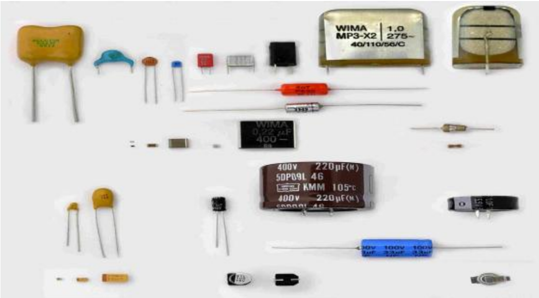


चित्र में दिखाए गए विभिन्न आकारों और आमापों वाले संधारित्र वैद्युत् और इलेक्ट्रॉनिक परिपथों के अभिन्न घटक होते हैं। संधारित्रों में डाइलेक्ट्रिक पदार्थों का उपयोग करने से उनकी धारिता का मान बढ़ जाता है जिसके फलस्वरूप वैद्युत् और इलेक्ट्रॉनिक अनुप्रयुक्तियों के लघुरूपण (miniaturisation) में आसानी होता है। (चित्र का स्रोत : विकिमीडिया कॉमन्स)

इकाई 11

संधारित्र

इकाई की रूपरेखा

अध्ययन निर्देशिका

इस इकाई में आप संधारित्र के बारे में पढ़ेंगे। संधारित्र एक वैद्युत् अवयव है जिसका विभिन्न प्रकार के वैद्युत् तथा इलेक्ट्रॉनिक अनुप्रयुक्तियों में प्रयोग होता है। जब संधारित्र के प्लेटों के बीच डाइलेक्ट्रिक पदार्थ भर दिया जाता है तो इसकी उपयोगिता काफी बढ़ जाती है। इसलिए इस इकाई में हम डाइलेक्ट्रिक और विद्युत्-क्षेत्र में उनके व्यवहार जिसके बारे में आप इकाई 10 में पढ़ चुके हैं, कि बार-बार चर्चा करेंगे। अतः, इकाई 10 की मुख्य अवधारणाओं को आप एक बार फिर से पढ़ लें। साथ ही, आप संतत आवेश वितरण के कारण विद्युत्-विभव की अवधारणा, जिसे आप इकाई 9 में पढ़ चुके हैं, को दुहरा लें। इस इकाई में प्रयुक्त गणित से आप भली-भांति परिचित हैं क्योंकि आपने पिछली इकाईयों में इन्हें प्रयोग किया है। फिर भी, इस इकाई को पढ़ते हुए गणितीय व्युत्पत्तियों को आप साथ-साथ स्वयं भी करें।

हमारी यह भी सलाह है कि आप बोध-प्रश्नों और अंत के प्रश्नों को स्वयं हल करने का प्रयास करें इससे पहले कि आप इनके उत्तर, जो अंत में दिए गए हैं, देखें।

"अनेकानेक प्रयोग मेरे सिद्धांत को सही न सिद्ध कर पायें; लेकिन एक प्रयोग मुझे गलत साबित कर सकता है।"

अल्बर्ट आइंस्टीन

11.1 परिचय

इकाई 10 में आपने विद्युत्-क्षेत्र में डाइलेक्ट्रिक पदार्थों के व्यवहार के बारे में और ध्रुवित डाइलेक्ट्रिक के विद्युत्-क्षेत्र के बारे में पढ़ा है। आपने डाइलेक्ट्रिक माध्यम के लिए गाउस का नियम प्राप्त किया है और डाइलेक्ट्रिक पदार्थों के डाइलेक्ट्रिक नियतांक और वैद्युत प्रवृत्ति के बारे में पढ़ा है। आपने पढ़ा है कि डाइलेक्ट्रिक पदार्थों के संधारित्रों में महत्त्वपूर्ण अनुप्रयोग होते हैं। अतः, हम इस इकाई में संधारित्रों का विस्तार से अध्ययन करेंगे। स्कूल की भौतिकी में और इकाई 10 में आपने पढ़ा है कि जब किसी चालक पर आवेश को बढ़ाया जाता है, तब उसका विभव बढ़ जाता है। इसका अर्थ है कि चालक पर आवेश उसकी वोल्टता के समानुपाती होता है। समानुपातिकता स्थिरांक को चालक की **धारिता** कहते हैं। इस बात को हम गणितीय भाषा में इस तरह कहते हैं : $Q \propto V$ या $Q = CV$ जहां अचर C धारिता है। आप जानते हैं कि किसी भी ऐसी युक्ति को जिसमें धारिता होती है संधारित्र कहा जाता है। स्कूल की भौतिकी में आपने संधारित्रों के बारे में पढ़ा भी है।

