चिकित्सा संबंधी जांच के लिए मानव शरीर का उच्च कोटि का फ़ोटो प्राप्त करने के लिए एम.आर.आई (MRI) मशीन में उच्च मान (0.2 से 0.3 टेस्ला) का चुंबकीय क्षेत्र प्रयुक्त होता है। आप इस इकाई में चुंबकीय क्षेत्र परिकलित करने के लिए ऐम्पियर नियम सीखेंगे। (चित्र का स्रोत : विकिमीडिया कॉमन्स)

इकाई 13

ऐम्पियर नियम और उसके अनुप्रयोग

इकाई की रूपरेखा

अध्ययन निर्देशिका

वर्तमान इकाई, चुंबकीय क्षेत्र संबंधी पिछली इकाई के क्रम में है। आपने पिछली इकाई में ध्यान दिया होगा कि हमारी चर्चा चुंबकीय क्षेत्र पर थी, जिसमें हमने स्थैतिक आवेशों के कारण विद्युत-क्षेत्र का संदर्भ दिया था। हम अपरिवर्ती धारा के कारण चुंबकीय क्षेत्र की गणना करने के लिए नियमों और विधियों को ढूढ़ रहे हैं जो विद्युत्-क्षेत्रों की गणना के नियमों और विधियों के समान हैं। इस इकाई में बतायी गई संकल्पनाओं को बेहतर समझने के लिए आपको स्थिर विद्युतिकी (खंड 2) के संबंधित इकाई/ भाग को पढ़ना चाहिए। आपको डाइवर्जेंस और सदिश कर्ल की संकल्पनाओं, जिन्हें आपने खंड 1 में पढ़ा है, को भी दोहरा लेना चाहिए। इन संकल्पनाओं का उपयोग इस इकाई में चुंबकीय सदिश विभव को परिभाषित करने में किया गया है। चुंबकीय सदिश विभव, विद्युत्-विभव जैसी ही एक अवधारणा है। आप इस इकाई में प्राप्त किए गए गणितीय सूत्र के भौतिक महत्व पर भी ध्यान दें। बोध प्रश्नों और अंत में दिए गए प्रश्नों को हल करें, जो आपको चुंबकीय क्षेत्र का मान परिकलित करने और अपरिवर्ती धारा विन्यास के कारण इसकी दिशा निर्धारित करने में भी सहायक होंगे।

"ऐम्पियर का विद्युत् के क्षेत्र में वही स्थान है जो यांत्रिकी के क्षेत्र में न्यूटन का है।"

जेम्स सी. मैक्सवेल

13.1 परिचय

पिछली इकाई में, आपने पढ़ा है कि कैसे अपरिवर्ती धारा के कारण चुंबकीय क्षेत्र उत्पन्न होता है। आपने यह सीखा है कि बायो-सावर्ट नियम का उपयोग करके कैसे दी गई धारा वितरण के लिए चुंबकीय क्षेत्र का परिकलन किया जाता है। बायो-सावर्ट नियम चुंबकीय क्षेत्र के लिए वही कार्य करता है जो कि कूलॉम नियम स्थैतिक आवेश वितरण के कारण विद्युत्-क्षेत्र के परिकलन के लिए करता है। ये दोनों नियम यह प्रदर्शित करते हैं कि विद्युत्-क्षेत्र और चुंबकीय क्षेत्र व्युत्क्रम वर्ग निर्भरता का पालन करते हैं। आपने यह भी पढ़ा है कि चुंबकीय क्षेत्र का डाइवर्जेंस शून्य होता है; अर्थात्, यह परिनालिकीय है। भौतिकतः, चुंबकीय क्षेत्र का शून्य डाइवर्जेंस यह बताता है कि मुक्त चुंबकीय आवेश या ध्रुव का अस्तित्व नहीं होता। दूसरे शब्दों में, इसका अर्थ यह है कि चुंबकीय क्षेत्र के संदर्भ में वैसा कोई स्रोत नहीं होता जैसा विद्युत्-क्षेत्र के संदर्भ में विद्युत् आवेश होते हैं।

इस इकाई में, हम चुंबकीय क्षेत्र पर चर्चा जारी रखेंगे। यहां हमारा प्रयास एक चुंबकीय क्षेत्र द्वारा पालन की जाने वाली अवधारणाओं और नियमों की व्याख्या करना है जिससे कि हम विभिन्न धारा वितरणों के लिए इसके मान ज्ञात कर सकें। ऐसा करने में, हम हमेशा विभिन्न आवेश वितरणों के कारण विद्युत्-क्षेत्र के गणना प्रक्रम के साथ चुंबकीय क्षेत्र के गणना प्रक्रम में का अनुरूपता देखेंगे। इसलिए, अब हमें जो प्रश्न पूछना चाहिए, वह है : क्या हमारे पास चुंबकीय क्षेत्र के लिए कोई ऐसा नियम है जो विद्युत्-क्षेत्र के लिए गाउस नियम के अनुरूप हो? इसका उत्तर है हां, हमारे पास ऐम्पियर नियम है, जिसकी हम भाग 13.2 में चर्चा करेंगे। यह हमें सममित धारा वितरण के कारण उत्पन्न चुंबकीय क्षेत्र की गणना करने में सक्षम बनाता है वैसे ही जैसे कि गाउस नियम हमें सममित आवेश वितरण से उत्पन्न विद्युत्-क्षेत्र की गणना करने में सक्षम बनाता है। भाग 13.3 में आप सीखेंगे कि कैसे ऐम्पियर नियम को एक लंबे, सीधे धारावाही तार, परिनालिका और एक टोरॉइड से उत्पन्न चुंबकीय क्षेत्र का परिकलन करने के लिए लागू किया जाता है। भाग 13.4 में आप ऐम्पियर नियम का अवकल रूप प्राप्त करना सीखेंगे। आप यह भी जानेंगे कि ऐम्पियर नियम का अवकल रूप, जो कर्ल $\vec{\mathbf{B}}$ के रूप में व्यक्त होता है, किस प्रकार हमें चुंबकीय सदिश विभव को परिभाषित करने में सहायक होता है। चुंबकीय सदिश विभव उसी प्रकार से चुंबकीय क्षेत्र के परिकलन को सरल बनाता है जिस प्रकार विद्युत्-विभव, विद्युत्-क्षेत्र के परिकलन को सरल बनाता है। चूंकि, चुंबकीय सदिश विभव एक सदिश राशि है, इसलिए इसका परिकलन उतना सरल नहीं है जितना कि विद्युत्-विभव का परिकलन।

अगली इकाई में, आप पदार्थ के चुंबकीय गुणों का अध्ययन करेंगे और सीखेंगे कि चुंबकीय पदार्थों को मोटे तौर पर तीन श्रेणियों में वर्गीकृत किया जा सकता है : प्रतिचुंबकीय, अनुचुंबकीय और लोह-चुंबकीय।

उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप :

- ऐम्पियर नियम का कथन दें सकेंगे और की व्याख्या कर सकेंगे;
- ऐम्पियर नियम का उपयोग कर सरल ज्यामिति वाले अपरिवर्ती धारा वितरणों जैसेकि लंबे सीधे तार, परिनालिका और टोरॉइड के कारण उत्पन्न चुंबकीय क्षेत्र परिकलित कर सकेंगे;
- ऐम्पियर नियम का अवकल रूप प्राप्त कर पायेंगे;
- चुंबकीय सदिश विभव को परिभाषित कर सकेंगे; और
- चुंबकीय क्षेत्र द्वारा एक धारा लूप पर लगने वाले बल आघूर्ण का व्यजंक प्राप्त कर सकेंगे।

13.2 ऐम्पियर नियम

इस पाठ्यक्रम के खंड 2 के इकाई 5 में स्थिर विद्युतिकी का अध्ययन करते हुए हमने कूलॉम नियम का उपयोग यादृच्छिक आवेश वितरण के कारण उत्पन्न विद्युत्-क्षेत्र को परिकलित करने के लिए किया था। खंड 2 के इकाई 6 और 7 में, आपने गाउस नियम का उपयोग उच्च सममिति वाले आवेश वितरणों के कारण उत्पन्न विद्युत्-क्षेत्रों से संबंधित प्रश्नों को सरलता से हल करने में किया था।

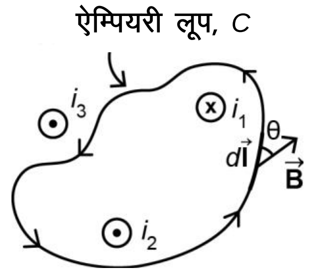
चुंबकत्व में भी इसी प्रकार की स्थिति है। इकाई 12 में, आपने पढ़ा है कि बायो-सावर्ट नियम का उपयोग किसी भी धारा वितरण से उत्पन्न चुंबकीय क्षेत्र का परिकलन करने के लिए कर सकते हैं। अब प्रश्न यह है कि क्या हम स्थिर विद्युतिकी के लिए गाउस नियम के अनुरूप एक नियम प्रतिपादित कर सकते हैं जिसकी सहायता से उतनी ही सरलता और परिशुद्धता से चुंबकीय क्षेत्र परिकलित कर सकें? आप जानते है कि विद्युत्-क्षेत्र के लिए गाउस नियम किसी पृष्ठ से परिबद्ध आवेश की मात्रा और उस पृष्ठ से गुज़रने वाले वैद्युत अभिवाह को संबंधित करता है। क्या इससे मिलती जुलती कोई संकल्पना या नियम ऐसा है जो कि धारा से उत्पन्न चुंबकीय क्षेत्र को निर्धारित करने में उपयोगी सिद्ध होता हो? हां, ऐसा एक नियम है जिसे ऐम्पियर नियम कहते हैं।

