mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t}$ को जोड़कर उसमें परिवर्तन किया। इसे अवकल रूप में इस प्रकार लिखा गया :

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{B}} = \mu_0 \vec{\mathbf{J}} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t} \qquad (16.10)$$

किसी खुले पृष्ठ S पर समीकरण (16.10) के दोनों पक्षों का समाकलन करके तथा स्टोक्स प्रमेय लागू करके समीकरण (16.10) का समाकल रूप प्राप्त किया जा सकता है।

आइए, पहले हम इसकी व्युत्पत्ति दें। खुले पृष्ठ S पर समीकरण (16.10) के दोनों पक्षों का समाकलन करने पर हमें मिलता है :

$$\iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{B}}).d\vec{\mathbf{S}} = \mu_0 \iint_S \vec{\mathbf{J}}.d\vec{\mathbf{S}} + \mu_0 \varepsilon_0 \iint_S \frac{\partial}{\partial t} \vec{\mathbf{E}}.d\vec{\mathbf{S}} \qquad (16.11\text{क})$$

समीकरण (16.11क) के वाम पक्ष पर स्टोक्स प्रमेय लागू करने पर हमें मिलता है :

$$\oint_C \vec{\mathbf{B}}.d\vec{\mathbf{l}} = \mu_0 \iint_S \vec{\mathbf{J}}.d\vec{\mathbf{S}} + \mu_0 \varepsilon_0 \iint_S \frac{\partial}{\partial t} \vec{\mathbf{E}}.d\vec{\mathbf{S}} \qquad (16.11\text{ख})$$

अब ध्यान दें कि समीकरण (16.6) से

$$i = \iint_S \vec{\mathbf{J}}.d\vec{\mathbf{S}} \qquad (16.11\text{ग})$$

और इकाई 5 से वैद्युत अभिवाह की परिभाषा याद करें :

$$\Phi_E = \iint_S \vec{\mathbf{E}}.d\vec{\mathbf{S}} \qquad (16.11\text{घ})$$

समीकरणों (16.11ग और घ) से i और Φ_E के इन व्यंजकों को समीकरण (16.11ख) में रख कर, हम उसे इस तरह लिख सकते हैं :

$$\oint_C \vec{\mathbf{B}}.d\vec{\mathbf{l}} = \mu_0 i + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \qquad (16.12)$$

यही **मैक्सवेल द्वारा किया गया ऐम्पियर नियम का व्यापकीकरण** है। ध्यान दें कि समीकरण (16.12) को लिखने में हमने फ़ैराडे नियम के ऋण चिन्ह के स्थान पर धन चिन्ह का प्रयोग किया है। ऐसा प्रायोगिक परिणामों और सममिति के कारण किया गया है। यहां गुणक $\mu_0 \varepsilon_0$ का प्रयोग समीकरण को SI मात्रकों में व्यक्त करने के लिए किया गया है।

समीकरण (16.10/16.12) हमें क्या बताते हैं?

ये समीकरण हमें बताते हैं कि **चुंबकीय क्षेत्र को दो तरीकों से स्थापित किया जा सकता है** :

1) **विद्युत् धारा** से और

2) **समय-परिवर्ती विद्युत्-क्षेत्र** से।

समीकरण (16.10) और (16.12) ऐम्पियर नियम के व्यापकीकृत अवकल और समाकल रूप को अभिव्यक्त करते हैं। इस व्यापकीकृत ऐम्पियर नियम को **ऐम्पियर-मैक्सवेल नियम** भी कहा जाता है।

हमेशा याद रखें कि मैक्सवेल ने इस नियम को किसी आनुभविक विमर्श से व्युत्पन्न नहीं किया था। वे सममिति विमर्श से प्रेरित हुए थे और उन्होंने ऐम्पियर नियम में एक अतिरिक्त पद इसलिए जोड़ा था कि वह विद्युत् आवेश संरक्षण नियम (या सांतत्य समीकरण) के संगत हो जाए। मैक्सवेल के समय से ही अनेक प्रयोगों द्वारा मैक्सवेल की इस महत्वपूर्ण अंतर्दृष्टि की पुष्टि की गई है जिनमें विशाल संधारित्रों से संबंधित चुंबकीय क्षेत्रों के प्रत्यक्ष मापन के प्रयोग भी शामिल हैं।

अगले भाग में हम समीकरणों (16.10 और 16.12) पर विस्तार से चर्चा करेंगे और इनका अर्थ समझने का प्रयास करेंगे। विशेष रूप से हम समीकरणों (16.10 और 16.12) के दायें पक्ष को समझेंगे। लेकिन आगे पढ़ने से पहले आप यह सत्यापित करें कि पद $\varepsilon_0 \, d\Phi_E / dt$ की वही विमा होती है जो धारा की होती है।

बोध प्रश्न 2 – ऐम्पियर नियम का व्यापकीकरण

क) समझाएं कि ऐम्पियर नियम के व्यापकीकरण में सममिति का क्या विचार है।

ख) सिद्ध करें कि पद $\varepsilon_0 \, d\Phi_E / dt$ की विमा वही है जो धारा की है।

तो बोध प्रश्न 2ख को हल करके आपने जाना है कि व्यापकीकृत ऐम्पियर-मैक्सवेल नियम में एक पद ऐसा है जिसकी विमा वही है जो धारा की है। आइए, समझें कि इस पद की प्रकृति क्या है।

16.3.2 विस्थापन धारा

ध्यान दें कि समीकरण (16.12) का परिवर्ती वैद्युत अभिवाह, विद्युत् धारा **नहीं** है क्योंकि यहां आवेश का प्रवाह नहीं हो रहा। लेकिन, चुंबकीय क्षेत्रों को उत्पन्न करने में इसका वही प्रभाव है जो कि विद्युत् धारा का होता है। यही कारण है कि मैक्सवेल ने इस पद को **विस्थापन धारा** का नाम दिया। ऐतिहासिक रूप से इसे काल्पनिक धारा माना गया है और मैक्सवेल द्वारा दिया गया यह नाम अभी भी चला आ रहा है। इसका मान है :

$$i_d = \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \qquad (16.13\text{क})$$

इस पद की प्रकृति को समझने के लिए विद्युत्-क्षेत्र के पृष्ठ समाकल के रूप में वैद्युत अभिवाह का व्यंजक याद करें :

$$\Phi_E = \iint_S \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{S}} \qquad (16.13\text{ख})$$

समीकरण (16.13ख) का उपयोग करके हम समीकरण (16.13क) को इस तरह लिख सकते हैं :

$$i_d = \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} = \varepsilon_0 \frac{d}{dt}\iint_S \vec{\mathbf{E}}.d\vec{\mathbf{S}} = \varepsilon_0 \iint_S \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t}.d\vec{\mathbf{S}} \qquad (16.13ग)$$

ध्यान दें कि समीकरण (16.13ग) में Φ_E के समय के सापेक्ष अवकलज को समाकल के अंदर लिखने में हमने उसे समय के सापेक्ष आंशिक अवकलज के रूप में लिखा है। हमने ऐसा इसलिए किया है क्योंकि वैद्युत अभिवाह/विद्युत्-क्षेत्र, स्थान और समय दोनों ही निर्देशांकों का फलन होता है। परिभाषा से **विस्थापन धारा घनत्व** होता है :

$$\vec{\mathbf{J}}_d = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t} \qquad (16.14)$$

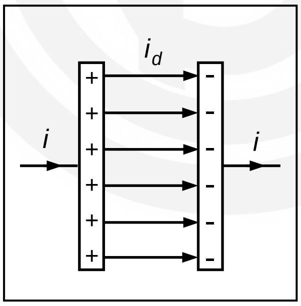
तब, समीकरण (16.14) का उपयोग करके हम समीकरण (16.13ग) को ऐसे लिख सकते हैं :

$$i_d = \iint_S \vec{\mathbf{J}}_d.d\vec{\mathbf{S}} \qquad (16.15)$$

शब्द 'विस्थापन' का कोई भौतिक अर्थ नहीं है। लेकिन शब्द 'धारा' इस अर्थ में प्रासंगिक है कि चुंबकीय क्षेत्रों को उत्पन्न करने में विस्थापन धारा के प्रभाव और वास्तविक धारा के प्रभाव में भेद नहीं किया जा सकता। अतः, हम यह कह सकते हैं कि चालन धारा i द्वारा या विस्थापन धारा i_d द्वारा चुंबकीय क्षेत्र स्थापित किया जा सकता है। इस तरह, हम ऐम्पियर-मैक्सवेल नियम [समीकरण (16.12)] को इस तरह व्यक्त कर सकते हैं :

$$\oint_C \vec{\mathbf{B}}.d\vec{\mathbf{l}} = \mu_0 \iint_S \left(\vec{\mathbf{J}} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t}\right).d\vec{\mathbf{S}} = \mu_0 (i + i_d) \qquad (16.16)$$

विस्थापन धारा की भूमिका को बेहतर समझने के लिए, आइए, हम एक समांतर प्लेट संधारित्र युक्त परिपथ में विस्थापन धारा ज्ञात करें।



चित्र 16.1: अपरिवर्ती धारा i द्वारा आवेशित समांतर प्लेट संधारित्र।

उदाहरण 16.1 : समांतर प्लेट संधारित्र युक्त परिपथ में विस्थापन धारा

मान लें कि एक समांतर प्लेट संधारित्र को अपरिवर्ती धारा i द्वारा आवेशित किया जाता है जैसाकि चित्र 16.1 में दिखाया गया है। वास्तविक धारा i संधारित्र की प्लेटों के बीच के विद्युत्-क्षेत्र $\vec{\mathbf{E}}$ को परिवर्तित कर देती है। काल्पनिक धारा i_d उस परिवर्ती विद्युत्-क्षेत्र $\vec{\mathbf{E}}$ से संबद्ध है। परिपथ में विस्थापन धारा ज्ञात करें।

हल ■ हम मान लेते हैं कि दोनों प्लेटों के बीच की दूरी की तुलना में ये प्लेट काफ़ी बड़े हैं। तब केवल प्लेटों के बीच विद्युत्-क्षेत्र $\vec{\mathbf{E}}$ होगा और एक उत्तम सन्निकटन के तौर पर प्लेटों के अधिकांश क्षेत्रफल पर यह एकसमान होगा। इन प्रतिबंधों के अधीन समांतर प्लेट संधारित्र के लिए i_d ज्ञात करने के लिए हम समीकरण (16.15) का प्रयोग करेंगे। हम किसी क्षण पर प्रत्येक प्लेट पर अतिरिक्त आवेश $|Q|$ को उस क्षण पर प्लेटों के बीच विद्युत्-क्षेत्र के परिमाण $|\vec{\mathbf{E}}|$ से संबंधित कर सकते हैं। इसके लिए हम गाउस नियम [इकाई 6, खंड 2 का समीकरण (6.16)] का उपयोग करते हैं :

$$\oiint_S \vec{\mathbf{E}}.d\vec{\mathbf{S}} = \frac{Q_{encl}}{\varepsilon_0} \qquad (i)$$

आपने इकाई 6 में सीखा है कि सममिति के कारण हम गाउसीय पृष्ठ को ऐसे चुन सकते हैं कि विद्युत्-क्षेत्र का परिमाण $|\vec{\mathbf{E}}|$ एकसमान हो और $\vec{\mathbf{E}}$ और $d\vec{\mathbf{S}}$ समांतर हों।