संधारित्रों के हमारे जीवन में बहुत से अनुप्रयोग हैं। जैसेकि जब आप रेडियो या ट्रांज़िस्टर में उसकी घुंडी को घुमा कर अपनी इच्छानुसार रेडियो स्टेशन प्राप्त करते हैं तब आप दरअसल उसकी धारिता को बदल रहे होते हैं। संधारित्रों का बहुत से विद्युत् और इलेक्ट्रॉनिकी परिपथों में उपयोग होता है। इनका प्रवर्धकों में युग्मन के लिए भी प्रयोग किया जाता है। इनका इस्तेमाल हम मोटर तथा पंखों में करते हैं। प्रेरकों के साथ ये दोलन उत्पन्न करने के लिए प्रयुक्त होते हैं, जिनका रेडियो, टीवी के प्रसारण में प्रयोग होता है। इसके अलावा संधारित्रों का विद्युत् धारा संचरण में भी बहुत उपयोग होता है।

इस इकाई के भाग 11.2 में आप धारिता और संधारित्र को आवेशित करने के बारे में पढेंगे। हम संधारित्र में संचित ऊर्जा भी प्राप्त करेंगे। भाग 11.3 में हम समांतर प्लेट संधारित्र की चर्चा करेंगे और जब उसकी प्लेटों के बीच में डाइलेक्ट्रिक रखा हो तब उसकी धारिता की गणना करेंगे। हम डाइलेक्ट्रिक माध्यम में संचित ऊर्जा का मान भी प्राप्त करेंगे। भाग 11.4 में हम गोलीय और बेलनाकार संधारित्रों की धारिता प्राप्त करेंगे। विद्युत् परिपथों में संधारित्रों का श्रेणी और समांतर क्रम में संयोजन किया जाता है। अतः, भाग 11.5 में आप किसी विद्युत् परिपथ में संधारित्रों के श्रेणी और समांतर क्रम में संयोजन की परिणामी धारिता प्राप्त करेंगे। अंत में, भाग 11.6 में आप व्यावहारिक संधारित्रों में डाइलेक्ट्रिक पदार्थों के अनुप्रयोगों के बारे में पढ़ेंगे। हम संक्षेप में संधारित्रों की वोल्टता रेटिंग की भी चर्चा करेंगे।

अगली इकाई में आप चुंबकीय क्षेत्र और विद्युत् धारा से इसके संबंध के बारे में पढ़ेंगे।

उद्देश्य

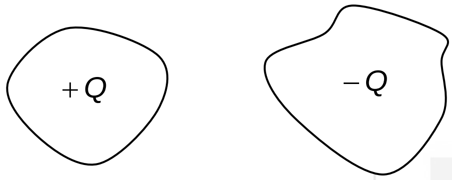
इस इकाई को पढ़ने के बाद आप :

- ❖ एक संधारित्र की धारिता परिभाषित कर सकेंगे;
- ❖ एक संधारित्र में और डाइलेक्ट्रिक में संचित ऊर्जा प्राप्त कर सकेंगे;
- ❖ जब एक संधारित्र के बीच में डाइलेक्ट्रिक रखा हो तब उसकी धारिता की गणना कर सकेंगे;

- समांतर प्लेट संधारित्र, गोलीय संधारित्र और बेलनाकार संधारित्र की धारिता की गणना कर सकेंगे;
- संधारित्रों के श्रेणी और समांतर क्रम में संयोजनों की परिणामी धारिता प्राप्त कर सकेंगे; और
- व्यावहारिक संधारित्रों के अनुप्रयोगों की चर्चा कर सकेंगे।

11.2 धारिता

दो चालक लें जिन पर क्रमशः $+Q$ और $-Q$ आवेश हैं (चित्र 11.1 देखें)। इकाई 9 में आपने पढ़ा है कि चालक पर वोल्टता V अचर होती है क्योंकि चालक की सतह समविभव सतह होती है।