ऐम्पियर नियम के अनुसार, **एक सीधे अपरिवर्ती धारावाही चालक को परिबद्ध करने वाले बंद लूप के अनुदिश चुंबकीय क्षेत्र का रेखा समाकल, उसी लूप द्वारा परिबद्ध धारा** i **के समानुपाती होता है और इसका मान** $\mu_0 i$ **होता है।**

गणितीय रूप में ऐम्पियर नियम इस प्रकार है :

$$\oint \vec{\mathbf{B}}.d\vec{\mathbf{l}} = \mu_0 i \tag{13.1}$$

ऐम्पियर नियम किसी भी प्रकार की धारा और किसी भी बंद लूप के लिए सत्य होता है, बशर्तें परिबद्ध धारा अपरिवर्ती (धारा, जिसके मान में समय के साथ परिवर्तन नहीं हो रहा हो) हो। यदि धारा केवल एक तार में प्रवाहित न होकर अनेक तारों में प्रवाहित हो रही हो तो लूप द्वारा परिबद्ध नेट धारा प्राप्त करने के लिए हम सभी धाराओं का बीजीय योग लेते हैं। यदि धाराएं विपरीत दिशाओं में प्रवाहित हो रही हो तो धारा की विपरीत दिशाओं के लिए हम विपरीत चिन्ह लेते हैं। धाराओं का **बीजीय योग** ही लूप द्वारा परिबद्ध नेट धारा के मान के बराबर होता है जो लूप के अनुदिश $\vec{\mathbf{B}}$ का रेखा समाकल निर्धारित करता है। वह लूप जिसे हम रेखा समाकल के निर्धारण के लिए मान रहे हैं, **ऐम्पियरी लूप** कहलाता है।



चित्र 13.1: ऐम्पियरी लूप दो सीधे तारों को परिबद्ध करता है पर तीसरे तार को परिबद्ध नहीं करता। धाराओं की दिशाओं पर ध्यान दें।

आइए, बंद लूप – ऐम्पियरी लूप– के चारों ओर चुंबकीय क्षेत्र के कारण $\vec{\mathbf{B}}$ के रेखा समाकल और नेट धारा के अर्थ को एकउदाहरण से समझते हैं। चित्र 13.1 में उन तीन लंबे सीधे तारों के अनुप्रस्थ परिच्छेद दिखाए गए हैं जो कागज के तल पर लंबवत् हैं। मान लें कि तारों में धाराऐं i_1, i_2 और i_3 प्रवाहित हो रही हैं। धारा i_1 की दिशा पृष्ठ के तल में अंदर की और i_2 और i_3 की दिशाएं बाहर की ओर हैं। बंद व्रक C एक स्वेच्छ ऐम्पियरी लूप है जो धारा i_1 और i_2 को परिबद्ध करता है लेकिन वह तीसरी धारा i_3 को परिबद्ध नहीं करता।

आइए, ऐम्पियरी लूप में वामावर्त दिशा के अनुदिश अदिश गुणनफल $\vec{\mathbf{B}}.d\vec{\mathbf{l}}$ और उसके समाकल का निर्धारण करते है। इसके लिए, हम लूप को बहुत सारे सदिश अवयवों

$d\vec{\mathbf{l}}$ में विभाजित करते है। प्रत्येक सदिश अवयव $d\vec{\mathbf{l}}$ लूप की स्पर्शरेखा के अनुदिश समाकल की दिशा में होता है। अब, मान लें कि $\vec{\mathbf{B}}$ नेट चुंबकीय क्षेत्र तीन धाराओं के कारण। सदिश अवयव $d\vec{\mathbf{l}}$ के साथ कोण θ बनाता है जैसाकि चित्र 13.1 में दिखाया गया है। अतः, हम लिख सकते हैं : $\vec{\mathbf{B}}.d\vec{\mathbf{l}} = Bdl\cos\theta$ । तब, समीकरण (13.1) को इस रूप में लिखा जा सकता है :

$$\oint \vec{\mathbf{B}}.d\vec{\mathbf{l}} = \oint Bdl\cos\theta = \mu_0 i_{\text{परिबद्ध}} \qquad (13.2)$$

दी गई व्यवस्था के लिए परिबद्ध नेट धारा, $i_{\text{परिबद्ध}}$, का निर्धारण करने के लिए, हमें प्रत्येक धारा i_1, i_2 और i_3 का धनात्मक या ऋणात्मक चिन्ह निर्दिष्ट करने की आवश्यकता होती है। धारा का चिन्ह निर्दिष्ट करने के लिए हम दक्षिणहस्त नियम का उपयोग करते हैं। इसके लिए समाकलन की दिशा के अनुदिश अपने दाहिने हाथ की अंगुलियों को ऐम्पियरी लूप के चारों ओर घुमाएं; तब आपके अंगूठे की दिशा में धारा का चिन्ह धनात्मक और विपरीत दिशा में धारा का चिन्ह ऋणात्मक निर्दिष्ट किया जाता है।

इसीलिए, उपरोक्त परिपाटी के अनुसार, चित्र 13.1 में हम धारा i_1 का चिन्ह ऋणात्मक और धारा i_2 का चिन्ह धनात्मक निर्दिष्ट करते हैं। हमने धारा i_3 पर कोई विचार नहीं किया क्योंकि वह ऐम्पियरी लूप में परिबद्ध नहीं है। अतः, हम चित्र 13.1 में ऐम्पियरी लूप द्वारा परिबद्ध नेट धारा को निम्नवत लिखते हैं :

$$i_{\text{परिबद्ध}} = i_2 - i_1$$

अतः, समीकरण (13.2) को हम निम्नवत् लिख सकते हैं :

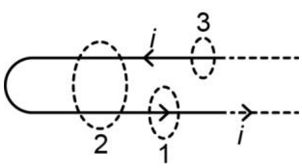
$$\oint \vec{\mathbf{B}}.d\vec{\mathbf{l}} = \oint Bdl\cos\theta = \mu_0 (i_2 - i_1) \qquad (13.3)$$

आप पूछ सकते हैं कि हमने धारा i_3 को समीकरण (13.3) के दाहिनी ओर क्यों नहीं लिया जबकि वास्तविकता यह है कि उसने समीकरण के बायीं ओर B के परिमाण में अपना योगदान दिया है। वास्तव में, B में धारा i_3 का योगदान शून्य है। ऐसा इसलिए है क्योंकि जब हम संपूर्ण लूप का समाकलन लेते हैं तो लूप के प्रत्येक धारा अवयव $d\vec{\mathbf{l}}$ का B में योगदान, इस अवयव के विपरीत दिशा में लूप पर स्थित एक अन्य सदिश अवयव $d\vec{\mathbf{l}}$ के विपरीत दिशा में योगदान के कारण रद्द हो जाता है।

ऐम्पियर नियम की अपनी समझ पुख्ता करने के लिए आप एक बोध प्रश्न हल करें।

बोध प्रश्न 1 – ऐम्पियर नियम और ऐम्पियरी लूप

चित्र 13.2 में दिखाए गए तीन लूपों के लिए गुणात्मक रूप से ऐम्पियर नियम को लागू करें।



चित्र 13.2: बोध प्रश्न 1 के लिए चित्र।

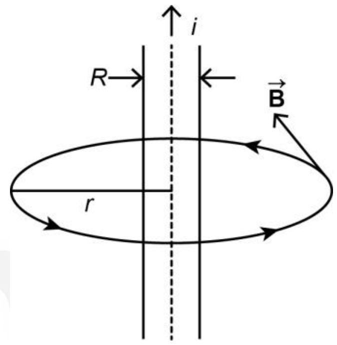
उपरोक्त चर्चा से आपने महसूस किया होगा कि ऐम्पियर नियम अपरिवर्ती धाराओं के कारण $\vec{\mathbf{B}}$ को निर्धारित करने के लिए एक आसान तरीका प्रदान करता है। हमें केवल ऐम्पियरी लूप द्वारा परिबद्ध नेट धारा का मान जानना है और समीकरण (13.1) या (13.3) के बायीं ओर के रेखा समाकल को परिकलित करना है। लेकिन, $\vec{\mathbf{B}}$ का समाकल कैसे परिकलित करें। आइए, पता लगाते हैं।

इस पाठ्यक्रम के खंड 2 की इकाइयों 6 और 7 में आपने सीखा है कि गाउस नियम का उपयोग करके विभिन्न प्रकार के सममित किया जाता है। ऐम्पियर नियम स्थिर चुंबकिकी में भूमिका निभाता है जो गाउस नियम स्थिर विद्युतिकी में निभाता है। हम ऐम्पियर नियम का उपयोग कर अपरिवर्ती धारा वितरणों के कारण उत्पन्न चुंबकीय क्षेत्र को ज्ञात करने के लिए उपयुक्त ऐम्पियरी लूप का चयन करते हैं।

आइए, अब इसे समझने की कोशिश करें।

13.3 ऐम्पियर नियम के अनुप्रयोग

निम्नलिखित चर्चा में आप पढ़ेंगे कि ऐम्पियर नियम का उपयोग सममित धारा वितरणों के कारण उत्पन्न चुंबकीय क्षेत्रों को ज्ञात करने में कैसे किया जा सकता है। जैसाकि आप देखेंगे, इस उद्देश्य के लिए चुंबकीय क्षेत्र में उपयुक्त ऐम्पियरी लूप बनाना होगा जिस पर रेखा समाकल $\oint \vec{\mathbf{B}}.d\vec{\mathbf{l}}$ [समीकरण (13.1) देखें] परिकलित करना होगा। आइए, अब कुछ उदाहरण लेकर इस संकल्पना को अच्छी तरह से समझने की कोशिश करें।