इस स्थिति में हम गाउसीय पृष्ठ को ऐसे चुनते हैं कि वह धनात्मक प्लेट को परिबद्ध करे (चित्र 16.2 देखें)। तब $\vec{\mathbf{E}}$ और $d\vec{\mathbf{S}}$ समांतर होते हैं और $\vec{\mathbf{E}}.d\vec{\mathbf{S}} = EdS$ । चूंकि E अचर है, अतः, समीकरण (i) से हमें मिलता है :

$$|Q| = \varepsilon_0 \Phi_E = \varepsilon_0 \oiint_S \vec{\mathbf{E}}.d\vec{\mathbf{S}} = \varepsilon_0 \oiint_S E\,dS = \varepsilon_0 E \oiint_S dS = \varepsilon_0 E A \qquad \text{(ii)}$$

जहां A प्लेट का क्षेत्रफल है। हम समीकरण (ii) का अवकलन करके वास्तविक धारा i ज्ञात कर सकते हैं :

$$|i| = \left|\frac{dQ}{dt}\right| = \varepsilon_0 A \left|\frac{dE}{dt}\right| \qquad \text{(iii)}$$

फिर हम विस्थापन धारा ज्ञात करते हैं। इसके लिए हम समीकरण (16.13क) का उपयोग करते हैं। समीकरण (ii) से $\Phi_E = EA$, और हम लिख सकते हैं :

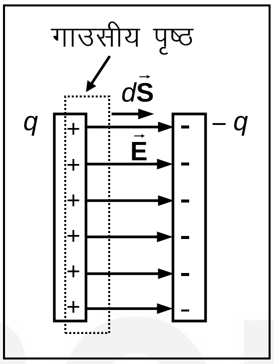
$$|i_d| = \varepsilon_0 \left|\frac{d\Phi_E}{dt}\right| = \varepsilon_0 \left|\frac{dE\,A}{dt}\right| = \varepsilon_0 A \left|\frac{dE}{dt}\right| \qquad \text{(iv)}$$

समीकरणों (iii) और (iv) की तुलना करने पर हम पाते हैं कि संधारित्र को आवेशित करने वाली वास्तविक धारा i और प्लेटों के बीच प्रवाहित काल्पनिक विस्थापन धारा i_d के मान समान हैं :

$$i_d = i \qquad \text{(v)}$$

इस परिणाम का क्या अर्थ है? यह हमें बताता है कि काल्पनिक विस्थापन धारा i_d वास्तविक धारा i का अनुवर्तन (continuation) है।

वास्तविक धारा परिपथ में प्रवाहित होती है जबकि विस्थापन धारा संधारित्र की प्लेटों के बीच, एक प्लेट से, प्लेटों के बीच की दूरी को पार करके, दूसरी प्लेट तक, वास्तविक धारा का अनुवर्तन है (चित्र 16.1 देखें)। यह विस्थापन धारा प्लेटों के बीच एकसमान रूप से वितरित होती है क्योंकि विद्युत्-क्षेत्र संधारित्र की प्लेटों पर एकसमान रूप से वितरित होता है। यह चित्र 16.1 में धारा के तीरों के एकसमान वितरण द्वारा दिखाया गया है।



चित्र 16.2: आवेशित समांतर प्लेट संधारित्र। बिंदुदार गाउसीय पृष्ठ धनात्मक प्लेट के आवेश को परिबद्ध करता है।

समांतर प्लेट संधारित्र के इस उदाहरण से यह स्पष्ट हो जाता है कि मैक्सवेल के चौथे समीकरण में विस्थापन धारा वाले पद का होना आवश्यक है। विस्थापन धारा के महत्व को समझने के लिए आप निम्नलिखित बोध प्रश्न करें।

बोध प्रश्न 3 – विस्थापन धारा

एक समांतर प्लेट संधारित्र में, जिसकी प्लेटों का क्षेत्रफल 1m^2 है, विस्थापन धारा का अधिकतम मान ज्ञात करें। दिया है कि प्लेटों के बीच का विद्युत्-क्षेत्र $E = E_0 \sin\omega t$ है जहां $E_0 = 10\,\text{V}$ और आवृत्ति 10 MHz है।

वास्तव में मैक्सवेल ही की प्रतिभा थी कि उन्होंने पहचाना कि फ़ैराडे नियम द्वारा सुझाई गई सममिति को प्रदर्शित करने के लिए ऐम्पियर नियम में परिवर्तन करना आवश्यक है।

मैक्सवेल के सम्मान में चारों संपूर्ण विद्युत्-चुंबकत्व के नियमों को उनके नाम पर **मैक्सवेल समीकरण** कहा जाता है।

मैक्सवेल समीकरण प्रकृति के मूलभूत नियमों की श्रेणी में आते हैं। जैसाकि आप देख चुके हैं, इन्हें किन्हीं मूल संदर्शों से तर्कसंगत व्याख्या और गणितीय परिकलन द्वारा व्युत्पन्न नहीं किया गया है।

प्रकृति के मूलभूत नियम हमारे ज्ञान का व्यापकीकरण ही होते हैं और उन्हें खोजा जाता है, पाया जाता है या उनका पता लगाया जाता है।

अगले भाग में हम मैक्सवेल समीकरणों की व्याख्या प्रस्तुत करेंगे।

16.4 मैक्सवेल समीकरणों की व्याख्या

आइए, पहले हम इन समीकरणों को एक-साथ एक तालिका में लिखें।

तालिका 16.2 : मैक्सवेल समीकरण

समी. संख्या	अवकल रूप	समाकल रूप
1.	$\vec{\nabla}.\vec{\mathbf{E}} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$	$\oiint_S \vec{\mathbf{E}}.d\vec{\mathbf{S}} = \frac{q}{\varepsilon_0}$ (16.17)
2.	$\vec{\nabla}\times\vec{\mathbf{E}} = -\frac{\partial\vec{\mathbf{B}}}{\partial t}$	$\oint_C \vec{\mathbf{E}}.d\vec{\mathbf{l}} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$ (16.18)
3.	$\vec{\nabla}.\vec{\mathbf{B}} = 0$	$\oiint_S \vec{\mathbf{B}}.d\vec{\mathbf{S}} = 0$ (16.19)
4.	$\vec{\nabla}\times\vec{\mathbf{B}} = \mu_0\left(\vec{\mathbf{J}} + \varepsilon_0 \frac{\partial\vec{\mathbf{E}}}{\partial t}\right)$	$\oint_C \vec{\mathbf{B}}.d\vec{\mathbf{l}} = \mu_0 i + \mu_0 i_d$ (16.20) जहां $i_d = \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$

यह समीकरण-समुच्चय, जिसे सबसे पहले मैक्सवेल ने 1864 में प्रकाशित किया था, प्रत्येक स्थान पर विद्युत् और चुंबकीय क्षेत्रों के व्यवहार को निर्धारित करता है। तालिका 16.2 में इन समीकरणों को विद्युत् आवेशों और विद्युत् धाराओं की उपस्थिति में विद्युत् और चुंबकीय क्षेत्रों के लिए लिखा गया है।

ध्यान दें कि इन समीकरणों में $\vec{\mathbf{E}}$ और $\vec{\mathbf{B}}$ के सापेक्ष सममिति का न होना चुंबकीय आवेश और उसके संगत धारा के न होने के कारण है।

$\vec{\mathbf{E}}$ और $\vec{\mathbf{B}}$ क्षेत्रों के लिए निर्वात और पदार्थ में भी मैक्सवेल समीकरण लिखे जाते हैं। अब हम निर्वात में यानी आवेश-मुक्त और धारा-मुक्त प्रदेशों में मैक्सवेल समीकरणों पर चर्चा करेंगे।

जैसाकि आप देख सकते हैं, इन प्रदेशों में समीकरणों (16.17) से (16.20) में q और i (या ρ और $\vec{\mathbf{J}}$ वाले) पद शून्य होते हैं। आइए, हम निर्वात में मैक्सवेल समीकरणों को एक-साथ तालिका 16.3 में लिखें।

तालिका 16.3 : निर्वात में मैक्सवेल समीकरण जबकि आवेश या धारा के स्रोत न हों

अवकल रूप	समाकल रूप
$\vec{\nabla}.\vec{\mathbf{E}} = 0$	$\oiint_S \vec{\mathbf{E}}.d\vec{\mathbf{S}} = 0$ (16.21)
$\vec{\nabla}\times\vec{\mathbf{E}} = -\frac{\partial\vec{\mathbf{B}}}{\partial t}$	$\oint_C \vec{\mathbf{E}}\,.\,d\vec{\mathbf{l}} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$ (16.22)
$\vec{\nabla}.\,\vec{\mathbf{B}} = 0$	$\oiint_S \vec{\mathbf{B}}.d\vec{\mathbf{S}} = 0$ (16.23)
$\vec{\nabla}\times\vec{\mathbf{B}} = \mu_0\,\varepsilon_0\frac{\partial\vec{\mathbf{E}}}{\partial t}$	$\oint_C \vec{\mathbf{B}}\,.\,d\vec{\mathbf{l}} = \mu_0\,\varepsilon_0\frac{d\Phi_E}{dt}$ (16.24)

आप देख सकते हैं कि आवेश-मुक्त और धारा-मुक्त प्रदेशों में इन समीकरणों में पूर्ण सममिति है। निर्वात में मैक्सवेल समीकरणों में विद्युत् और चुंबकीय क्षेत्रों का बराबरी का दर्ज़ा है। ऐम्पियर-मैक्सवेल नियम में अचर ε_0 और μ_0 इसलिए आते हैं क्योंकि हमने इन समीकरणों को SI मात्रकों में लिखा है।

आप सोच रहे होंगे कि इन समीकरणों में चिन्हों में असंगति क्यों है? समीकरणों (16.18) और (16.20) या समीकरणों (16.22) और (16.24) में चिन्ह का यह अंतर वास्तव में सममिति के कारण है : यह दिखाता है कि विद्युत्-क्षेत्र और चुंबकीय क्षेत्र एक-दूसरे के पूरक के रूप में उपस्थित होते हैं और एक-दूसरे को उत्पन्न करते हैं।

मैक्सवेल के ये चार संहत और परिष्कृत समीकरण विद्युत् और चुंबकीय क्षेत्रों के बीच अंतर्निहित सममिति उजागर करते हैं।

मैक्सवेल समीकरण हमें क्या बताते हैं?