चित्र 11.1: आवेश $+Q$ और $-Q$ वाले दो चालक।

परिभाषा से, दो चालकों के बीच का विभवांतर होता है :

$$V = V_+ - V_- = -\int_-^+ \vec{\mathbf{E}}.d\vec{\mathbf{l}} \tag{11.1}$$

जहां V_+ धनात्मक आवेश वाले चालक का विभव है और V_-, ऋणात्मक आवेश वाले चालक का विभव है। स्कूल की भौतिकी में आपने पढ़ा है कि जब किसी चालक पर आवेश बढ़ाया जाता है, तब उसकी वोल्टता बढ़ जाती है। आप जानते हैं कि दो चालकों के तंत्र के लिए जिनके बीच का विभवांतर V समीकरण (11.1) द्वारा परिभाषित होता है, आवेश Q, V के समानुपाती होता है:

$$Q \propto V \quad \text{or} \quad Q = CV \tag{11.2}$$

समानुपातिकता स्थिरांक को तंत्र की **धारिता (capacitance)** कहते हैं।

समीकरण (11.2) से

$$C = \frac{Q}{V} \tag{11.3}$$

आपने स्कूल की भौतिकी में पढ़ा है कि **धारिता का मान चालकों के आकार, आमाप और उनके बीच की दूरी पर निर्भर करता है**। ध्यान दें कि परिभाषा से, V **धनात्मक चालक** के विभव और **ऋणात्मक चालक** के विभव का अंतर है और Q **धनात्मक चालक** का आवेश है। अतः C **धनात्मक** राशि है।

हम एक चालक की धारिता की भी बात कर सकते हैं। इस स्थिति में **दूसरा चालक अनंत त्रिज्या वाला एक काल्पनिक गोलीय कोश होता है जो पहले चालक को घेरे रहता है और इसका विद्युत्-क्षेत्र में योगदान शून्य होता है**।

उदाहरण के लिए, त्रिज्या R वाला एक चालक गोलीय कोश लें जो विद्युतरोधी पदार्थ से घिरा है। आइये, हम इस कोश की सतह पर एक आवेश Q रखें। चालक की सतह समविभव सतह होती है। कोश की बाहरी सतह पर (इकाई 9 का भाग 9.2 देखें) विभव होता है :

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} \qquad (11.4)$$

जहां हम यह कल्पना करते हैं कि अनंत त्रिज्या वाले कोश का विभव शून्य है। अनंत पर स्थित गोलीय कोश लेने की जगह हम भूमि (पृथ्वी) के विभव का मान शून्य ले सकते हैं। तब (भूमि के सापेक्ष) इस गोलीय कोश की धारिता है :

$$C = \frac{Q}{V} = 4\pi\varepsilon_0 R \frac{\text{कूलॉम}}{\text{वोल्ट}} \qquad (11.5)$$

जहां R, m में है। SI तंत्र में धरिता की इकाई फैरेड होती है। इसका प्रतीक F होता है और परिभाषा से,

$$1\,\text{फैराडे} = \frac{1\ \text{कूलॉम}}{1\ \text{वोल्ट}} \qquad (11.6)$$

यदि $R = 1.0\,\text{m}$, तो उपरोक्त कोश की धारिता है : $4\pi\varepsilon_0\,(1.0\,\text{m}) = 1.1 \times 10^{-12}\,\text{F}$

हम देखते हैं कि फैरेड बहुत बड़ी इकाई है। धारिता का अधिक व्यवहारिक इकाई माइक्रोफैरेड $(10^{-6}\,\text{F})$ और पीकोफैरेड $(10^{-12}\,\text{F})$ है। विद्युत् परिपथ में संधारित्र को इस प्रतीक से दर्शाया जाता है : •—||—•। आगे पढ़ने से पहले आप एक बोध प्रश्न हल करें।

बोध प्रश्न 1 – पृथ्वी की धारिता

पृथ्वी की त्रिज्या (6000 km) के बराबर त्रिज्या वाला एक गोलीय कोश लें। इसकी धारिता क्या है?

11.2.1 संधारित्र को आवेशित करना और उसमें संचित ऊर्जा

संधारित्र को "आवेशित करने" के लिए हमें धनात्मक चालक से इलेक्ट्रॉन हटा कर उन्हें ऋणात्मक चालक तक ले जाना होता है। ऐसा करने पर हमें विद्युत्-क्षेत्र के विरूद्ध कार्य करना होता है जो इलेक्ट्रॉनों को धनात्मक चालक की ओर खींचता है और ऋणात्मक चालक से परे धकेलता है। मान लें कि हम चालक पर आवेश रखना शुरू करते हैं। बीच की किसी अवस्था में जब चालक पर आवेश q होता है, तब विभवांतर होता है : $V = \dfrac{q}{C}$। तब एक अतिरिक्त आवेश dq को चालक तक ले जाने के लिए हमें कार्य dW करना होता है :