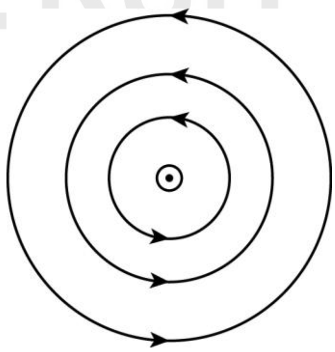


चित्र 13.3: सीधे धारावाही तार के कारण उत्पन्न चुंबकीय क्षेत्र।

13.3.1 लंब, सीधे तार के कारण चुंबकीय क्षेत्र

चित्र 13.3 में दिखाया गया है कि एक लंबे सीधे तार, जिसकी त्रिज्या R है, में धारा i प्रवाहित हो रही है। तार में अपरिवर्ती धारा के कारण चुंबकीय क्षेत्र उत्पन्न होता है। आप जानते हैं कि चुंबकीय क्षेत्र रेखाएं बंद लूप होती हैं। अतः, इस स्थिति में चुंबकीय क्षेत्र रेखाएं तार के साथ संकेन्द्री वृत्त हो सकती हैं जैसाकि चित्र 13.4 में दिखाया गया है। दक्षिणहस्त नियम के अनुसार, चुंबकीय क्षेत्र $\vec{\mathbf{B}}$ की दिशा दी गई धारा i की दिशा के लिए वामावर्त है जैसा कि चित्र 13.3 में दिखाया गया है।

अब हम ऐम्पियर नियम की सहायता से त्रिज्या R वाले लंबे सीधे तार के अक्ष से दूरी r ($r >> R$) पर $\vec{\mathbf{B}}$ का परिमाण ज्ञात करेंगे। यहां हमने यह मान लिया है कि तार की लंबाई की तुलना में r का मान बहुत कम है।



चित्र 13.4: लंबे धारावाही तार के कारण चुंबकीय क्षेत्र रेखाएं। धारा की दिशा पृष्ठ से बाहर की ओर है।

ऐम्पियर नियम [समीकरण (13.1)] में रेखा समाकल का मान परिकलित करने के लिए हमें एक ऐम्पियरी लूप बनाना होगा। ऐसा करने के लिए हम इकाई 12 के समीकरण (12.46) से नोट करते हैं कि अनंत लंबाई वाले धारावाही तार के कारण उत्पन्न चुंबकीय क्षेत्र का उन सभी बिंदुओं पर समान परिमाण होगा जो तार से दूरी r पर हैं। इसका अर्थ यह है कि तार के परितः $\vec{\mathbf{B}}$ में बेलनी सममिति है। अतः, हम त्रिज्या r वाले वृत्त के रूप में एक ऐम्पियरी लूप को लेकर बेलनी सममिति का लाभ ले सकते हैं। इससे यह सुनिश्चित होता है कि समीकरण (13.1) के रेखा समाकल में $\vec{\mathbf{B}}$ का परिमाण अचर है और इसीलिए इसे समाकल चिन्ह से बाहर निकाला जा सकता है।

चित्र 13.3 से हम यह भी नोट करते हैं कि $\vec{\mathbf{B}}$, ऐम्पियरी लूप के प्रत्येक बिंदु के स्पर्शी है और जैसाकि हम जानते हैं, लूप का प्रत्येक सदिश अवयव $d\vec{\mathbf{l}}$ भी ऐम्पियरी लूप के स्पर्शी होता है। इसीलिए $\vec{\mathbf{B}}$ और $d\vec{\mathbf{l}}$ या तो एक दूसरे के समांतर हैं या प्रतिसमांतर। यदि हम $\vec{\mathbf{B}}$ और $d\vec{\mathbf{l}}$ को समांतर मानें, तब $\theta = 0$ और इस तरह
$\vec{\mathbf{B}}.d\vec{\mathbf{l}} = Bdl\cos\theta = Bdl$ ।

उपरोक्त चर्चा के आधार पर हम समीकरण (13.1) के वाम पक्ष को एक लंबे, सीधे धारावाही तार के लिए निम्नवत् लिख सकते हैं :

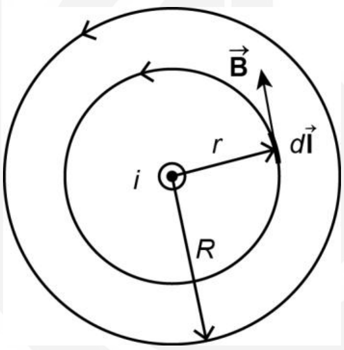
$$\oint \vec{\mathbf{B}}.d\vec{\mathbf{l}} = \oint Bdl = B\oint dl = B.2\pi r$$

अतः, समीकरण (13.1) से हम लिख सकते हैं :

$$B.2\pi r = \mu_0 i$$

या
$$\boxed{B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}} \qquad (13.4)$$

ऐम्पियर नियम की चर्चा के इस पड़ाव पर आपको एक पल के लिए रुक कर अपने आप से पूछना चाहिए : धारावाही तार के कारण $\vec{\mathbf{B}}$ का मान निर्धारित करने के लिए ऐम्पियर नियम का उपयोग करने का क्या फायदा है? हम $\vec{\mathbf{B}}$ के मान का निर्धारण बायो-सावर्ट नियम का उपयोग करके भी कर सकते है जिसकी चर्चा इकाई 12 में की गई है। ऐम्पियर नियम का उपयोग करने का लाभ यह है कि $\vec{\mathbf{B}}$ को बड़ी सरलता से निर्धारित किया जा सकता है। आपको बस एक उपयुक्त ऐम्पियरी लूप चुनने की आवश्यकता होती है। यह लाभ आगे और स्पष्ट होगा जब हम धारावाही परिनालिका के लिए $\vec{\mathbf{B}}$ की गणना करेंगे। लेकिन इससे पहले आप एक उदाहरण को समझें।



चित्र 13.5: उदाहरण 13.1 के लिए चित्र।

उदाहरण 13.1 : लंबे सीधे तार के कारण चुंबकीय क्षेत्र

त्रिज्या r वाले एक लंबे बेलनाकार तार में एक अपरिवर्ती धारा प्रवाहित होती है जो इसके अनुप्रस्थ परिच्छेद क्षेत्र पर एकसमान रूप से वितरित है। तार के अक्ष से दूरी $r\ (< R)$ पर चुंबकीय क्षेत्र परिकलित करें।

हल ■ पहले हम यह नोट करते हैं कि दूरी $r < R$ पर स्थित बिंदु तार के अंदर है (चित्र 13.5)। फिर भी, इस स्थिति में धारावाही तार के आस-पास चुंबकीय क्षेत्र की बेलनाकार सममिति के कारण त्रिज्या r वाले वृत्ताकार पथ, जिसका केन्द्र तार के अक्ष पर है, पर स्थित सभी बिंदुओं पर $\vec{\mathbf{B}}$ का परिमाण अचर होगा। इस वृत्त के प्रत्येक बिंदु पर $\vec{\mathbf{B}}$ की दिशा उस बिंदु पर वृत्त की स्पर्शरेखा के अनुदिश होती है।

ऐम्पियर नियम [समीकरण (13.1)] रेखा समाकल के लिए हम इस त्रिज्या r वाले वृत्त को समाकलन पथ मानते है। अतः, हम लिख सकते हैं :

$$\oint \vec{\mathbf{B}}.d\vec{\mathbf{l}} = B.2\pi r \qquad \text{(i)}$$

अब प्रश्न यह है कि ऐम्पियरी लूप – समाकलन पथ-से परिबद्ध तार के अनुप्रस्थ परिच्छेद से जो धारा प्रवाहित हो रही है उसका परिमाण क्या है। इस पथ से परिबद्ध धारा का मान i के बराबर हीं होता जो तार से प्रवाहित हो रही है बल्कि धारा का वह भाग होता है जो क्षेत्रफल πr^2 वाले अनुप्रस्थ परिच्छेद से प्रवाहित हो रहा होता है। अतः,

ऐम्पियरी लूप से परिबद्ध धारा = $\pi r^2 \times$ प्रति इकाई अनुप्रस्थ परिच्छेद क्षेत्रफल में धारा का मान

$$= \pi r^2 \times \frac{i}{\pi R^2} = i\,\frac{r^2}{R^2} \qquad \text{(ii)}$$

समीकरणों (i) और (ii) से हम लिख सकते हैं :

$$B 2\pi r = \mu_0 \frac{i r^2}{R^2} \Rightarrow B = \frac{\mu_0 i}{2\pi R^2} r \qquad (13.5)$$

अब आप एक बोध प्रश्न हल करें।

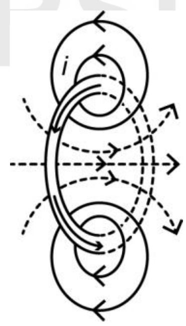
बोध प्रश्न 2 – तार से दूरी के साथ चुंबकीय क्षेत्र का विचरण

बाहर की ओर कुछ दूरी पर त्रिज्या R वाले तार के अक्ष से दूरी r ($r > R$) के फलन के रूप में B को आरेखित करें।

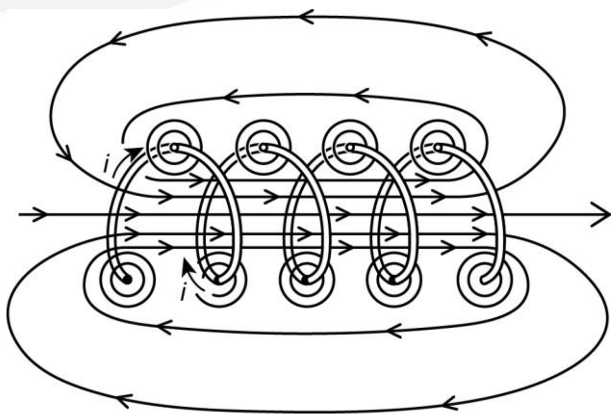
इकाई 11 में आपने सीखा है कि एक संधारित्र की दो आवेशित चालक प्लेटों के बीच हम एकसमान विद्युत्-क्षेत्र उत्पन्न कर सकते हैं। आप जानना चाहेंगे कि क्या इसी प्रकार की कोई अन्य युक्ति है जो एकसमान चुंबकीय क्षेत्र उत्पन्न कर सके। हां, ऐसी एक युक्ति परिनालिका है। आइए, अब चर्चा करें कि यह परिनालिका किस प्रकार एकसमान चुंबकीय क्षेत्र उत्पन्न करती है और ऐम्पियर नियम का उपयोग करके इसके द्वारा उत्पन्न चुंबकीय क्षेत्र की गणना करें।