संक्षेप में, तालिका 16.2 के पहले दो मैक्सवेल समीकरण हमें यह बताते हैं कि विद्युत्-क्षेत्र दो तरह से स्थापित होता है :

i) विद्युत् आवेशों से, और

ii) परिवर्ती चुंबकीय क्षेत्र से।

तालिका 16.2 के अंतिम दो मैक्सवेल समीकरण हमें बताते हैं कि

i) चुंबकीय क्षेत्र का कोई स्रोत नहीं होता (प्रकृति में वियुक्त चुंबकीय आवेश नहीं होते), और

ii) चुंबकीय क्षेत्र, विद्युत् धाराओं और परिवर्ती विद्युत्-क्षेत्र द्वारा स्थापित होता है।

मैक्सवेल समीकरणों से यह भी पता चलता है कि **परिवर्ती चुंबकीय क्षेत्र का अस्तित्व परिवर्ती विद्युत्-क्षेत्र के बिना नहीं हो सकता और परिवर्ती विद्युत्-क्षेत्र का अस्तित्व परिवर्ती चुंबकीय क्षेत्र के बिना नहीं हो सकता।**

यही कारण है कि इन दो क्षेत्रों को अलग-अलग नहीं माना जा सकता। इस तरह, **एकल क्षेत्र** के रूप में **विद्युत्-चुंबकीय क्षेत्र** की अवधारणा का उदय हुआ।

फ़ैराडे नियम और व्यापकीकृत ऐम्पियर नियम को संयुक्त करके मैक्सवेल समीकरण हमें बताते हैं कि विद्युत् और चुंबकत्व को विद्युत्-चुंबकत्व की एकल परिघटना के दो पूरक पक्षों की तरह लिया जा सकता है। हम कह सकते हैं कि विद्युत् और चुंबकत्व एक ही सिक्के के दो पहलू हैं। इस तरह, मैक्सवेल विद्युत् और चुंबकत्व के एकीकृत सिद्धांत को गणितीय रूप में प्रस्तुत करने में सफल हुए।

मैक्सवेल समीकरण इसलिए भी महत्वपूर्ण हैं क्योंकि वे बहुत सी नई परिघटनाओं की प्रागुक्ति भी करते हैं। मैक्सवेल के सिद्धांत के असंख्य परिणाम हैं – समस्त विद्युतीय इंजीनियरिंग और रेडियो इंजीनियरिंग, इन समीकरणों में समाहित हैं। सभी संचार तंत्रों (रेडियो, टीवी, मोबाइल फोन, इंटरनेट आदि) का डिज़ाइन मैक्सवेल समीकरणों पर आधारित है। साथ ही, समीकरण (16.18) के साथ-साथ समीकरण (16.20) में विस्थापन धारा के पद के होने से विद्युत्-चुंबकीय तरंगों के अस्तित्व की प्रागुक्ति की जा सकती है और प्रकाश की प्रकृति की व्याख्या की जा सकती है। इस बारे में हम अगले भाग में चर्चा करेंगे। इन्हीं कारणों से मैक्सवेल समीकरणों को 19वीं सदी की भौतिकी का सर्वाधिक महत्वपूर्ण योगदान माना जाता है और मैक्सवेल को न्यूटन और आइन्स्टीन के बराबर का दर्ज़ा दिया जाता है।

अब आप थोड़ा रुकना चाहेंगे और अगले भाग में विद्युत्-चुंबकीय तरंगों के बारे में पढ़ने से पहले परिवर्ती विद्युत् और चुंबकीय क्षेत्रों पर मैक्सवेल समीकरणों को लागू करना चाहेंगे।

बोध प्रश्न 4 – मैक्सवेल समीकरण

किन प्रतिबंधों के अधीन, निम्नलिखित परिवर्ती विद्युत् और चुंबकीय क्षेत्र मैक्सवेल समीकरणों [समीकरणों (16.21) से (16.24)] को संतुष्ट करते हैं?

$$\vec{\mathbf{E}} = \hat{\mathbf{j}}\, E_0 \sin(z - vt)$$

$$\vec{\mathbf{B}} = \hat{\mathbf{i}}\, B_0 \sin(z - vt)$$

जहां E_0 और B_0 अचर हैं।

मैक्सवेल समीकरण एक से बढ़कर एक वैज्ञानिकों द्वारा विद्युत् और चुंबकत्व पर 50 से अधिक वर्षों के दौरान किए गए शोध की परिणति थे। इन वैज्ञानिकों में शामिल थे अमरीकी बहुशास्त्री बेन्जामिन फ्रैंकलिन (1706 – 1790), फ्रांसीसी भौतिकीविद् चार्ल्स ऑगस्टिन द कूलॉम (1736 – 1806), जर्मनी के गणितज्ञ और भौतिकीविद् कार्ल फ्रीड्रिख गाउस (1777 – 1855), डेनमार्क के भौतिकीविद् हान्स क्रिश्चियन ओर्स्टेड (1777 – 1851), फ्रांसीसी भौतिकीविद् ज्यां-बाप्तीस्त बायो (1774 – 1862), फ्रांसीसी भौतिकीविद् फीलिक्स सावर्ट (1791 – 1841), हॉलेन्ड के भौतिकीविद् हेंड्रिक आन्टून लोरेन्ट्स (1853 – 1928), फ्रांसीसी भौतिकीविद् आन्द्रे-मारी ऐम्पियर (1775 – 1836), अमरीकी वैज्ञानिक जोसेफ़ हेनरी (1797 – 1878), अंग्रेज़ भौतिकीविद् माइकेल फ़ैराडे (1797 – 1867) और स्कॉटलैंड के भौतिकीविद् जेम्स क्लर्क मैक्सवेल (1831 – 1879)।

लेकिन जैसाकि आपने भाग 16.4 में सीखा है वह मैक्सवेल ही थे जिन्होंने विद्युत् और चुंबकत्व के मूलभूत नियमों का पुनर्सूत्रीकरण किया और उन्हें चार संहत समीकरणों के रूप में (जो तालिकाओं 16.2 और 16.3 में दी गई हैं) प्रस्तुत किया। ये समीकरण

समस्त विद्युत्-चुंबकीय परिघटनाओं की व्याख्या करते हैं। आप अगले भाग में मैक्सवेल समीकरणों की शायद सबसे रोमांचक और गहन अर्थ वाली वैज्ञानिक परिणति के बारे में जानेंगे। यह है मैक्सवेल समीकरणों की विद्युत्-चुंबकीय तरंगों की प्रागुक्ति करने की क्षमता। मैक्सवेल समीकरण हमें विद्युत्-चुंबकीय तरंगों की प्रकृति समझने का आधार भी प्रदान करते हैं।

16.5 विद्युत्-चुंबकीय तरंगें

मैक्सवेल समीकरणों की महान सफलताओं में से एक सफलता यह थी कि इन समीकरणों ने 1864 में विद्युत्-चुंबकीय तरंगों के अस्तित्व की प्रागुक्ति की। इन्हें बहुत बाद में प्रयोगों में उत्पन्न या संसूचित किया गया।

लगभग 25 साल बाद, हीनरिख़ हर्ट्स ने 1887 में प्रयोगों द्वारा इन तरंगों को जनित किया और इन्हें संसूचित किया। मैक्सवेल ने यह भी प्रागुक्ति की कि सभी विद्युत्-चुंबकीय तरंगों की चाल लगभग वायु में प्रकाश की चाल के बराबर होगी। साथ ही, मैक्सवेल ने यह भी निश्चयात्मक और सही कथन दिया कि प्रकाश विद्युत्-चुंबकीय तरंग है।

हीनरिख रूडोल्फ़ हर्ट्स (1857 – 1894) जर्मनी के एक भौतिकीविद् थे जिन्होंने अपने प्रयोगों से विद्युत्-चुंबकीय तरंगों का अस्तित्व स्थापित किया। आवृत्ति का मात्रक साइकिल प्रति सेकंड उन्हीं के सम्मान में उनके नाम पर 'हर्ट्स' कहलाता है।

आज हम जानते हैं कि रेडियो तरंगें, अवरक्त तरंगें, दृश्य प्रकाश, पराबैंगनी तरंगें, *X*-किरणें और गामा किरणें – सभी विद्युत्-चुंबकीय तरंगें हैं। इनमें अंतर केवल इनकी आवृत्तियों का है।

इस भाग में हम यह देखेंगे कि किस प्रकार मैक्सवेल समीकरणों से विद्युत्-चुंबकीय तरंगों की प्रागुक्ति की जा सकी और साथ ही यह भी प्रागुक्ति की जा सकी कि प्रकाश विद्युत्-चुंबकीय तरंग है। हम मैक्सवेल समीकरणों से एक समीकरण व्युत्पन्न करेंगे, जो कि तरंग समीकरण है और फिर इसके भौतिक अर्थ को समझने का प्रयास करेंगे।

16.5.1 $\vec{\mathbf{E}}$ और $\vec{\mathbf{B}}$ क्षेत्रों के लिए तरंग समीकरण

पहले हम तालिका 16.3 में दिए गए मैक्सवेल समीकरणों (16.21 से 16.24) से, निर्वात में यानी समष्टि के उस प्रदेश में जिसमें कोई आवेश या धारा न हो, तरंग समीकरण व्युत्पन्न करेंगे। जैसाकि आप देख सकते हैं, ये समीकरण प्रथम कोटि के युग्मित आंशिक अवकल समीकरण हैं। परन्तु, हम इन युग्मित समीकरणों को अयुग्मित कर सकते हैं। गणितीय सुविधा की दृष्टि से हम इनके अवकल रूप का प्रयोग करेंगे और पहले $\vec{\mathbf{E}}$ के लिए तरंग समीकरण व्युत्पन्न करेंगे। समीकरण (16.22) का कर्ल लेने पर हमें मिलता है :

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{E}}) = \vec{\nabla} \times \left(-\frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{B}}) \qquad (16.25\text{क})$$

अब हम किसी भी क्षेत्र सदिश $\vec{\mathbf{F}}$ के लिए निम्नलिखित सदिश सर्वसमिका [इस पाठ्यक्रम के खंड 1 की इकाई 2 के समीकरण (2.10ज)] का प्रयोग करते हैं :

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{F}}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}.\vec{\mathbf{F}}) - \nabla^2 \vec{\mathbf{F}}$$

इस तरह, इस सदिश सर्वसमिका के साथ समीकरण (16.25क) का प्रयोग करने पर हम लिख सकते हैं :

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla}.\vec{\mathbf{E}}) - \nabla^2\vec{\mathbf{E}} = -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\times\vec{\mathbf{B}}) \qquad (16.25\text{ख})$$

फिर हम समीकरण (16.24) से $\vec{\nabla}\times\vec{\mathbf{B}} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t}$ लेकर, समीकरण (16.25ख) को इस तरह लिख सकते हैं :

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla}.\vec{\mathbf{E}}) - \nabla^2\vec{\mathbf{E}} = -\mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2\vec{\mathbf{E}}}{\partial t^2} \qquad (16.25\text{ग})$$

क्योंकि समीकरण (16.21) से $\vec{\nabla}.\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{0}}$ है, इसलिए समीकरण (16.25ग) हो जाता है :

$$\nabla^2\vec{\mathbf{E}} = \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2\vec{\mathbf{E}}}{\partial t^2} \qquad (16.26)$$

इसी तरह, इन्हीं चरणों का अनुसरण करके हम सिद्ध कर सकते हैं कि

$$\nabla^2\vec{\mathbf{B}} = \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2\vec{\mathbf{B}}}{\partial t^2} \qquad (16.27)$$

वास्तव में, आपको इस प्रकार के गणितीय परिकलन का अच्छी तरह से अभ्यास करना चाहिए और समीकरण (16.27) को स्वयं व्युत्पन्न करना चाहिए। इसके लिए बोध प्रश्न 5 हल करें।

बोध प्रश्न 5 – तरंग समीकरण की व्युत्पत्ति

समीकरण (16.27) व्युत्पन्न करें।

आपको समीकरणों (16.26 और 16.27) की व्युत्पत्तियों के गणितीय चरणों का अच्छी तरह अभ्यास करना चाहिए ताकि आप इन्हें भली-भांति जान जाएं। इस तरह, मैक्सवेल समीकरणों से हमें निर्वात में (आवेशों और धाराओं की अनुपस्थिति में) समय-परिवर्ती $\vec{\mathbf{E}}$ और $\vec{\mathbf{B}}$ क्षेत्रों के लिए दो अयुग्मित द्वितीय कोटि आंशिक अवकल समीकरण मिलते हैं। आइए, हम इन समीकरणों को एक-साथ लिखें।

दोहराएं

समय-परिवर्ती विद्युत् और चुंबकीय क्षेत्रों के समीकरण

मैक्सवेल समीकरणों में समय-परिवर्ती विद्युत् और चुंबकीय क्षेत्र निम्नलिखित द्वितीय कोटि आंशिक अवकल समीकरणों को संतुष्ट करते हैं :

$$\nabla^2\vec{\mathbf{E}} = \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2\vec{\mathbf{E}}}{\partial t^2} \qquad (16.26)$$

$$\nabla^2\vec{\mathbf{B}} = \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2\vec{\mathbf{B}}}{\partial t^2} \qquad (16.27)$$

आइए, अब हम समीकरणों (16.26 और 16.27) पर विस्तार से चर्चा करें। आप आगे की चर्चा में देखेंगे कि समीकरण (16.26 और 16.27) तरंग समीकरण के रूप के हैं। क्लासिकी तरंग समीकरण याद करें जो आपने स्कूल की भौतिकी या यांत्रिकी नामक पाठ्यक्रम BPHCT-131 की इकाई 19 में पढ़ी है।

इसका व्यंजक है :

$$\nabla^2 f = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \tag{16.28}$$

यह समीकरण चाल v से चल रही तरंग की गति को निरूपित करता है। अब समीकरण (16.28) की तुलना समीकरणों (16.26 और 16.27) से करें। आप देख सकते हैं कि ये दोनों समीकरण समय-परिवर्ती विद्युत् और चुंबकीय क्षेत्रों के तरंग समीकरण हैं जो आकाश में तरंग की तरह संचरित होते हैं।

ध्यान दें कि मैक्सवेल समीकरण हमें बताते हैं कि **परिवर्ती विद्युत्-क्षेत्र से एक चुंबकीय क्षेत्र उत्पन्न होता है, जो स्वयं समय के साथ परिवर्तित हो सकता है**। इसी तरह, **परिवर्ती चुंबकीय क्षेत्र से विद्युत् क्षेत्र उत्पन्न हो सकता है जो स्वयं समय के साथ परिवर्तित हो सकता है**। इस तरह, एक-साथ लिए जाने पर मैक्सवेल समीकरण (16.26 और 16.27) निम्नलिखित बात सुझाते हैं :

समय के साथ परिवर्तित होने वाले विद्युत् और चुंबकीय क्षेत्र लगातार एक-दूसरे को उत्पन्न कर सकते हैं और आकाश में संचरित होते हुए अपने साथ विद्युत्-चुंबकीय ऊर्जा अभिगमित (transport) कर सकते हैं।

अतः, मैक्सवेल समीकरण स्व-पोषी प्रगामी विद्युत्-चुंबकीय क्षेत्रों के होने की संभावना सुझाते हैं, जो आकाश में तरंग की तरह संचरित होते हैं। इस तरह, '**विद्युत्-चुंबकीय तरंग**' की अवधारणा का जन्म हुआ। अब विद्युत्-चुंबकीय तरंगों की यह अवधारणा मान्य है कि वे विद्युत् और चुंबकीय क्षेत्रों से बनी संरचनाएं हैं जो निर्वात में मुक्त रूप से गतिमान होती हैं। समीकरणों (16.26 और 16.27) की समीकरण (16.28) से तुलना करने पर, हमें विद्युत्-चुंबकीय तरंगों की चाल प्राप्त होती है :

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \tag{16.29}$$

जब हम समीकरण (16.29) में ε_0 और μ_0 के मान रखते हैं तो हमें v का यह मान मिलता है :

$$v = 3.0 \times 10^8 \,\mathrm{ms}^{-1} \tag{16.30}$$

क्या आप इस मान को पहचानते हैं? यह तो **निर्वात में प्रकाश की चाल** है!

इस परिणाम का निहितार्थ निहायत ही रोमांचक है :

प्रकाश एक विद्युत्-चुंबकीय तरंग है।

सार रूप में, मैक्सवेल की खोज यह थी कि विद्युत्-चुंबकीय तरंग की चाल सुपरिचित नियतांकों ε_0 और μ_0 पर निर्भर करती है जिन्हें स्थैतिक विद्युतीय और चुंबकीय प्रयोगों में मापा जाता है। उन्होंने यह भी खोज की कि निर्वात में विद्युत्-चुंबकीय तरंग की चाल का परिकलित मान प्रकाश की चाल के मान के बराबर था। इस परिणाम से उन्होंने एक साहसी परिकल्पना प्रस्तुत की कि प्रकाश विद्युत्-चुंबकीय तरंग है।

मैक्सवेल ने प्रागुक्ति की कि सभी विद्युत्-चुंबकीय तरंगें लगभग उतनी ही चाल से संचरित होंगी जो वायु में प्रकाश की मापी गयी चाल के बराबर थी। इसी कारण से उन्होंने आरंभ से ही इस बात पर बल दिया कि प्रकाश विद्युत्-चुंबकीय तरंग है।

शायद आज इस निष्कर्ष से आपको कोई आश्चर्य न हो। लेकिन कल्पना करें कि मैक्सवेल के समय में यह कितनी बड़ी उपलब्धि रही होगी। आइए, इस बात को विस्तार से समझें। क्या आपको याद है कि विद्युत् और चुंबकत्व के अध्ययन में पहले-पहल ε_0 और μ_0 का प्रयोग कहां हुआ था? इनका पहले-पहल प्रयोग कूलॉम नियम और

बायो-सावर्ट नियम में नियतांकों के रूप में किया गया था। इन नियतांकों का मापन हम ऐसे प्रयोगों में करते हैं जिनमें आवेशित मज्ज़ा-गुटिका, बैटरी और तारों का इस्तेमाल होता है – ये वे प्रयोग हैं **जिनका प्रकाश से कोई संबंध नहीं है**। और फिर भी मैक्सवेल के विद्युत्-चुंबकत्व के सिद्धांत में प्रकाश की चाल के साथ ये दोनों नियतांक एक सुन्दर और सरल ढंग से संबंधित होते हैं!

इस सिलसिले में ऐम्पियर-मैक्सवेल नियम में विस्थापन धारा वाले पद की महत्वपूर्ण भूमिका पर भी ध्यान दें। इस पद के बिना तरंग समीकरण प्राप्त ही नहीं होता। अतः, मैक्सवेल समीकरणों के अनुसार, **निर्वात में विद्युत्-चुंबकीय तरंगें समीकरण (16.29) द्वारा दी गई चाल से संचरित होती हैं**।

अब हम चाहेंगे कि आप इन तरंगों की प्रकृति को अच्छी तरह से समझें। इसके लिए आप अगला भाग पढ़ें।

16.5.2 विद्युत्-चुंबकीय तरंगों की प्रकृति

हमने भाग 16.5.1 में सुझाया है कि विद्युत्-चुंबकीय तरंग, समय-परिवर्ती विद्युत् और चुंबकीय क्षेत्रों से बनी संरचना है। अब हम पूछेंगे : हम इस प्रकार की **प्रगामी विद्युत्-चुंबकीय तरंग की कल्पना कैसे करें**? इसके लिए, आइए, हम निर्वात के एक प्रदेश (यानी आवेश-मुक्त और धारा-मुक्त प्रदेश) में प्रगामी विद्युत्-चुंबकीय तरंग लें।

> विद्युत्-चुंबकीय तरंगों की प्रकृति और निर्वात में उनके संचरण को समझने के लिए, आप https://www.youtube.com/watch?v=aCTRjVEmeC0 पर प्रगामी विद्युत्-चुंबकीय तरंग का ऐनीमेशन देख सकते हैं।

जैसे-जैसे इस प्रदेश में तरंग संचरित होती है, वैसे-वैसे विद्युत्-चुंबकीय तरंग के समय-परिवर्ती विद्युत्-क्षेत्र के कारण, समय-परिवर्ती चुंबकीय क्षेत्र प्रेरित होता है, और समय-परिवर्ती चुंबकीय क्षेत्र के कारण, समय-परिवर्ती विद्युत्-क्षेत्र प्रेरित होता है।

वास्तव में, **प्रेरित विद्युत्-क्षेत्र, प्रगामी विद्युत्-चुंबकीय तरंग का विद्युत् घटक होता है।** और **प्रेरित चुंबकीय क्षेत्र प्रगामी विद्युत्-चुंबकीय तरंग का चुंबकीय घटक होता है**। प्रेरित विद्युत् और चुंबकीय क्षेत्र, जो अपने-अपने तरंग समीकरणों को संतुष्ट करते हैं, आकाश में संचरण करते हैं और इनसे विद्युत्-चुंबकीय तरंग संघटित होती है।

इस तरह, हमें एक स्व-पोषी विद्युत्-चुंबकीय तरंग प्राप्त होती है जिसके $\vec{\mathbf{E}}$ और $\vec{\mathbf{B}}$ क्षेत्र होते हैं और ये क्षेत्र बिना आवेशित पदार्थ की आवश्यकता के, परिवर्तित होते हैं। इस तरह, मैक्सवेल समीकरण हमें यह बताते हैं कि सूरज का किरणपुंज, आकाश में संचरण करने वाले परिवर्ती विद्युत् और चुंबकीय क्षेत्रों का विन्यास है। यही बात रेडियो तरंगों, माइक्रोवेव तरंगों, अवरक्त किरणों, पराबैंगनी किरणों, X-किरणों और γ-किरणों के लिए भी सत्य है। विद्युत्-चुंबकीय तरंगों के संबंध में यहां हम निम्नलिखित महत्वपूर्ण बिंदु पर विशेष बल देना चाहेंगे :

यहां केवल इतना ही काफ़ी नहीं है कि विद्युत्-चुंबकीय क्षेत्र, तरंग समीकरणों (16.26 और 16.27) को संतुष्ट करें। इसे **मैक्सवेल समीकरणों को भी संतुष्ट करना चाहिए**। मैक्सवेल समीकरण, तरंग समीकरणों को संतुष्ट करने वाले विद्युत् और चुंबकीय क्षेत्रों पर **अतिरिक्त व्यवरोध** (constraints) आरोपित करते हैं। जबकि (निर्वात में) मैक्सवेल समीकरणों का प्रत्येक हल तरंग समीकरण को संतुष्ट करता है, **इसका विलोम सही नहीं है**। यह ज़रूरी नहीं कि तरंग समीकरण का प्रत्येक हल, मैक्सवेल समीकरणों को संतुष्ट करे, यानी यह आवश्यक नहीं कि वह हल एक विद्युत्-चुंबकीय तरंग को निरूपित करे। विद्युत्-चुंबकीय तरंगों के लिए तरंग समीकरणों को हल करते समय हमें इस बात

की विशेष रूप से जांच कर लेनी चाहिए कि तरंग समीकरण के हल मैक्सवेल समीकरणों को भी संतुष्ट करते हैं या नहीं। वे हल तभी विद्युत्-चुंबकीय तरंग को निरूपित करेंगे जब वे तरंग समीकरण के साथ-साथ मैक्सवेल समीकरणों को भी संतुष्ट करते हों। आइए, हम एक उदाहरण में मैक्सवेल समीकरणों द्वारा आरोपित अतिरिक्त व्यवरोध निर्धारित करें। इससे हमें विद्युत्-चुंबकीय तरंगों की अनुप्रस्थ प्रकृति का भी सुराग मिलेगा।

उदाहरण 16.2 : विद्युत्-चुंबकीय तरंग की अनुप्रस्थ प्रकृति

गणित आसान रखने के लिए हम यह मान लेते हैं कि विद्युत्-चुंबकीय तरंगें *z*-दिशा में चाल *c* से गतिमान हैं। अतः, इन तरंगों से संबद्ध विद्युत् और चुंबकीय क्षेत्र निम्न रूप के होंगे (पाठ्यक्रम BPHCT-131 की इकाई 19 को याद करें) :

$$\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{E}}_0 \sin(z - ct) \qquad \text{(i)}$$

और $$\vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{B}}_0 \sin(z - ct) \qquad \text{(ii)}$$

जहां $\vec{\mathbf{E}}_0$ और $\vec{\mathbf{B}}_0$ क्रमशः विद्युत्-चुंबकीय तरंग से संबद्ध विद्युत् और चुंबकीय क्षेत्रों के आयाम हैं। सिद्ध करें कि यह विद्युत्-चुंबकीय तरंग, एक अनुप्रस्थ तरंग है।