13.3.2 परिनालिका के कारण चुंबकीय क्षेत्र

आप जानते है कि जब एक वृत्तीय लूप में धारा प्रवाहित होती है तब हम उसके कारण उत्पन्न चुंबकीय क्षेत्र की दिशा का निर्धारण दक्षिणहस्त नियम के आधार पर करते हैं (चित्र 13.6)। चित्र 13.6 में आप देख सकते हैं कि चुंबकीय क्षेत्र-रेखाएं तार को घेरे हुए हैं। **परिनालिका को ऐसा समझा जा सकता है कि जैसे धारावाही तार के बहुत सारे फेरे (turns) एक दूसरे से सटाकर लपेटे गए हों।**



चित्र 13.6: लूप में धारा से उत्पन्न चुंबकीय क्षेत्र रेखाएं।

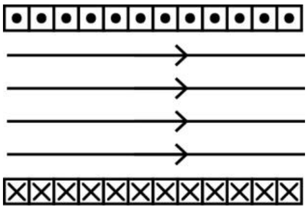


चित्र 13.7: ढीली तरह से लिपटी हुई चार घेरों वाली तार की कुंडली। तार में प्रवाहित धारा के कारण उत्पन्न चुंबकीय क्षेत्र कुंडली के भीतर प्रबलतम होता है। चुंबकीय क्षेत्र को केवल पृष्ठ के तल पर दिखाया गया है।

चित्र 13.7 में चार फेरों वाली परिनालिका दिखाई गई है। सामान्य परिनालिका की तुलना में यहां फेरे ढीले लपेटे गए हैं। अब आप पूछ सकते हैं : कि धारावाही परिनालिका के कारण उत्पन्न $\vec{B}$ की दिशा क्या है? ध्यान दें कि तार के किसी भी भाग

के समीप चुंबकीय क्षेत्र तार को चारों ओर से घेरे हुए होती है। हमने इन क्षेत्र-रेखाओं को कुंडली के ऊपरी और निचले सिरे पर दिखाया है जहां तार के तल पर लंबवत् है। लेकिन, जैसे ही हम कुंडली के अंदर के तार से दूर जाते हैं तार के ऊपरी और निचले सिरे के अवयवों के चुंबकीय क्षेत्रों का एक घटक दायीं ओर होता है। अतः, इनकी प्रवृत्ति एक दूसरे को प्रबल करने की होती है। **किसी भी स्थान पर नेट चुंबकीय क्षेत्र, लूप के अलग-अलग भागों के कारण उत्पन्न क्षेत्रों का सदिश योग होता है।**

अब प्रश्न उठता है कि परिनालिका के बाहर $\vec{B}$ की दिशा क्या होगी। कुंडली के ऊपरी सिरे के ऊपर, ऊपरी सिरे के अंशों से उत्पन्न क्षेत्रों की दिशा बायीं ओर है जबकि निचले सिरे के अंशों से उत्पन्न क्षेत्रों की दिशा दायीं ओर है जिस कारण नेट क्षेत्र दुर्बल होता है। इसी प्रकार कुंडली के निचले सिरे के नीचे भी चुंबकीय क्षेत्र दुर्बल होता है। अतः, परिनालिका के भीतर नेट क्षेत्र प्रबल होता है तथा दायीं ओर होता है और परिनालिका के बाहर यह दुर्बल होता है तथा बायीं और होता है। जैसा कि चित्र 13.7 में दिखाया गया है।

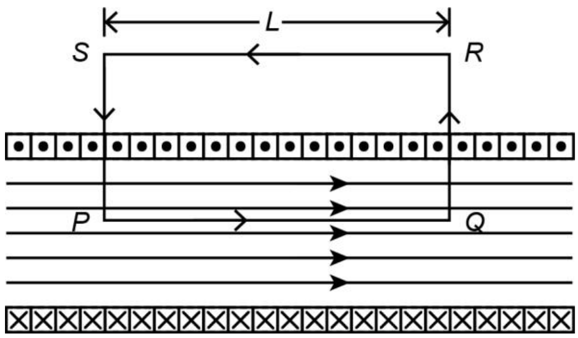


चित्र 13.8: एक लंबी कसकर लपेटी परिनालिका का एक लंबा केंद्रीय भाग।

मान लें कि कुंडली को कसकर लपेट कर बनाया गया है और व्यास की तुलना में इसकी लंबाई अधिक है जैसाकि चित्र 13.8 में दिखाया गया है। ऐसी स्थिति में परिनालिका की कुंडली के भीतर चुंबकीय क्षेत्र अभी भी प्रबल होता है और जैसे-जैसे फेरे एक दूसरे के निकट आते जाते है; क्षेत्र में जो भी अनियमितताएं होती हैं, वे समाप्त हो जाती हैं और परिनालिका के भीतर सीधी क्षेत्र रेखाएं प्राप्त होती है।

अब प्रश्न उठता है कि परिनालिका के बाहर क्षेत्र रेखाएं कैसी होती हैं। चूंकि क्षेत्र रेखाओं का न तो आदि होता है और न ही अंत, है इसीलिए बाह्य क्षेत्र रेखाएं परिनालिका की दायीं ओर से निकल रही क्षेत्र रेखाओं को बायीं ओर को प्रवेश कर रही क्षेत्र रेखाओं के साथ जोड़ देती है। परिनालिका के अक्ष के निकट की क्षेत्र रेखाएं काफ़ी धीरे-धीरे झुकती जाती हैं और दूसरे सिरे पर लौटने से पहले परिनालिका से दूर फैल जाती हैं।

अब ऐम्पियर नियम की सहायता से परिनालिका के भीतर $\vec{B}$ का परिमाण ज्ञात करने के लिए हमें दो बातों की ओर ध्यान देना होता है। पहला, चुंबकीय क्षेत्र की दिशा कसकर लपेटी गई लंबी परिनालिका के अक्ष के अनुदिश होती है। दूसरे शब्दों में व्यास की तुलना में परिनालिका की लंबाई बहुत अधिक है। दूसरा, परिनालिका की लंबाई अधिक है तो उसके सिरे से निकल रही क्षेत्र रेखाएं दूसरे सिरे में प्रवेश करने से पहले काफ़ी फैल जाती है। दूसरी बात से यह पता चलता है कि परिनालिका के बाहर का चुंबकीय क्षेत्र भीतर के चुंबकीय क्षेत्र की तुलना में काफ़ी दुर्बल होता है। अतः, हम परिनालिका के बाहर चुंबकीय क्षेत्र का मान उपेक्षणीय मान लेते हैं।



चित्र 13.9: एक लंबी परिनालिका जिसमें जो आयताकार ऐम्पियरी लूप *PQRS* दिखाया गया है।

हमें विचार करना है कि ऐम्पियरी लूप, यानी समाकलन पथ का आकार कैसा हो जिससे समीकरण (13.1) में दिए गए रेखा समाकल में B का मान निर्धारित करना आसान हो। यदि हम एक आयताकार ऐम्पियरी लूप लेते हैं जिसके किनारे $\vec{\mathbf{B}}$ की दिशा के या तो समांतर या फिर लंबवत् हों, तो समीकरण (13.1) में $\vec{\mathbf{B}}$ के रेखा समाकल का मान निकालना आसान होगा। ऐसी स्थिति में θ का मान शून्य या $90°$ होता है। तो आइए, एक बंद रैखिक पथ $PQRS$ को ऐम्पियरी लूप की तरह लेते हैं जैसाकि चित्र 13.9 में दिखाया गया है। इस पथ के लिए समीकरण (13.1) के रेखा समाकल को हम इस तरह से लिख सकते हैं :

$$\oint \vec{\mathbf{B}}.d\vec{\mathbf{l}} = \int_P^Q \vec{\mathbf{B}}.d\vec{\mathbf{l}} + \int_Q^R \vec{\mathbf{B}}.d\vec{\mathbf{l}} + \int_R^S \vec{\mathbf{B}}.d\vec{\mathbf{l}} + \int_S^P \vec{\mathbf{B}}.d\vec{\mathbf{l}} \qquad (13.6)$$

पथ के भाग QR और SP के लिए समाकल का मान शून्य होगा क्योंकि इन पथों के कुछ भागों के लिए जो परिनालिका के बाहर हैं, $\vec{\mathbf{B}} = 0$ है और उन भागों के लिए जो परिनालिका के अंदर हैं, $\vec{\mathbf{B}}, d\vec{\mathbf{l}}$ पर लंब है। पथ के भाग RS के लिए भी समाकल का मान शून्य है क्योंकि हमने मान लिया है कि परिनालिका के बाहर $\vec{\mathbf{B}} = 0$ है। इस प्रकार, समीकरण (13.6) के समाकल में केवल जो पथ भाग PQ पर समाकल है, जिसका मान शून्य नहीं है। अतः समीकरण (13.6) निम्नवत् हो जाता है :

$$\oint \vec{\mathbf{B}}.d\vec{\mathbf{l}} = \int_P^Q \vec{\mathbf{B}}.d\vec{\mathbf{l}}$$