हल ■ निर्वात में मैक्सवेल समीकरणों (16.21 और 16.23) से हम जानते हैं कि

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{\mathbf{E}} = 0 \quad \text{और} \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{\mathbf{B}} = 0 \qquad \text{(iii)}$$

यदि हम समीकरण (iii) की दोनों समीकरणों में क्रमशः समीकरण (i) और (ii) प्रतिस्थापित करें तो हम पाते हैं कि ये दोनों समीकरण संतुष्ट होंगे यदि और केवल यदि (हाशिए पर दी गई टिप्पणी पढ़ें) :

$$E_{0z} = \left(\vec{\mathbf{E}}_0\right)_z = 0 \quad \text{और} \quad B_{0z} = \left(\vec{\mathbf{B}}_0\right)_z = 0 \qquad \text{(iv)}$$

समीकरण (iv) हमें बताता है कि संचरण की दिशा में विद्युत्-चुंबकीय तरंग के विद्युत् क्षेत्र और चुंबकीय क्षेत्र के घटक शून्य हैं। इसका अर्थ यह है कि विद्युत्-चुंबकीय तरंग के संचरण की दिशा इसके घटक विद्युत् और चुंबकीय क्षेत्रों की दिशाओं के लंबवत् है। आपने अपने स्कूल की भौतिकी और पाठ्यक्रम BPHCT-131 की इकाई 19 में पढ़ा है कि ऐसी तरंगें अनुप्रस्थ तरंगें होती हैं। अतः, विद्युत्-चुंबकीय तरंगें अनुप्रस्थ तरंगें होती हैं।

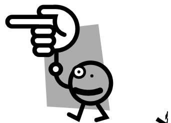
उदाहरण 16.2 के समीकरण (iv) की व्युत्पत्ति : हम उदाहरण 16.2 के समीकरण (i) को संबंध $\vec{\nabla}\cdot\vec{\mathbf{E}} = 0$ में प्रतिस्थापित करते हैं। तब हमें मिलता है :

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{\mathbf{E}} = 0 = \frac{\partial}{\partial x}(E_{0x})\sin(z-ct) + \frac{\partial}{\partial y}(E_{0y})\sin(z-ct) + \frac{\partial}{\partial z}[E_{0z}\sin(z-ct)]$$

अब यदि समीकरण $\vec{\nabla}\cdot\vec{\mathbf{E}} = 0$ को $\vec{\mathbf{E}}$ द्वारा संतुष्ट होना है तो **इस समीकरण में सभी आंशिक अवकलज शून्य होने चाहिए**। *z* के सापेक्ष आंशिक अवकलज शून्य होगा यदि और केवल यदि E_{0z} शून्य हो क्योंकि *z* के सापेक्ष साइन फलन का अवकलज शून्य नहीं होता।

आपने अभी यह जाना कि विद्युत्-चुंबकीय तरंगें अनुप्रस्थ तरंगें होती हैं। इसका अर्थ यह है कि किसी भी क्षण पर विद्युत्-चुंबकीय तरंग के संचरण की दिशा विद्युत् और चुंबकीय क्षेत्रों की दिशा के लंबवत् होती है। साथ ही, **विद्युत्-चुंबकीय तरंग के विद्युत्-क्षेत्र घटक और चुंबकीय क्षेत्र घटक एक-दूसरे के लंबवत् होते हैं**। अतः,

विद्युत्-चुंबकीय तरंग एक-दूसरे के लंबवत् विद्युत् और चुंबकीय क्षेत्रों से संघटित होती है और प्रगामी विद्युत्-चुंबकीय तरंग के दोनों ही घटक क्षेत्र तरंग संचरण की दिशा के लंबवत् होते हैं।



कभी न भूलें

बोध प्रश्न 6 – विद्युत्-चुंबकीय तरंग के लिए प्रतिबंध

बोध प्रश्न 4 के विद्युत् और चुंबकीय क्षेत्रों के लिए आपने सत्यापित किया है कि ये मैक्सवेल समीकरणों को संतुष्ट करते हैं यदि $E_0 = vB_0$ और $B_0 = \dfrac{vE_0}{c^2}$ हों जहां c प्रकाश की चाल है और उसका मान $c = 1/\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$ है। सिद्ध करें कि दोनों प्रतिबंधों को एक-साथ लेने पर $v = \pm c$ और $|B_0|c = |E_0|$ होता है।

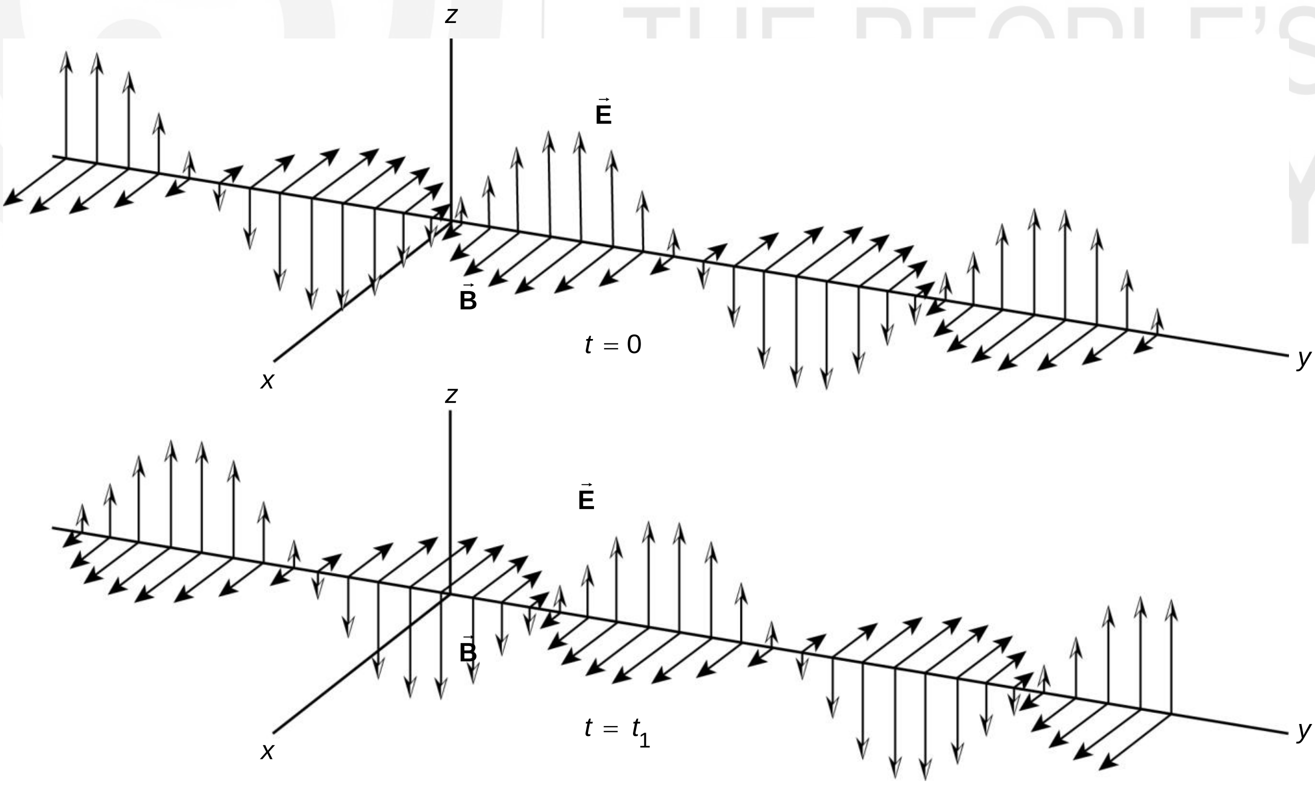
इस तरह, कुछ प्रतिबंधों के अधीन बोध प्रश्न 4 / बोध प्रश्न 6 के $\vec{\mathbf{E}}$ और $\vec{\mathbf{B}}$ क्षेत्र विद्युत्-चुंबकीय तरंग का वर्णन करते हैं। आइए, इस बात को और विस्तार से समझें कि बोध प्रश्न 4 / बोध प्रश्न 6 के $\vec{\mathbf{E}}$ और $\vec{\mathbf{B}}$ क्षेत्रों द्वारा वर्णित विद्युत्-चुंबकीय तरंग आकाश में किस प्रकार संचरित होती है। आपने बोध प्रश्न 6 में यह सत्यापित किया है कि बोध प्रश्न 4 का विद्युत्-चुंबकीय क्षेत्र मैक्सवेल समीकरणों को संतुष्ट करता है यदि

$$E_0 = B_0 c \tag{16.31क}$$

या

$$\frac{E_0}{B_0} = c \tag{16.31ख}$$

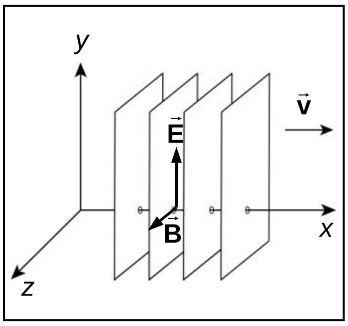
जहां c प्रकाश की चाल है जिसका मान $c = 1/\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$ है। आप यह भी सत्यापित कर सकते हैं कि ये $\vec{\mathbf{E}}$ और $\vec{\mathbf{B}}$ क्षेत्र अपनी-अपनी तरंग समीकरणों (16.26 और 16.27) को संतुष्ट करते हैं।



चित्र 16.3: प्रगामी विद्युत्-चुंबकीय तरंग।

चित्र 16.3 को ध्यान से देखें। इसमें दो भिन्न क्षणों पर एक विद्युत्-चुंबकीय तरंग को दिखाया गया है।

ध्यान दें कि समय बीतने के साथ पूरा का पूरा पैटर्न दायीं ओर स्थानांतरित हो जाता है क्योंकि $(y - ct)$ का $(y + \Delta y)$ और $t + \Delta t$ पर वही मान होता है जो कि y और t पर था बशर्ते $\Delta y = c\Delta t$ हो। यह एक **समतल विद्युत्-चुंबकीय तरंग** का उदाहरण है।



चित्र 16.4: समतल विद्युत्-चुंबकीय तरंग। एक समतल विद्युत्-चुंबकीय तरंग में, दो भिन्न बिंदुओं पर स्थित समतल जिनमें क्षेत्र सदिश $\vec{E}$ और $\vec{B}$ स्थित होते हैं, एक-दूसरे के समांतर होते हैं।

दूसरे शब्दों में, यह एक समतल विद्युत्-चुंबकीय तरंग है जो अचर चाल c से y-दिशा में संचरित हो रही है।

क्या आपने ध्यान दिया कि हमने यहां एक नये पद, **समतल विद्युत्-चुंबकीय तरंग**, का प्रयोग किया है?

आप पूछ सकते हैं : **समतल विद्युत्-चुंबकीय तरंग क्या होती है**?