जैसाकि ऊपर बताया गया है, पथ PQ के लिए $\vec{\mathbf{B}}$ अचर है और पथ के अनुदिश है। अतः,

$$\oint \vec{\mathbf{B}}.d\vec{\mathbf{l}} = \int_P^Q \vec{\mathbf{B}}.d\vec{\mathbf{l}} = \vec{\mathbf{B}}\int_P^Q d\vec{\mathbf{l}} = BL \qquad (13.7)$$

जहां L पथ PQ की लंबाई है। यदि इस लंबाई में परिनालिका के तार के N फेरे हों, जिनमें से प्रत्येक में धारा i प्रवाहित होती हो, तब पथ द्वारा कुल परिबद्ध धारा Ni होगी। इस प्रकार, ऐम्पियर नियम [समीकरण (13.1)] का दक्षिण पक्ष $\mu_0 Ni$ होगा।

समीकरण (13.7) का उपयोग करते हुए हम समीकरण (13.1) को निम्नवत् लिख सकते है

$$BL = \mu_0 Ni$$

$$B = \frac{\mu_0 Ni}{L} = \mu_0 ni \qquad (13.8)$$

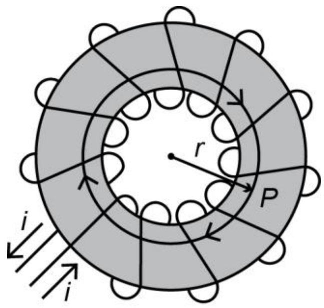
जहां n परिनालिका की प्रति इकाई लंबाई में फेरों की संख्या है।

एक अनंत लंबी परिनालिका के लिए प्राप्त किया गया व्यंजक, समीकरण (13.8), वास्तविक परिनालिकाओं के अंदर के उन सभी बिंदुओं के लिए जो सिरों से दूर हैं, के लिए लागू होता है। ध्यान दें कि $\vec{\mathbf{B}}$ तब तक परिनालिका के अंदर के बिंदु की स्थिति पर निर्भर नहीं करता, जब तक कि हम परिनालिका के सिरों से दूर रहते हैं। अतः, हम इस निष्कर्ष पर पहुंचते हैं कि $\vec{\mathbf{B}}$ परिनालिका के अनुप्रस्थ परिच्छेद पर एकसमान होता है। अपने इस अभिलक्षण के कारण परिनालिका प्रयोगों में एकसमान चुंबकीय क्षेत्र स्थापित करने के लिए बहुत उपयोगी होती है।

अब आगे बढ़ने से पहले, आप निम्नलिखित बोध प्रश्न को हल करें।

बोध प्रश्न 3 – परिनालिका के कारण चुंबकीय क्षेत्र

एक लंबे परिनालिका के अंदर चुंबकीय क्षेत्र किस प्रकार प्रभावित होगा यदि i) प्रति मीटर फेरों की संख्या दोगुनी कर दी जाए ii) धारा दोगुनी कर दी जाए iii) परिनालिका की लंबाई दोगुनी कर दी जाए जिससे प्रति मीटर फेरों की संख्या प्रभावित हो, iv) प्रति मीटर फेरों को नियत रखकर परिनालिका की लंबाई दोगुनी कर दी जाए, और v) परिनालिका का व्यास दोगुना कर दिया जाए?



चित्र 13.10: टोरॉइड एक परिनालिका है, जिसे क्षेत्र के परिकलन के लिए एक वृत्त के रूप में मोड़ दिया जाता है ताकि उसके दोनों सिरे जुड़ जाएं। चित्र में ऐम्पीयरी लूप भी दिखाया गया है।

13.3.3 टोरॉइड के भीतर चुंबकीय क्षेत्र

टोरॉइड, डोनट के आकार की कुंडली होती है जिसका उपयोग इलेक्ट्रॉनिक परिपथों में प्रेरक की तरह होता है। यदि परिनालिका को एक वृत्त के रूप में मोड़ दिया जाए जिससे कि इसके दोनों सिरे जुड़ जाएं तो एक टोरॉइड बन जाता है। टोरॉइड के कारण उत्पन्न $\vec{\mathbf{B}}$ के परिमाण के लिए व्यजंक प्राप्त करने के लिए हम यह नोट करते हैं कि सममित संरचना होने के कारण टोरॉइड के भीतर $\vec{\mathbf{B}}$ की क्षेत्र रेखाएं वृत्तीय होंगी। इन वृत्तीय क्षेत्र रेखाओं का केन्द्र, टोरॉइड का केन्द्र होगा और एक क्षेत्र रेखा के अनुदिश क्षेत्र का परिमाण अचर होगा।

अब आइए, त्रिज्या r वाले एक वृत्त के रूप में ऐम्पियरी लूप लें, जो एक क्षेत्र-रेखा के साथ संपाती (coincident) हो (चित्र 13.10 देखें)। अतः, ऐम्पियरी लूप के लिए समीकरण (13.1) के रेखा समाकल को निम्न रूप में लिखा जा सकता है :

$$\oint \vec{\mathbf{B}}.d\vec{\mathbf{l}} = 2\pi rB$$

ध्यान दें कि ऐम्पियरी लूप, क्षेत्र रेखा के साथ संपाती है और $\vec{\mathbf{B}}$ का परिमाण लूप के प्रत्येक बिंदु पर अचर है। इसके फलस्वरूप, समीकरण (13.1) का रेखा समाकल केवल क्षेत्र प्रबलता और लूप की परिधि $2\pi r$ का गुणनफल ही होता है। अब आप यह पूछ सकते हैं : **लूप में कितनी धारा परिबद्ध है?** यदि टोरॉइड में N फेरे हों और उसमें धारा i प्रवाहित होती हो, तो टोरॉइड कुंडली के भीतर का ऐम्पियरी लूप कुल Ni धारा परिबद्ध करेगा। ऐसा इसलिए है क्योंकि पथ (ऐम्पियरी लूप) के प्रत्येक फेरे में धारा समान दिशा में प्रवाहित होती है। ऐम्पियरी लूप के रेखा समाकल के मान और कुल परिबद्ध धारा को समीकरण (13.1) में रखने करने पर हमें मिलता है :

$$2\pi rB = \mu_0 Ni$$

जिससे कि

$$B = \frac{\mu_0 Ni}{2\pi r} \qquad (13.9)$$

समीकरण (13.9) द्वारा व्यक्त परिणाम तब लागू होता है जब ऐम्पियरी लूप टोरॉइड के भीतर होता है। यदि ऐम्पियरी लूप टोरॉइडी की कुंडलियों के भीतरी कोर (inner edge) के अंदर हो तो कोई भी धारा परिबद्ध न होने के कारण चुंबकीय क्षेत्र का मान शून्य हो जाता है। दूसरी ओर, यदि ऐम्पियरी लूप कुंडलियों की बाह्य कोर के बाहर होता है तो यह समान, पर विपरीत दिशाओं में प्रवाहित धाराएं परिबद्ध करता है। अतः, इस स्थिति के लिए भी शून्य क्षेत्र प्राप्त होता है। समीकरण (13.9) से हम कह सकते है कि $\vec{\mathbf{B}}$, r का फलन है। एक टोरॉइड के अनुप्रस्थ परिच्छेद पर $\vec{\mathbf{B}}$ का मान अचर नहीं होता है। जबकि सीधी परिनालिका के भीतर परिनालिका के चुंबकीय क्षेत्र अचर होता है।

अतः, इन अवधारणाओं की अपनी समझ आप निम्न प्रश्न हल करके।

बोध प्रश्न 4 – टोरॉइड का चुंबकीय क्षेत्र

एक टोरॉइड में 6000 फेरे हैं और उसमें 10 A धारा प्रवाहित होती है। टोरॉइड के भीतर एक ऐसे बिन्दु पर चुंबकीय क्षेत्र का मान परिकलित करें जो इसके केंद्र से 20 cm की दूरी पर स्थित है।

अतः, उपरोक्त चर्चा के, जिसमें हमने विभिन्न धारा विन्यासों के लिए ऐम्पियर नियम का उपयोग करके $\vec{\mathbf{B}}$ की गणना की है आधार पर आपने जान लिया होगा कि ऐम्पियर नियम का उपयोग करके $\vec{\mathbf{B}}$ की गणना करना बहुत आसान होता है। $\vec{\mathbf{B}}$ के लिए यह नियम कुछ हद तक गाउस नियम के समान है, जो हमें सममित आवेश वितरण के कारण $\vec{\mathbf{E}}$ की गणना करने में सक्षम बनाता है।

परंतु, ऐम्पियर नियम हमेशा उपयोगी नही होता। ऐसा इसलिए है क्योंकि इस नियम का उपयोग कर $\vec{\mathbf{B}}$ की गणना करने के लिए यह आवश्यक है कि धारा वितरण सममित हो जिसके कारण $\vec{\mathbf{B}}$ का परिमाण अचर हो। $\vec{\mathbf{B}}$ का अचर मान होने से हम इसे रेखा समाकल $\oint \vec{\mathbf{B}}.d\vec{\mathbf{l}}$. से बाहर रखते हैं। अतः, ऐम्पियर नियम केवल अनंत, सीधा तार, अनंत तल, अनंत परिनालिका और टोरॉइड जैसे धारा वितरणों के लिए उपयोगी है। अन्य प्रकार के धारा वितरणों के लिए हमें बायो-सावर्ट नियम का ही उपयोग करना होगा।

साथ ही, इकाई 8 से आप याद करें कि विद्युत्-विभव की संकल्पना हमें आसानी से $\vec{\mathbf{E}}$ की गणना करने में सक्षम बनाती है। इसलिए, आप यह प्रश्न पूछ सकते हैं : क्या हम चुंबकीय विभव को परिभाषित कर सकते हैं जो हमें $\vec{\mathbf{B}}$ की गणना करने में सक्षम बनाए? इसका उत्तर हां में है; हम ऐसा कर सकते हैं। इसके लिए हमें पहले ऐम्पियर नियम को अवकल रूप में व्यक्त करना होगा। आइए, अब हम इसे सीखते हैं।