परिभाषा से, **समतल विद्युत्-चुंबकीय तरंग वह तरंग है जिसके लिए किसी दिए क्षण पर $\vec{E}$ और $\vec{B}$ क्षेत्र, संचरण दिशा के लंबवत् समतल में स्थित सभी बिन्दुओं पर अचर होते हैं**।

आप अपने दिमाग में समतल विद्युत्-चुंबकीय तरंगों की तस्वीर इस तरह से बना सकते हैं : समतल विद्युत्-चुंबकीय तरंग में, समष्टि के प्रत्येक बिन्दु पर क्षेत्र सदिश $\vec{E}$ और $\vec{B}$ एक समतल में स्थित होते हैं। साथ ही, दो भिन्न बिन्दुओं पर स्थित समतल एक-दूसरे के समांतर होते हैं (चित्र 16.4 देखें)।

इस खंड की अगली इकाई में हम निर्वात और पदार्थ में समतल विद्युत्-चुंबकीय तरंगों के संचरण की चर्चा करेंगे क्योंकि इनका भौतिकी, इंजीनियरिंग और प्रौद्योगिकी के अनेक क्षेत्रों में उपयोग होता है।

जैसाकि आपने जाना है, बोध प्रश्न 4 में दिए गए विद्युत्-चुंबकीय क्षेत्रों से संबद्ध विद्युत्-चुंबकीय तरंग एक समतल विद्युत्-चुंबकीय तरंग का विशिष्ट उदाहरण है। अब हमारी रुचि तरंग समीकरणों के समतल तरंग हल प्राप्त करने में है जो मैक्सवेल समीकरणों को भी संतुष्ट करते हों। यह बात आप इकाई 17 में सीखेंगे जो इस खंड की अंतिम इकाई है। अब, आपने इस इकाई में जो कुछ पढ़ा है, हम उसका सारांश देंगे।

16.6 सारांश

अवधारणा	विवरण
विद्युत् और चुंबकत्व के मूलभूत नियम	■ विद्युत् और चुंबकत्व के चार मूलभूत नियम इस प्रकार हैं : विद्युत्-क्षेत्र के लिए गाउस नियम: $\oiint_S \vec{\mathbf{E}}.d\vec{\mathbf{S}} = \frac{q}{\varepsilon_0}$ या $\vec{\nabla}.\vec{\mathbf{E}} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ विद्युत्-चुंबकीय प्रेरण का फ़ैराडे नियम : $\oint_C \vec{\mathbf{E}}.d\vec{\mathbf{l}} = -\frac{d}{dt}\iint_S \vec{\mathbf{B}}.d\vec{\mathbf{S}}$ या $\vec{\nabla}\times\vec{\mathbf{E}} = -\frac{\partial\vec{\mathbf{B}}}{\partial t}$ चुंबकीय क्षेत्र के लिए गाउस नियम : $\oiint_S \vec{\mathbf{B}}.d\vec{\mathbf{S}} = 0$ या $\vec{\nabla}.\vec{\mathbf{B}} = 0$

ऐम्पियर नियम (केवल अपरिवर्ती धाराओं के लिए) :

$$\oint_C \vec{\mathbf{B}}.d\vec{\mathbf{l}} = \mu_0 i \qquad \text{या} \qquad \vec{\nabla}\times\vec{\mathbf{B}} = \mu_0\vec{\mathbf{J}}$$

विद्युत् और चुंबकत्व के मूलभूत नियमों में असममितियां

■ विद्युत् और चुंबकत्व के मूलभूत नियमों में दो प्रकार की असममितियां हैं : पहले प्रकार की असममिति विद्युत् और चुंबकीय क्षेत्रों के लिए गाउस नियमों में है। विद्युत्-क्षेत्र के लिए गाउस नियम के दक्षिण पक्ष में एक पृष्ठ से घिरा आवेश q होता है। लेकिन चुंबकीय क्षेत्र के लिए गाउस नियम के दक्षिण पक्ष में शून्य है। इसमें कोई तुल्य चुंबकीय आवेश नहीं है। यह असममिति इसलिए होती है क्योंकि प्रकृति में वियुक्त विद्युत् आवेश उपस्थित होते हैं, पर अभी तक इस बात का कोई प्रमाण नहीं मिल सका है कि प्रकृति में वियुक्त चुंबकीय आवेश भी उपस्थित होते हैं।

इन नियमों में दूसरे प्रकार की असममिति यह है कि फ़ैराडे नियम के दक्षिण पक्ष में पद $-\partial\vec{\mathbf{B}}/dt$ है। लेकिन इस प्रकार का कोई पद ऐम्पियर नियम में नहीं है। फ़ैराडे नियम के अनुसार **परिवर्ती चुंबकीय क्षेत्र के कारण विद्युत्-क्षेत्र उत्पन्न होता है**। सममिति के कारण यह होना चाहिए कि **परिवर्ती विद्युत्-क्षेत्र के कारण चुंबकीय क्षेत्र उत्पन्न हो**। लेकिन ऐम्पियर नियम में ऐसा कोई पद नहीं है।

मैक्सवेल द्वारा ऐम्पियर नियम का व्यापकीकरण

■ सममिति के विचार से मैक्सवेल ने ऐम्पियर नियम में एक पद $i_d = \mu_0\,\varepsilon_0 \dfrac{d\Phi_E}{dt}$ जोड़ा जिसे उन्होंने **विस्थापन धारा** का नाम दिया और इस प्रकार ऐम्पियर नियम का व्यापकीकरण किया :

$$\vec{\nabla}\times\vec{\mathbf{B}} = \mu_0\vec{\mathbf{J}} + \varepsilon_0\frac{\partial\vec{\mathbf{E}}}{\partial t} \qquad \text{या} \qquad \oint_C \vec{\mathbf{B}}.d\vec{\mathbf{l}} = \mu_0\iint_S\left(\vec{\mathbf{J}} + \varepsilon_0\frac{\partial\vec{\mathbf{E}}}{\partial t}\right).d\vec{\mathbf{S}} = \mu_0(i + i_d)$$

इस समीकरण को **ऐम्पियर-मैक्सवेल नियम** कहा जाता है। यह नियम हमें बताता है कि **चुंबकीय क्षेत्र को दो विधियों से स्थापित किया जा सकता है** : **विद्युत् धारा** से और **समय-परिवर्ती विद्युत्-क्षेत्र** से।

मैक्सवेल समीकरण

■ मैक्सवेल समीकरण, विद्युत् और चुंबकीय क्षेत्रों का वर्णन करने वाले मूलभूत अवकल समीकरण हैं। अपने समाकल और अवकल रूपों में ये समीकरण आगे दिए गए हैं : विद्युत् आवेशों और विद्युत् धाराओं की उपस्थिति में, और निर्वात में जबकि आवेश या धारा के स्रोत न हों :

विद्युत् आवेशों और विद्युत् धाराओं की उपस्थिति में

$$\vec{\nabla}.\vec{\mathbf{E}} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \oint\!\!\oint_S \vec{\mathbf{E}}.d\vec{\mathbf{S}} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{\mathbf{E}} = -\frac{\partial\vec{\mathbf{B}}}{\partial t} \qquad \oint_C \vec{\mathbf{E}}.d\vec{\mathbf{l}} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

$$\vec{\nabla}.\vec{\mathbf{B}} = 0 \qquad \oint\!\!\oint_S \vec{\mathbf{B}}.d\vec{\mathbf{S}} = 0$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{\mathbf{B}} = \mu_0\vec{\mathbf{J}} + \varepsilon_0\frac{\partial\vec{\mathbf{E}}}{\partial \mathbf{t}} \qquad \oint_C \vec{\mathbf{B}}.d\vec{\mathbf{l}} = \mu_0(i + i_d) \;\; \text{जहां} \;\; i_d = \varepsilon_0\frac{d\Phi_E}{dt}$$

निर्वात में जबकि आवेश या धारा के स्रोत न हों

$$\vec{\nabla}.\vec{\mathbf{E}} = 0 \qquad \oiint_S \vec{\mathbf{E}}.d\vec{\mathbf{S}} = 0$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{\mathbf{E}} = -\frac{\partial\vec{\mathbf{B}}}{\partial t} \qquad \oint_C \vec{\mathbf{E}}.d\vec{\mathbf{l}} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

$$\vec{\nabla}.\vec{\mathbf{B}} = 0 \qquad \oiint_S \vec{\mathbf{B}}.d\vec{\mathbf{S}} = 0$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{\mathbf{B}} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{\mathbf{E}}}{\partial t} \qquad \oint_C \vec{\mathbf{B}}.d\vec{\mathbf{l}} = \mu_0\varepsilon_0\frac{d\Phi_E}{dt}$$

मैक्सवेल समीकरण हमें बताते हैं कि **परिवर्ती चुंबकीय क्षेत्र का अस्तित्व परिवर्ती विद्युत्-क्षेत्र के बिना नहीं हो सकता और परिवर्ती विद्युत् क्षेत्र का अस्तित्व परिवर्ती चुंबकीय क्षेत्र के बिना नहीं हो सकता।** अतः, इन दो क्षेत्रों को अलग-अलग नहीं माना जा सकता। इस तरह, **एक एकल क्षेत्र के रूप में विद्युत्-चुंबकीय क्षेत्र** की अवधारणा का उदय हुआ।

मैक्सवेल समीकरण विद्युत् और चुंबकत्व के एकीकरण का गणितीय सूत्रीकरण हैं। मैक्सवेल समीकरणों ने विद्युत्-चुंबकीय तरंगों की प्रागुक्ति की और विद्युत्-चुंबकीय तरंगों की प्रकृति समझने का आधार प्रदान किया।

विद्युत्-चुंबकीय तरंग समीकरण

■ मैक्सवेल समीकरण निर्वात में विद्युत्-चुंबकीय तरंगों की प्रागुक्ति करते हैं। विद्युत् और चुंबकीय क्षेत्रों के तरंग समीकरण हैं :

$$\nabla^2\vec{\mathbf{E}} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{\mathbf{E}}}{\partial t^2} \quad \text{और} \quad \nabla^2\vec{\mathbf{B}} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{\mathbf{B}}}{\partial t^2}$$

ये दो समीकरण **अनुप्रस्थ विद्युत्-चुंबकीय तरंगों** को निदर्शित करते हैं : **प्रगामी विद्युत्-चुंबकीय तरंग स्व-पोषी, परिवर्ती विद्युत् और चुंबकीय क्षेत्रों से संघटित होती है** जो **एक-दूसरे के लंबवत् होते हैं** और **तरंग संचरण की दिशा के लंबवत् होते हैं।** निर्वात में विद्युत्-चुंबकीय तरंगों की चाल होती है :

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$$

यानी विद्युत्-चुंबकीय तरंगें अनुप्रस्थ तरंगें हैं जो निर्वात में प्रकाश की चाल से संचरित होती हैं : $c = 3.0\times10^8\,\text{ms}^{-1}$

इससे यह स्थापित होता है कि **प्रकाश विद्युत्-चुंबकीय तरंग है।**

16.7 अंत में कुछ प्रश्न

1. सिद्ध करें कि धारिता C वाले समांतर प्लेट संधारित्र में जिसकी प्लेटों के बीच का विभवांतर V है, विस्थापन धारा का मान $C(dV/dt)$ होता है। (संकेत : आपने खंड 3 की इकाई 11 में समांतर प्लेट संधारित्र की धारिता की जो परिभाषा पढ़ी है, उसका उपयोग करें।) एक समांतर प्लेट संधारित्र की धारिता 5.0 nF है। यदि

संधारित्र में 1.0 A की विस्थापन धारा उत्पन्न की जानी है, तो उसकी प्लेटों के बीच के विभवांतर के परिवर्तन की दर क्या होगी?

2. सिद्ध करें कि $\vec{\mathbf{E}} = E_0\,\hat{\mathbf{z}}\cos kx \cos ky \cos\omega t$ और

$$\vec{\mathbf{B}} = B_0\,(\hat{\mathbf{x}}\cos kx\,\sin ky - \hat{\mathbf{y}}\sin kx\cos ky)\sin\omega t$$

द्वारा वर्णित विद्युत्-चुंबकीय क्षेत्र आवेश-मुक्त और धारा-मुक्त आकाश में मैक्सवेल समीकरणों को संतुष्ट करेंगे यदि

$$E_0 = \sqrt{2}\,cB_0 \text{ और } \omega = \sqrt{2}\,ck$$

ध्यान दें कि अंत के प्रश्नों 2 और 4 और उनके उत्तरों में हमने x, y, z-अक्षों के अनुदिश एकक सदिशों के लिए प्रतीकों $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$ और $\hat{\mathbf{k}}$ की जगह क्रमशः प्रतीकों $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$ और $\hat{\mathbf{z}}$ का उपयोग किया है।

3. निर्वात में संचरित हो रही विद्युत्-चुंबकीय तरंग से संबद्ध अधिकतम विद्युत्-क्षेत्र का मान $600\,\text{Vm}^{-1}$ है। तरंग से संबद्ध अधिकतम चुंबकीय क्षेत्र का मान ज्ञात करें।

4. क्रमशः $\hat{\mathbf{y}}$ और $-\hat{\mathbf{y}}$ दिशाओं में संचरित हो रही निम्नलिखित विद्युत्-चुंबकीय तरंगें लें :

$$\vec{\mathbf{E}}_1 = \hat{\mathbf{z}}E_0 \sin\frac{2\pi}{\lambda}(y - ct), \quad \vec{\mathbf{B}}_1 = \hat{\mathbf{x}}B_0 \sin\frac{2\pi}{\lambda}(y - ct)$$
$$\vec{\mathbf{E}}_2 = \hat{\mathbf{z}}E_0 \sin\frac{2\pi}{\lambda}(y + ct), \quad \mathbf{B}_2 = -\hat{\mathbf{x}}B_0 \sin\frac{2\pi}{\lambda}(y + ct)$$

सिद्ध करें कि इन दो विद्युत्-चुंबकीय तरंगों के निम्नलिखित परिणामी विद्युत् और चुंबकीय क्षेत्र, निर्वात में मैक्सवेल समीकरणों को संतुष्ट करते हैं :

$$\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{E}}_1 + \vec{\mathbf{E}}_2, \quad \vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{B}}_1 + \vec{\mathbf{B}}_2$$

5. एक विद्युत्-चुंबकीय तरंग का विद्युत्-क्षेत्र है :

$$E_x = 0,\ E_y = 0,\ E_z = (3.0\ \text{Vm}^{-1})\sin(x - 10^8 t)$$

जहां t सेकंड में है, और x, मीटर में। दिया है कि $c = 3.0\times10^8\,\text{ms}^{-1}$। तरंग से संबद्ध चुंबकीय क्षेत्र का परिमाण क्या है?

16.8 हल और उत्तर

बोध प्रश्न

1. क) तालिका 16.1 में दिए गए नियम विद्युत् और चुंबकत्व के चार मूलभूत नियम हैं आप इन्हें स्वयं लिखें। इन नियमों को मूलभूत नियम इसलिए कहा जाता है क्योंकि इस पाठ्यक्रम के अन्य नियमों और समीकरणों को इनसे प्राप्त किया जा सकता है।

ख) इन नियमों में यह सममिति है कि समीकरण युग्मों के वाम पक्ष विद्युत् और चुंबकीय क्षेत्रों की अदला-बदली के अधीन सममित हैं।

ग) विद्युत् और चुंबकत्व के मूलभूत नियमों में दो तरह की असममितियां हैं : एक प्रकार की असममिति विद्युत् और चुंबकीय क्षेत्रों के लिए गाउस नियमों में दिखती है जिनमें विद्युत् आवेश, विद्युत्-क्षेत्रों के स्रोत होते हैं लेकिन चुंबकीय

क्षेत्रों के कोई स्रोत नहीं होते। दूसरे प्रकार की असममिति फ़ैराडे नियम और अपरिवर्ती धाराओं के लिए ऐम्पियर नियम में दिखती है : जहां फ़ैराडे नियम के अनुसार परिवर्ती चुंबकीय क्षेत्र के कारण विद्युत्-क्षेत्र उत्पन्न होता है, वहां ऐम्पियर नियम में ऐसा कोई पद नहीं है जो यह निरूपित करता हो कि परिवर्ती विद्युत्-क्षेत्र के कारण चुंबकीय क्षेत्र उत्पन्न होता है।

2. क) ऐम्पियर नियम केवल अपरिवर्ती धाराओं के लिए सत्य है। फ़ैराडे नियम और ऐम्पियर नियम में सममिति के विचार से ऐम्पियर नियम में एक ऐसा पद होना चाहिए जो यह निरूपित करता हो कि परिवर्ती विद्युत्-क्षेत्र के कारण चुंबकीय क्षेत्र उत्पन्न होता है। मैक्सवेल ने ऐम्पियर नियम में पद $\mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t}$ जोड़ कर इस तथ्य को निरूपित किया। इस पद को जोड़ने से ऐम्पियर नियम में अपरिवर्ती धारा और परिवर्ती विद्युत्-क्षेत्र दोनों ही शामिल हुए और ऐम्पियर नियम का व्यापकीकरण हुआ।

ख) कूलॉम नियम से अचर ε_0 की विमा है : $\dfrac{(\text{आवेश})^2}{(\text{लंबाई})^2(\text{बल})}$ । वैद्युत अभिवाह की परिभाषा से $(d\Phi_E/dt)$ की विमा है : $\dfrac{(\text{बल})(\text{लंबाई})^2}{(\text{आवेश})(\text{समय})}$ । अतः, $(\varepsilon_0\, d\Phi_E/dt)$ की विमा है :

$$\frac{(\text{आवेश})^2}{(\text{लंबाई})^2(\text{बल})} \times \frac{(\text{बल})(\text{लंबाई})^2}{(\text{आवेश})(\text{समय})} = \frac{\text{आवेश}}{\text{समय}}$$

जो धारा की विमा है।

3. उदाहरण 16.1 के समीकरण (iv) से, हम समांतर प्लेट संधारित्र में विस्थापन धारा का मान लिख सकते हैं :

$$|i_d| = \varepsilon_0 A \left|\frac{dE}{dt}\right|$$

चूंकि $E = E_0 \sin\omega t$, अतः, $\dfrac{dE}{dt} = \omega E_0 \cos\omega t$ और $i_d = \varepsilon_0 A \omega E_0 \cos\omega t$ है।

अतः, विस्थापन धारा का अधिकतम मान है :

$$i_d = \varepsilon_0 E_0 A\omega = \varepsilon_0 E_0 A(2\pi f) \qquad (\because \omega = 2\pi f)$$

आंकिक मान रखने पर हमें मिलता है :

$$i_d = (8.85\times10^{-12}\,\mathrm{C^2N^{-1}m^{-2}})\times(10\,\mathrm{V})\times(1.0\,\mathrm{m^2})\times 2\pi\times(10^7\,\mathrm{Hz}) = 56\,\mathrm{mA}$$

4. मैक्सवेल समीकरणों (16.21 से 16.24) के अवकल रूप में, प्रश्न में दिए गए $\vec{\mathbf{E}}$ और $\vec{\mathbf{B}}$ के मान रखने पर हमें मिलता है :

i) $$\vec{\nabla}.\vec{\mathbf{E}} = \vec{\nabla}.[\hat{\mathbf{j}}\, E_0 \sin(z-vt)] = (\hat{\mathbf{i}}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}}\frac{\partial}{\partial z}).[\hat{\mathbf{j}}\, E_0 \sin(z-vt)]$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}[E_0 \sin(z-vt)] = 0$$

अतः, समीकरण (16.21) सर्वसमिका है।

ii) $$\vec{\nabla}\times\vec{\mathbf{E}} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 0 & E_0\sin(z-vt) & 0 \end{vmatrix} = \hat{\mathbf{i}}\,\frac{\partial}{\partial z}[E_0\sin(z-vt)] = \hat{\mathbf{i}}\,E_0\cos(z-vt)$$

$$\frac{\partial\vec{\mathbf{B}}}{\partial t} = \hat{\mathbf{i}}\,\frac{\partial}{\partial t}[B_0\sin(z-vt)] = -\,\hat{\mathbf{i}}\,v\,B_0\cos(z-vt)]$$

अतः, समीकरण (16.22) से प्रतिबंध मिलता है : $E_0 = v\,B_0$

iii) $$\vec{\nabla}.\vec{\mathbf{B}} = (\hat{\mathbf{i}}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}}\frac{\partial}{\partial z}).[\hat{\mathbf{i}}\,B_0\sin(z-vt)] = \frac{\partial}{\partial x}[B_0\sin(z-vt)] = 0$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}[E_0\sin(z-vt)] = 0$$

अतः, समीकरण (16.23) भी सर्वसमिका है।

iv) $\vec{\nabla}\times\vec{\mathbf{B}} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial\vec{\mathbf{E}}}{\partial \mathrm{t}}$ जहां $c^2 = \dfrac{1}{\mu_0\varepsilon_0}$ और

$$\vec{\nabla}\times\vec{\mathbf{B}} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ B_0\sin(z-vt) & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -\,\hat{\mathbf{j}}\,\frac{\partial}{\partial z}[B_0\sin(z-vt)] = -\,\hat{\mathbf{j}}\,B_0\cos(z-vt)$$

और $$\frac{\partial\vec{\mathbf{E}}}{\partial \mathrm{t}} = \hat{\mathbf{j}}\,\frac{\partial}{\partial t}[E_0\sin(z-vt)] = -\,\hat{\mathbf{j}}\,v\,E_0\cos(z-vt)$$

अतः, समीकरण (16.24) से प्रतिबंध मिलता है : $B_0 = \dfrac{vE_0}{c^2}$

5. कर्ल $\vec{\mathbf{B}}$ का कर्ल लेने पर हमें मिलता है :

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{\mathbf{B}}) = \vec{\nabla}\times\mu_0\,\varepsilon_0\left(\frac{\partial\vec{\mathbf{E}}}{\partial t}\right) = \mu_0\,\varepsilon_0\,\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\times\vec{\mathbf{E}}) \qquad \text{(i)}$$

अब हम क्षेत्र सदिश $\vec{\mathbf{F}}$ के लिए निम्नलिखित सदिश सर्वसमिका का प्रयोग करते हैं :

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{\mathbf{F}}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}.\vec{\mathbf{F}}) - \nabla^2\vec{\mathbf{F}}$$

इस सदिश सर्वसमिका का समीकरण (i) में प्रयोग करने पर हम लिख सकते हैं :

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla}.\vec{\mathbf{B}}) - \nabla^2\vec{\mathbf{B}} = \mu_0\,\varepsilon_0\,\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\times\vec{\mathbf{E}}) \qquad \text{(ii)}$$

फिर हम समीकरण (16.22) से $\vec{\nabla}\times\vec{\mathbf{E}} = -\dfrac{\partial\vec{\mathbf{B}}}{\partial t}$ लेकर, समीकरण (ii) को इस तरह लिख सकते हैं :

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla}.\vec{\mathbf{B}}) - \nabla^2\vec{\mathbf{B}} = -\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{\mathbf{B}}}{\partial t^2} \qquad \text{(iii)}$$

क्योंकि समीकरण (16.23) से $\vec{\nabla}.\vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{0}}$ है, इसलिए समीकरण (iii) हो जाता है :

$$\nabla^2\vec{\mathbf{B}} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{\mathbf{B}}}{\partial t^2}$$

6. हमने बोध प्रश्न 4 के विद्युत् और चुंबकीय क्षेत्रों के लिए ये प्रतिबंध प्राप्त किए हैं : $E_0 = vB_0$ और $B_0 = \dfrac{vE_0}{c^2}$ । क्योंकि दोनों प्रतिबंध एक-साथ संतुष्ट होते हैं, अतः, हम दूसरे प्रतिबंध में $E_0 = vB_0$ रख सकते हैं और हमें मिलता है :

$$B_0 = \frac{vE_0}{c^2} = \frac{v^2B_0}{c^2} \quad\Rightarrow\quad \frac{v^2}{c^2} = 1 \quad\Rightarrow\quad v = \pm c$$