13.4 ऐम्पियर नियम का अवकल रूप

समीकरण (13.1), ऐम्पियर नियम का समाकल रूप है :

$$\oint \vec{\mathbf{B}}.d\vec{\mathbf{l}} = \mu_0 i_{\text{परिबद्ध}}$$

ऐम्पियर नियम को अवकल रूप में व्यक्त करने के लिए हम स्टोक्स प्रमेय का उपयोग करते हैं जिसे आपने इस पाठ्यक्रम के खंड 1 की इकाई 4 में पढ़ा है। स्टोक्स प्रमेय के अनुसार, एक वक्र C के अनुदिश एक सदिश क्षेत्र $\vec{\mathbf{F}}$ का रेखा समाकल, वक्र C से परिबद्ध सतह S पर $\vec{\mathbf{F}}$ के पृष्ठ समाकल से निम्नवत् संबंधित होता है :

$$\oint_C \vec{\mathbf{F}}.d\vec{\mathbf{l}} = \oiint_S \text{curl}\,\vec{\mathbf{F}}.d\vec{\mathbf{S}} \tag{13.10}$$

जहां $d\vec{\mathbf{S}}$ बंद पथ द्वारा परिबद्ध क्षेत्रफल है। अब समीकरण (13.10) का उपयोग करते हुए, हम समीकरण (13.1) को इस तरह लिख सकते हैं :

$$\oint_C \vec{\mathbf{B}}.d\vec{\mathbf{l}} = \mu_0 i_{\text{परिबद्ध}} = \oiint_S \vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{B}}.d\vec{\mathbf{S}} \tag{13.11}$$

आप इकाई 12 से याद करें कि धारा i और धारा धनत्व $\vec{\mathbf{J}}$ में संबंध समीकरण (12.7) द्वारा व्यक्त होता है :

$$i = \oiint_S \vec{\mathbf{J}}.d\vec{\mathbf{S}}$$

इसीलिए, समीकरण (13.11) को हम निम्नवत् लिखते हैं :

$$\oiint_S \vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{B}}.d\vec{\mathbf{S}} - \mu_0 \oiint_S \vec{\mathbf{J}}.d\vec{\mathbf{S}} = 0$$

या

$$\oiint_S \left[\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{B}} - \mu_0 \vec{\mathbf{J}}\right].d\vec{\mathbf{S}} = 0$$

चूंकि $d\vec{\mathbf{S}}$ शून्येतर है, इसीलिए उपरोक्त व्यंजक में कोष्ठक के भीतर की राशि शून्य होनी चाहिए। अतः, हम लिख सकते हैं :

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{B}} = \mu_o \vec{\mathbf{J}}} \tag{13.12}$$

समीकरण (13.12) **ऐम्पियर नियम का अवकल रूप** है।

अब आपको क्षण भर रुक कर सोचना चाहिए कि चुंबकीय क्षेत्र $\vec{\mathbf{B}}$ से जुड़े दो सदिश संबंधों से हम क्या निष्कर्ष निकाल सकते हैं। पहला संबंध है, $\vec{\nabla}.\vec{\mathbf{B}} = 0$ जो चुंबकत्व के लिए गाउस नियम का गणितीय रूप है जो आपने इकाई 12 के भाग 12.3 में पढ़ा है। हमने वहां उल्लेख किया है कि $\vec{\mathbf{B}}$ के शून्य डाइवर्जेंस का भौतिक अर्थ है कि चुंबकीय एकध्रुव नहीं होते। इस संदर्भ में, $\vec{\mathbf{B}}$, विद्युत्-क्षेत्र $\vec{\mathbf{E}}$ से अलग है क्योंकि $\vec{\nabla}.\vec{\mathbf{E}} \neq 0$ ।

दूसरा संबंध है, $\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{B}} \neq 0$ [समीकरण (13.12)]। कर्ल $\vec{\mathbf{B}}$ का परिमित मान फिर से $\vec{\mathbf{B}}$ को $\vec{\mathbf{E}}$ से अलग करता है क्योंकि कर्ल $\vec{\mathbf{E}}$ शून्य है। खंड 1 से आप याद करें कि सदिश क्षेत्र (जैसे $\vec{\mathbf{E}}$) के कर्ल के शून्य मान का अर्थ है कि सदिश क्षेत्र एक संरक्षी क्षेत्र है। अतः, हम कह सकते हैं कि कर्ल $\vec{\mathbf{B}} \neq 0$ का अर्थ है कि $\vec{\mathbf{B}}$ एक असंरक्षी क्षेत्र है।

इन सदिश संबंधों का $\vec{\mathbf{B}}$ के संदर्भ में एक और परिणाम हमें चुंबकीय सदिश विभव की संकल्पना की ओर ले जाता है। आइए, अब हम इसे सीखते हैं।

13.4.1 चुंबकीय सदिश विभव

इकाई 8 में आपने सीखा है कि $\vec{\mathbf{E}}$ का संरक्षी होना हमें विद्युत-विभव की संकल्पना को परिभाषित करने में सक्षम बनाता है। सदिश क्षेत्र $\vec{\mathbf{E}}$ एवं विद्युत्-विभव V – एक अदिश राशि – के बीच संबंध प्राप्त करने के लिए हमने एक सदिश सर्वसमिका का उपयोग किया था : किसी अदिश क्षेत्र के ग्रेडिएन्ट का कर्ल शून्य होता है। इसके आधार पर हमने यह संबंध प्राप्त किया था : $\vec{\mathbf{E}} = -\vec{\nabla}V$ । $\vec{\mathbf{E}}$ एवं V के बीच का यह संबंध किसी बिंदु पर $\vec{\mathbf{E}}$ के परिकलन के लिए बहुत उपयोगी होता है बशर्ते, हमें उस बिंदु पर, दिए गए आवेश वितरण के कारण, V ज्ञात हो।

इसीलिए, आप एक तर्कसम्मत प्रश्न पूछना चाहेंगे : क्या हम ऐसा ही एक अदिश फलन चुंबकीय क्षेत्र के लिए भी परिभाषित कर सकते हैं जिससे $\vec{\mathbf{B}}$ का परिकलन करने में आसानी हो? नहीं, $\vec{\mathbf{B}}$ से संबद्ध ऐसा कोई अदिश विभव परिभाषित नहीं किया जा सकता, क्योंकि $\vec{\mathbf{B}}$ एक संरक्षी क्षेत्र नहीं है। दूसरे शब्दों में, चूंकि कर्ल $\vec{\mathbf{B}} \neq 0$, हम $\vec{\mathbf{B}}$ को किसी अदिश फलन के ग्रेडिएन्ट के रूप में परिभाषित नहीं कर सकते जैसा हमने $\vec{\mathbf{E}}$ के लिए किया था।

लेकिन, संबंध $\vec{\nabla}.\vec{B} = 0$ हमें निम्नलिखित सदिश सर्वसमिका के कारण $\vec{B}$ को किसी सदिश क्षेत्र, माना $\vec{A}$, के कर्ल के रूप में व्यक्त करने की क्षमता प्रदान करता है :

$$\vec{\nabla}.(\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0$$

जहां $\vec{A}$ एक सदिश क्षेत्र है। अतः, हम लिख सकते हैं :

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \qquad (13.13)$$

यदि हम समीकरण (13.13) की तुलना विद्युत्-क्षेत्र के लिए संबंध $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$ से करें तो हम पाते हैं कि हम एक सदिश क्षेत्र $\vec{A}$ को चुंबकीय क्षेत्र $\vec{B}$ से उसी प्रकार संबद्ध कर सकते हैं जैसे अदिश विभव V क्षेत्र $\vec{E}$ से संबद्ध होता है। अतः, सदिश क्षेत्र $\vec{A}$ को हम **चुंबकीय सदिश विभव** कहते हैं।

ध्यान दें कि समीकरण (13.13) $\vec{A}$ को अनन्य रूप से परिभाषित करने के लिए पर्याप्त नहीं है। ऐसा इसलिए है क्योंकि हम सदैव सदिश $\vec{A}$ में किसी अदिश फलन, माना β के ग्रेडिएन्ट का योग कर सकते है और तब भी समीकरण (13.13) संतुष्ट रहेगा। ऐसा इसलिए होगा क्योंकि किसी अदिश फलन के ग्रेडिएन्ट का कर्ल तो शून्य ही होता है। इसीलिए हमें पहले $\vec{A}$ को अनन्य रूप से परिभाषित करने की आवश्यकता है। ऐसा करने के लिए हम समीकरण (13.12) का उपयोग करके, $\vec{A}$ द्वारा संतुष्ट होने वाला एक अन्य प्रतिबंध प्राप्त करते हैं :

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

उपर्युक्त समीकरण में समीकरण (13.13) को रखने पर हमें मिलता है :

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \mu_0 \vec{J} \qquad (13.14)$$

आगे बढ़ने के लिए हम निम्नलिखित सदिश सर्वसामिका का उपयोग करते हैं :

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{C}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}.\vec{C}) - \nabla^2 \vec{C} \qquad (13.15)$$

अतः, समीकरण (13.15) का उपयोग करके हम समीकरण (13.14) को निम्नवत् लिख सकते है :

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla}.\vec{A}) - \nabla^2(\vec{A}) = \mu_0 \vec{J} \qquad (13.16)$$