यदि हम यह परिणाम पहले प्रतिबंध में रखते हैं, तो हमें मिलता है :

$$|B_0|c = |E_0|$$

अंत में कुछ प्रश्न

1. खंड 3 की इकाई 11 में दी गई समांतर प्लेट की धारिता की परिभाषा से हमें मिलता है :

$$C = \frac{q}{V} \quad \text{या} \quad q = CV$$

जहां q संधारित्र की प्लेटों पर आवेश है और V, प्लेटों के बीच का विभवांतर है। उदाहरण 16.1 से, हम जानते हैं कि

$$i_d = i = \frac{dq}{dt} \qquad \text{या} \qquad i_d = C\frac{dV}{dt}$$

इस व्यंजक में समांतर प्लेट संधारित्र की धारिता और विस्थापन धारा के आंकिक मान रखने पर हमें मिलता है :

$$\frac{dV}{dt} = \frac{i_d}{C} = \frac{1.0\,\text{A}}{5.0\text{nF}} = 2.0\times10^8\,\text{Vs}^{-1}$$

2. मैक्सवेल समीकरणों (16.21 से 16.24) में प्रश्न में दिए गए $\vec{\mathbf{E}}$ और $\vec{\mathbf{B}}$ के व्यंजक रखने पर हमें मिलता है :

i) $\vec{\nabla}.\vec{\mathbf{E}} = \vec{\nabla}.(E_0\,\hat{\mathbf{z}}\cos kx\cos ky\cos\omega t) = E_0\dfrac{\partial}{\partial z}\cos kx\cos ky\cos\omega t = 0$

ii) $$\vec{\nabla}\times\vec{\mathbf{E}} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & E_0\cos kx\cos ky\cos\omega t \end{vmatrix}$$

$$= E_0(\hat{\mathbf{x}}\frac{\partial}{\partial y}\cos kx \cos ky \cos\omega t - \hat{\mathbf{y}}\frac{\partial}{\partial x}\cos kx \cos ky \cos\omega t)$$

$$= E_0(-\hat{\mathbf{x}}\, k \cos kx \sin ky \cos\omega t) + \hat{\mathbf{y}}\, k \sin kx \cos ky \cos\omega t)$$

$$\frac{\partial\vec{\mathbf{B}}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}[B_0(\hat{\mathbf{x}}\cos kx \sin ky - \hat{\mathbf{y}}\sin kx \cos ky)\sin\omega t]$$

$$= \omega B_0(\hat{\mathbf{x}}\cos kx \sin ky - \hat{\mathbf{y}}\sin kx \cos ky)\cos\omega t$$

समीकरण (16.22) से

$$-kE_0(\hat{\mathbf{x}}\cos kx \sin ky - \hat{\mathbf{y}}\sin kx \cos ky)\cos\omega t$$

$$= -\omega B_0(\hat{\mathbf{x}}\cos kx \sin ky - \hat{\mathbf{y}}\sin kx \cos ky)\cos\omega t$$

जिससे हमें प्रतिबंध मिलता है :

$$kE_0 = \omega B_0 \qquad \text{या} \qquad \frac{E_0}{B_0} = \frac{\omega}{k} \qquad \text{(i)}$$

iii) $\vec{\nabla}.\vec{\mathbf{B}} = \vec{\nabla}.[B_0(\hat{\mathbf{x}}\cos kx \sin ky - \hat{\mathbf{y}}\sin kx \cos ky)\sin\omega t]$

$$= B_0(\frac{\partial}{\partial x}\cos kx \sin ky - \frac{\partial}{\partial y}\sin kx \cos ky)\sin\omega t$$

$$= B_0(-k\sin kx \sin ky + k\sin kx \sin ky)\sin\omega t = 0$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{\mathbf{B}} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ B_0\cos kx \sin ky \sin\omega t & -B_0\sin kx \cos ky \sin\omega t & 0 \end{vmatrix}$$

या $B_0\hat{\mathbf{z}}\left(-\frac{\partial}{\partial x}\sin kx \cos ky - \frac{\partial}{\partial y}\cos kx \sin ky\right)\sin\omega t$

$$= \frac{E_0}{c^2}\hat{\mathbf{z}}\frac{\partial}{\partial t}(\cos kx \cos ky \cos\omega t)$$

या $-B_0\hat{\mathbf{z}}k(\cos kx \cos ky + \cos kx \cos ky)\sin\omega t$

$$= -\frac{E_0\,\omega}{c^2}\hat{\mathbf{z}}(\cos kx \cos ky \sin\omega t)$$

या $2kB_0 = \frac{E_0\,\omega}{c^2}$

या $B_0 = \frac{E_0}{2c^2}\frac{\omega}{k} = \frac{B_0}{2c^2}\frac{\omega^2}{k^2} \qquad \left(\because \frac{E_0}{B_0} = \frac{\omega}{k}\right)$

अतः, समीकरण (16.24) से हमें मिलता है : $\frac{\omega^2}{k^2} = 2c^2$

या $\frac{\omega}{k} = \sqrt{2}c \Rightarrow \omega = \sqrt{2}ck$ और $E_0 = \frac{\omega}{k}B_0 = \sqrt{2}cB_0$

3. क्योंकि विद्युत्-चुंबकीय तरंग निर्वात में संचरित हो रही है, तरंग से संबद्ध अधिकतम विद्युत् और चुंबकीय क्षेत्रों के बीच का संबंध है $E_0 = cB_0$, जहां c प्रकाश की चाल है। अतः, चुंबकीय क्षेत्र का अधिकतम मान है :

$$B_0 = \frac{E_0}{c} = \frac{600\,\text{V m}^{-1}}{3.0 \times 10^8\,\text{m s}^{-1}} = 2.0 \times 10^{-6}\,\text{T}$$

4. पहले हम परिणामी विद्युत् और चुंबकीय क्षेत्रों के व्यंजक लिखेंगे :

$$\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{E}}_1 + \vec{\mathbf{E}}_2, \quad \vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{B}}_1 + \vec{\mathbf{B}}_2$$

$$\vec{\mathbf{E}} = \hat{\mathbf{z}}E_0 \sin\frac{2\pi}{\lambda}(y - ct) + \hat{\mathbf{z}}E_0 \sin\frac{2\pi}{\lambda}(y + ct)$$

$$= \hat{\mathbf{z}}E_0\left[\sin\frac{2\pi}{\lambda}(y - ct) + \sin\frac{2\pi}{\lambda}(y + ct)\right]$$

$$= 2\hat{\mathbf{z}}E_0 \sin\frac{2\pi y}{\lambda}\cos\frac{2\pi ct}{\lambda} \quad \left[\because \sin A + \sin B = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}\right]$$

$$\vec{\mathbf{B}} = \hat{\mathbf{x}}B_0 \sin\frac{2\pi}{\lambda}(y - ct) - \hat{\mathbf{x}}B_0 \sin\frac{2\pi}{\lambda}(y + ct) = -2\hat{\mathbf{x}}B_0\cos\frac{2\pi y}{\lambda}\sin\frac{2\pi ct}{\lambda}$$

$$\left[\because \sin A - \sin B = 2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}\right]$$

अब हमें सिद्ध करना है कि क्षेत्र $\vec{\mathbf{E}}$ और $\vec{\mathbf{B}}$ निर्वात में मैक्सवेल समीकरणों को संतुष्ट करते हैं :

i) $\vec{\nabla}.\vec{\mathbf{E}} = 2E_0\frac{\partial}{\partial z}\left(\sin\frac{2\pi y}{\lambda}\cos\frac{2\pi ct}{\lambda}\right) = 0$

ii) $\vec{\nabla}\times\vec{\mathbf{E}} = \hat{\mathbf{x}}2E_0\left(\frac{\partial}{\partial y}\sin\frac{2\pi y}{\lambda}\cos\frac{2\pi ct}{\lambda}\right) = \hat{\mathbf{x}}2E_0\frac{2\pi}{\lambda}\cos\frac{2\pi y}{\lambda}\cos\frac{2\pi ct}{\lambda}$

$$\frac{\partial\vec{\mathbf{B}}}{\partial t} = -2\hat{\mathbf{x}}B_0\left(\frac{\partial}{\partial t}\cos\frac{2\pi y}{\lambda}\sin\frac{2\pi ct}{\lambda}\right) = -2\hat{\mathbf{x}}B_0\frac{2\pi c}{\lambda}\cos\frac{2\pi y}{\lambda}\cos\frac{2\pi ct}{\lambda}$$

समीकरण (16.22) से

$$\hat{\mathbf{x}}2E_0\frac{2\pi}{\lambda}\cos\frac{2\pi y}{\lambda}\cos\frac{2\pi ct}{\lambda} = \hat{\mathbf{x}}2B_0\frac{2\pi c}{\lambda}\cos\frac{2\pi y}{\lambda}\cos\frac{2\pi ct}{\lambda}$$

या $E_0 = B_0 c$ (i)

iii) $\vec{\nabla}.\vec{\mathbf{B}} = -2B_0\frac{\partial}{\partial x}\left(\cos\frac{2\pi y}{\lambda}\sin\frac{2\pi ct}{\lambda}\right) = 0$

iv) $\vec{\nabla}\times\vec{\mathbf{B}} = 2B_0\hat{\mathbf{z}}\left(\frac{\partial}{\partial y}\cos\frac{2\pi y}{\lambda}\sin\frac{2\pi ct}{\lambda}\right) = -\hat{\mathbf{z}}2B_0\frac{2\pi}{\lambda}\sin\frac{2\pi y}{\lambda}\sin\frac{2\pi ct}{\lambda}$

और $$\frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t} = -2\hat{\mathbf{z}} E_0 \frac{2\pi c}{\lambda} \sin\frac{2\pi y}{\lambda} \sin\frac{2\pi ct}{\lambda}$$

समीकरण (16.24) से

$$-\hat{\mathbf{z}}\, 2B_0 \frac{2\pi}{\lambda} \sin\frac{2\pi y}{\lambda} \sin\frac{2\pi ct}{\lambda} = -\frac{1}{c^2} 2\hat{\mathbf{z}} E_0 \frac{2\pi c}{\lambda} \sin\frac{2\pi y}{\lambda} \sin\frac{2\pi ct}{\lambda}$$

या $$E_0 = B_0 c$$

अतः, क्षेत्र $\vec{\mathbf{E}}$ और $\vec{\mathbf{B}}$ निर्वात में मैक्सवेल समीकरणों को संतुष्ट करते हैं यदि $E_0 = B_0 c$ ।

5. हम विद्युत्-क्षेत्र सदिश को इस तरह लिख सकते हैं :

$$\vec{\mathbf{E}} = \hat{\mathbf{z}}(3.0\ \mathrm{Vm}^{-1})\sin(x - 10^8 t)$$

चुंबकीय क्षेत्र का परिमाण $E_0 = B_0 c$ से मिलता है जहां $E_0 = 3.0\ \mathrm{Vm}^{-1}$

अतः, $$B_0 = \frac{E_0}{c} = \frac{3.0\,\mathrm{Vm}^{-1}}{3.0 \times 10^8\,\mathrm{ms}^{-1}} = 1.0 \times 10^{-8}\ \mathrm{T}$$

और $$|\vec{\mathbf{B}}| = (1.0 \times 10^{-8}\ \mathrm{T})\sin(x - 10^8 t)$$