समीकरण (13.16) के बायीं ओर दो पद हैं : एक में $\vec{A}$ का डाइवर्जेंस शामिल है और दूसरा पद $\vec{\nabla}^2 \vec{A}$ है। चूंकि समीकरण (13.13) में दिए गए प्रतिबंध में कर्ल $\vec{A}$ शामिल है, हम $\vec{A}$ का चयन इस प्रकार कर सकते हैं कि इसका डाइवर्जेंस शून्य हो। अर्थात् फलन $\vec{A}$ द्वारा समीकरण (13.13) को संतुष्ट करने वाले अनेक विकल्पों में से हम $\vec{A}$ के केवल उन्हीं परिमाणों को चुनते हैं जो इसे परिनालिकीय बनाते हैं, अर्थात्

$$\vec{\nabla}.\vec{A} = 0 \qquad (13.17)$$

अतः, समीकरण (13.17) वह दूसरा प्रतिबंध है जिसे चुंबकीय सदिश विभव $\vec{A}$ को समीकरण (13.13) द्वारा व्यक्त प्रतिबंध के साथ-साथ संतुष्ट करना है। इसीलिए, चुंबकीय सदिश विभव $\vec{A}$ के पदों में समीकरण (13.12) द्वारा व्यक्त ऐम्पियर नियम $\vec{\nabla}.\vec{A} = 0$ को समीकरण (13.16) में प्रतिस्थापित करके लिखा जा सकता है :

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J} \qquad (13.18)$$

ध्यान दें कि समीकरण (13.18), सदिश समीकरण होने के कारण वास्तव में तीन समीकरण हैं :

$$\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2}=-\mu_0 J_x \tag{13.19क}$$

$$\frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2}=-\mu_0 J_y \tag{13.19ख}$$

$$\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2}=-\mu_0 J_z \tag{13.19ग}$$

समीकरण (13.19) में से प्रत्येक समीकरण विद्युत्-विभव V एवं आयतन आवेश घनत्व ρ में संबंध के समरूप है :

$$\nabla^2 V=-\frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{13.20}$$

साथ ही, आयतन आवेश के कारण किसी बिंदु पर विद्युत्-विभव को निम्नवत् लिखा जा सकता है :

$$V=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho}{r}d\tau$$

जहां $d\tau$ आयतन अवयव तथा r आयतन आवेश और उस बिन्दु के बीच दूरी है जिस पर हम V परिकलित करना चाहते हैं। इसीलिए अनुरूपता से हम चुंबकीय सदिश विभव $\vec{\mathbf{A}}$ को किसी आयतन धारा वितरण के धारा घनत्व के पदों में निम्नवत् लिख सकते हैं :

$$\vec{\mathbf{A}}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{\mathbf{J}}}{r}d\tau \tag{13.21}$$

इसी प्रकार, रैखिक और पृष्ठ धारा वितरणों के लिए चुंबकीय सदिश विभवों के व्यंजक निम्नवत् हैं :

$$\vec{\mathbf{A}}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{\mathbf{L}}}{r}dl \tag{13.22}$$

$$\vec{\mathbf{A}}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{\mathbf{K}}}{r}dS \tag{13.23}$$

जहां $\vec{\mathbf{L}}$ और $\vec{\mathbf{K}}$ क्रमशः रेखा और पृष्ठ धारा वितरणों के कारण धारा घनत्व हैं। यद्यपि हम $\vec{\mathbf{B}}$ का परिकलन समीकरण (13.15) का उपयोग करके कर सकते हैं, स्वयं $\vec{\mathbf{A}}$ का परिकलन (विद्युत्-विभव की तरह) आसान नहीं होता है क्योंकि यह एक सदिश राशि है। V का उपयोग करके $\vec{\mathbf{E}}$ का परिकलन करने में आसानी यह है कि V एक अदिश राशि है। ऐसा $\vec{\mathbf{B}}$ के मामले में नहीं है। फिर भी, चुंबकीय सदिश विभव परिभाषित करके हमने कुछ हद तक विद्युत्-क्षेत्र और चुंबकीय क्षेत्र के बीच सममिति स्थापित की है।

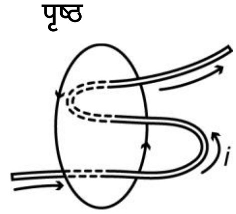
आइए, अब जो कुछ भी आपने इस इकाई में पढ़ा है हम उसका सारांश दें।

13.5 सारांश

अवधारणा	विवरण
ऐम्पियर नियम	■ किसी बंद लूप के अनुदिश चुंबकीय क्षेत्र का रेखा समाकल, लूप द्वारा परिबद्ध धारा और μ_0 के गुणनफल के बराबर होता है : $\oint \vec{\mathbf{B}}.d\vec{\mathbf{l}} = \mu_0 i_{\text{परिबद्ध}}$
लंबे, सीधे तार के कारण चुंबकीय क्षेत्र	■ एक लंबे, सीधे धारावाही तार के कारण उत्पन्न चुंबकीय क्षेत्र का व्यंजक है : $\lvert\vec{\mathbf{B}}\rvert = (\mu_0 i / 2\pi r)$ जहां क्षेत्र बिन्दु से तार की दूरी r है।
परिनालिका	■ परिनालिका एक लंबी बेलनाकार कुंडली होती है जिसमें कई फेरे होते हैं। धारावाही परिनालिका के अंदर, एकसमान चुंबकीय क्षेत्र होता है जिसे निम्न रूप में व्यक्त करते हैं : $B = \mu_0 n i$ जहां n परिनालिका के प्रति इकाई लंबाई में फेरों की संख्या है।
टॉरॉइड	■ टॉरॉइड कुंडली के अंदर चुंबकीय क्षेत्र का व्यंजक है : $B = \dfrac{\mu_0 N i}{2\pi r}$ जहां r टॉरॉइड के केंद्र से दूरी है और N टॉरॉइड पर लपेटों की कुल संख्या है।
ऐम्पियर नियम का अवकल रूप	■ ऐम्पियर नियम का अवकल रूप है : $\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{B}} = \mu_0 \vec{\mathbf{J}}$ जहां $\vec{\mathbf{J}}$ दिए गए बिंदु पर धारा घनत्व है।
चुंबकीय सदिश विभव	■ चुंबकीय सदिश विभव $\vec{\mathbf{A}}$ के पदों में, हम चुंबकीय क्षेत्र को निम्नवत व्यक्त करते हैं : $\vec{\mathbf{B}} = \vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{A}}$ क्योंकि किसी कर्ल के डाइवर्जेंस का मान शून्य होता है और $\vec{\mathbf{B}}$ का डाइवर्जेंस भी शून्य होता है। ■ चुंबकीय सदिश विभव $\vec{\mathbf{A}}$ के पदों में, ऐम्पियर नियम को निम्न रूप में लिखा जाता है : $\nabla^2 \vec{\mathbf{A}} = -\mu_0 \vec{\mathbf{J}}$

13.6 अंत में कुछ प्रश्न

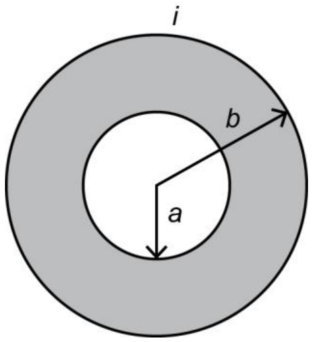
1. पांच बहुत लंबे, सीधे विद्युत्-रोधी तारों को पास-पास रख कर उनका एक छोटा केबल बनाया गया है। तारों में प्रवाहित होने वाली धाराएं $i_1 = 20\,\text{A}$, $i_2 = -6\,\text{A}$, $i_3 = 12\,\text{A}$, $i_4 = -7\,\text{A}$, और $i_5 = 18\,\text{A}$ हैं (ऋणात्मक धाराएं धनात्मक धाराओं की विपरीत दिशा में हैं)। केबल से 10 cm की दूरी पर स्थित बिन्दु पर $\vec{\mathbf{B}}$ का परिमाण परिकलित करें।



चित्र 13.11: अंत के प्रश्न 2 के लिए चित्र।

2. चित्र 13.11 में दिखाए गए बंद पथ द्वारा परिबद्ध पृष्ठ पर विचार करें, जहां $i = 15\,\text{A}$ है। पृष्ठ से होकर गुजरने वाली नेट धारा कितनी है? इस बंद पथ के लिए $\vec{\mathbf{B}}$ के रेखा समाकल का मान परिकलित करें।

3. 4 mm व्यास वाले एक लंबे, सीधे तार में एकसमान रूप से वितरित 10 A धारा प्रवाहित हो रही है। तार के अक्ष से कितनी दूरी पर $\vec{\mathbf{B}}$ का परिमाण अधिकतम होगा? अपने उत्तर की पुष्टि करें।



चित्र 13.12: अंत के प्रश्न 4 के लिए चित्र।

4. एक लंबे, खोखले चालक बेलन में धारा i प्रवाहित हो रही है जो इसके पूरे परिच्छेद पर (चित्र 13.12) एकसमान रूप से वितरित है। बेलन के अक्ष से दूरी r पर स्थित बिन्दु पर चुंबकीय क्षेत्र का मान परिकलित करें जब i) $r \le a$, ii) $a < r \le b$, और iii) $b \le r$।

5. एक लंबी परिनालिका में 900 फेरे प्रति मीटर लपेटे गए हैं और इसमें 2.6 A धारा प्रवाहित की गई है। i) परिनालिका के केन्द्र पर चुंबकीय क्षेत्र का परिमाण कितना है? ii) यदि परिनालिका की लंबाई 300 mm हो तो परिनालिका पर तार के कितने फेरे हैं?

6. एक टोरॉइड में 600 फेरे हैं और इसमें 200 mA धारा प्रवाहित हो रही है। यदि टोरॉइड के अंदरूनी और बाह्य व्यास क्रमशः 80 cm और 95 cm हों तो टोरॉइड में चुंबकीय क्षेत्र का अधिकतम और न्यूनतम मान परिकलित करें।

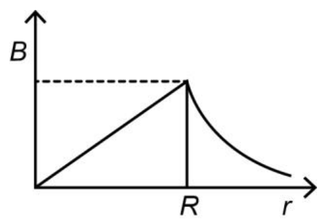
7. व्यास 1.5 cm वाली 15 cm लंबी परिनालिका में 1.5 A धारा प्रवाहित हो रही है और इसके केन्द्र पर चुंबकीय क्षेत्र 0.04 T है। यदि परिनालिका बनाने में प्रयुक्त तार का व्यास 0.6 mm हो तो इसे बनाने में कितनी परतें लपेटी जाएंगी और प्रयुक्त तार की कुल लंबाई कितनी होगी?

13.7 हल और उत्तर

बोध प्रश्न

1. ऐम्पियर नियम का रेखा समाकल $\oint \vec{\mathbf{B}}.d\vec{\mathbf{l}}$ ऐम्पियरी लूप द्वारा परिबद्ध कुल धारा पर निर्भर करता है। चित्र 13.2 में लूप 1 और 3 धारा i को परिबद्ध करते हैं। इसीलिए इन लूपों के लिए $\oint \vec{\mathbf{B}}.d\vec{\mathbf{l}} = \mu_0 i$ होगा। दूसरी ओर, ऐम्पियरी लूप 2 के लिए नेट धारा शून्य है इसीलिए $\oint \vec{\mathbf{B}}.d\vec{\mathbf{l}} = 0$।

2. तार के अक्ष से दूरी r के साथ B का विचरण चित्र 13.13 में दिखाया गया है।



चित्र 13.13: बोध प्रश्न 2 के उत्तर के लिए आलेख।

3. परिनालिका के अंदर चुंबकीय क्षेत्र का व्यंजक है :

$$B = \mu_0 n i$$

हम सभी प्रश्नों के उत्तर उपर्युक्त संबंध के आधार पर दे सकते है :

i) क्षेत्र दोगुना हो जाएगा क्योंकि हमने $n = 2n$ कर दिया है।

ii) क्षेत्र दोगुना हो जाएगा क्योंकि हमने $i = 2i$ कर दिया है।

iii) क्षेत्र आधा हो जाएगा क्योंकि हमने $n = n/2$ कर दिया है।

iv) क्षेत्र अपरिवर्तित रहता है क्योंकि हमने n को अपरिवर्तित रखा है।

v) क्षेत्र अपरिवर्तित रहता है क्योंकि यह परिनालिका के व्यास पर निर्भर नहीं करता।

4. टोरॉइड के भीतर चुंबकीय क्षेत्र का व्यंजक है :

$$B = \frac{\mu_0 ni}{2\pi r}$$

दिया है : $N = 6000, i = 10\text{ A}, r = 20\text{ cm} = 0.2\text{ m}, \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\text{ T mA}^{-1}$

इसलिए, हमें प्राप्त होता है :

$$B = \frac{(2\times 10^{-7}\text{ T mA}^{-1})(6000)(10\text{ A})}{(0.2\text{ m})} = 0.06\text{ T}$$

अंत में कुछ प्रश्न

1. एक ऐम्पियरी लूप जिसकी त्रिज्या 10 cm है और जिसका केन्द्र, केबल के अक्ष पर है, पर विचार करें। जैसाकि प्रश्न से मालूम है, केबल में पांच धरावाही तार हैं। अतः, केबल से 10 cm की दूरी पर चुंबकीय क्षेत्र होगा :

$$B = \frac{\mu_0 i_{\text{परिबद्ध}}}{2\pi r}$$

$$i_{\text{परिबद्ध}} = i_1 + i_2 + i_3 + i_4 + i_5 = 20\text{ A} - 6\text{ A} + 12\text{ A} - 7\text{ A} + 18\text{ A} = 37\text{ A}$$

इसलिए,

$$B = [(2\times 10^{-7}\text{ T mA}^{-1})\times(37\text{ A})]/(0.1\text{m}) = 7.4\times 10^{-5}\text{ T}$$

2. चित्र 13.11 में देखें कि धारा, पृष्ठ से होकर तीन बार गुजरती है। अतः, पृष्ठ से गुजरने वाली नेट धारा का मान है : i = 15 A। ऐम्पियर नियम के अनुसार इस बंद पथ के लिए $\vec{\mathbf{B}}$ के रेखा समाकल का व्यंजक होगा :

$$\oint \vec{\mathbf{B}}.d\vec{\mathbf{l}} = \mu_0 i_{\text{परिबद्ध}} = \mu_0(15\text{ A}) = (4\pi\times 10^{-7}\text{ T mA}^{-1})(15\text{ A})$$

$$= 1.88\times 10^{-5}\text{ Tm}$$

3. समीकरण (13.4) से हमें धारावाही तार के कारण उत्पन्न चुंबकीय क्षेत्र का मान प्राप्त होता है :

$$B = (\mu_0 i)/(2\pi r).$$

अतः, जैसे-जैसे अक्ष से दूरी r बढ़ती है, B का मान घटता है। परंतु, भाग 13.3 (उदाहरण 13.1) से आप जानते हैं कि तार के अंदर (जहां $r < R$, तार की त्रिज्या) B का व्यंजक है :

$$B = (\mu_0 ir)/(2\pi R^2)$$

उपरोक्त व्यंजक से स्पष्ट है कि तार के अंदर, B का मान r के साथ बढ़ता है। और, $r = R$ के लिए B का मान अधिकतम है। अतः, B का मान (4 mm/2) = 2mm पर अधिकतम होगा।

4. i) यदि हम खोखले चालक बेलन के अक्ष के चारों ओर त्रिज्या a वाला ऐम्पियरी लूप लें तो लूप द्वारा परिबद्ध धारा का मान शून्य होगा। अतः, $B = 0$.

ii) त्रिज्या r, जिसका मान a से अधिक और b के बराबर या कम है, वाले ऐम्पियरी लूप के लिए स्थिति वैसी ही है जैसी उदाहरण 13.2 में बताई गई है। अतः, आप सिद्ध कर सकते हैं कि B का परिमाण होगा :

$$B = \left(\mu_0 i(r^2 - a^2)\right)/\left(2\pi r(b^2 - a^2)\right)$$

iii) इस स्थिति में, कोई भी ऐम्पियरी लूप जिसकी त्रिज्या $r \geq b$, कुल धारा i परिबद्ध करेगी। अतः, $B = (\mu_0 i)/(2\pi r)$

5. i) $\vec{\mathbf{B}}$ का परिमाण परिनालिका के केन्द्र पर समीकरण (13.8) द्वारा व्यक्त होता है : $B = \mu_0 ni$

प्रश्न के अनुसार, i = 2.6 A, n = 900 अतः,

$$B = \mu_0 ni = (4\pi \times 10^{-7}\,\text{T m A}^{-1})(900)(2.6\,\text{A}) = 2.9 \times 10^{-3}\,\text{T}$$

ii) चूंकि 1 m लंबाई में फेरों की संख्या 900 है, 300 mm में फेरों की संख्या 270 होगी।

6. समीकरण (13.9) से हम जानते हैं कि टोरॉइड के कारण उत्पन्न चुंबकीय क्षेत्र के परिमाण का व्यंजक है :

$$B = (\mu_0 Ni)/(2\pi r)$$

जहां r, टोरॉइड के अक्ष से त्रिज्य दूरी है। हम यह भी जानते हैं कि टोरॉइड के भीतरी कोर के अंदर तथा बाहय कोर के बाहर B का मान शून्य होता है। साथ ही, उपरोक्त व्यंजक B और r में जो संबंध बताता है, उससे हम कह सकते हैं कि B का मान टोरॉइड के भीतरी कोर के पास और अंदर अधिकतम होगा जिसके लिए r = 80 mm है और, B का मान बाहरी कोर के पास और अंदर न्यूनतम होगा जहां r = 95 mm है। अतः,

$$(B)_{max} = [(2 \times 10^{-7}\,\text{T m A}^{-1})(600)(0.2\,\text{A})]/[0.08\,\text{m}] = 0.3\,\text{mT}$$

$$(B)_{min} = [(2 \times 10^{-7}\,\text{T m A}^{-1})(600)(0.2\,\text{A})]/[0.095\,\text{m}] = 0.25\,\text{mT}$$

7. परिनालिका के कारण चुंबकीय क्षेत्र के मान का व्यंजक समीकरण (13.8) है :

$$B = \mu_0 ni$$

प्रश्न के अनुसार, $B = 0.04$ T, $i = 1.5$ A. अतः,

$$n = B/(\mu_0 i) = (0.04\,\text{T})/[(4\pi \times 10^{-7}\,\text{T m A}^{-1}) \times (1.5\,\text{A})] = 2.1 \times 10^4$$

अतः, प्रति मीटर फेरों की संख्या 2.1×10^4 है।

प्रश्न के अनुसार, परिनालिका की लंबाई 15 cm है। अतः, इसमें फेरों की संख्या 3.15×10^3 होगी। चूंकि परिनालिका की लंबाई 15 cm और व्यास 0.6 mm है, एक परत में फेरों की संख्या (0.15 m)/ $(0.6 \times 10^{-3}\text{m}) = 2.5 \times 10^2$ होगी। अतः, परतों की संख्या होगी : $(3.15 \times 10^3)/(2.5 \times 10^2) = 12.6$.

आगे, परिनालिका की परिधि, $2\pi r = 2 \times 3.14 \times 0.0075\,\text{m} = 0.047\,\text{m}$. अतः, एक फेरे में 0.047 m तार की लंबाई का उपयोग होगा। अतः, तार की कुल प्रयुक्त लंबाई $(0.047\,\text{m}) \times (3.15 \times 10^3) = 148\,\text{m}$. (ध्यान दें कि हमने इस तथ्य की उपेक्षा की है कि प्रत्येक परत के बाद, परिनालिका की परिधि बढ़ती जाएगी।)