> संधारित्र एक इलेक्ट्रॉनिक युक्ति होता है जिसमें धात्विक चालक पर आवेशों के संचयित होने के कारण वैद्युत ऊर्जा संचित होती है।
> जब चालकों से इस आवेश को उस परिपथ में बहने दिया जाता है, जिसमें संधारित्र जुड़ा होता है, तब यह संचित ऊर्जा हमें फिर से प्राप्त होती है।

$$dW = V\,dq = \frac{q}{C}\,dq \qquad (11.7)$$

संधारित्र को शून्य आवेश $(q = 0)$ से किसी आवेश $q = Q$ तक आवेशित करने के लिए किया गया कुल कार्य होता है :

$$W = \int_0^Q \left(\frac{q}{C}\right) dq = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} \qquad (11.8)$$

यह कार्य संधारित्र में **विद्युत् स्थितिज ऊर्जा** U के रूप में संचित होता है। चूंकि $Q = CV$, अतः

$$U = \frac{1}{2}CV^2 \qquad (11.9)$$

जहां V संधारित्र का अंतिम विभव है। समीकरण (11.8) और (11.9) सदैव सत्य होते हैं, चाहे संधारित्र का आकार या आमाप कुछ भी हो। इस तरह, $1\mu F$ धारिता के संधारित्र में जिसे 10 V के विभव तक आवेशित किया गया हो, संचित ऊर्जा U होती है :

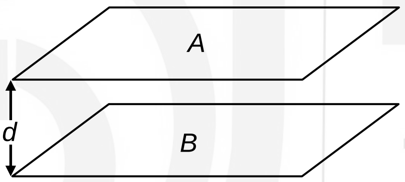
$$U = \frac{1}{2}(10^{-6}\text{F}) \times (10\,\text{V})^2 = 50 \times 10^{-6}\,\text{J}$$

अब हम समांतर प्लेट संधारित्र की चर्चा करेंगे। यह सबसे सरल संधारित्र होता है।

11.3 समांतर प्लेट संधारित्र

समांतर प्लेट संधारित्र में धातु की दो आयताकार या वृत्ताकार प्लेटें होती हैं, जो एक दूसरे के समांतर होती हैं और उनके बीच की दूरी d के बराबर होती है (चित्र 11.2)। **दूरी d का मान प्लेटों के साइज से बहुत कम होता है।**

यदि हम ऊपरी प्लेट पर धनात्मक आवेश $+Q$ रखें और निचली प्लेट पर ऋणात्मक आवेश $-Q$ रखें तो वह आवेश प्लेटों की सतहों पर एकसमान रूप से फैल जाता है। तब ऊपरी प्लेट पर पृष्ठ आवेश घनत्व होता है : $\sigma = \frac{Q}{A}$, जहां A प्लेटों का क्षेत्रफल है।



चित्र 11.2: समांतर प्लेट संधारित्र।

हम गाउस के प्रमेय का इस्तेमाल करके प्लेटों के बीच विद्युत्-क्षेत्र का मान ज्ञात कर सकते हैं। विद्युत्-क्षेत्र का मान है :

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \qquad (11.10)$$

विद्युत्-क्षेत्र प्लेटों की सतहों के लंबवत् है और उनके बीच की जगह में एकसमान है बशर्ते कि प्लेटों के बीच की दूरी का मान प्लेटों के साइज़ से बहुत कम हो। आगे पढ़ने से पहले आप इस परिणाम को सिद्ध करना चाहेंगे। इसके लिए बोध प्रश्न 2 हल करें।

बोध प्रश्न 2 – समांतर प्लेट संधारित्र में विद्युत्-क्षेत्र

गाउस के प्रमेय का प्रयोग करके समांतर प्लेट संधारित्र की प्लेटों के बीच विद्युत्-क्षेत्र की गणना करें। प्लेटों पर पृष्ठ आवेश घनत्व σ है।

इकाई 8 (अंत के प्रश्न 2 का हल) से आप जानते हैं कि संधारित्र के प्लेटों A और B के बीच विभवांतर है :

$$V = -\int_B^A \vec{\mathbf{E}}.d\vec{\mathbf{l}} = Ed = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}d = \frac{Q}{\varepsilon_0 A}d \qquad (11.11)$$

अतः

$$C = \frac{\varepsilon_0 A}{d} \tag{11.12}$$

उदाहरण के लिए, यदि संधारित्र की प्लेटें 10 cm भुजा वाले वर्ग के आकार की हों और उनके बीच की दूरी 1.0×10^{-4} m (0.1 mm) हो तो उसकी धारिता होगी :

$$C = \frac{(1.0\times10^{-1}\text{m})^2}{1.0\times10^{-4}\text{m}} \times 8.85\times10^{-12}\text{C}^2\text{N}^{-1}\text{m}^{-2} = 885\text{ pF} \approx 8.9\times10^{-10}\text{F}$$

बोध प्रश्न 3 – समांतर प्लेट संधारित्र की धारिता

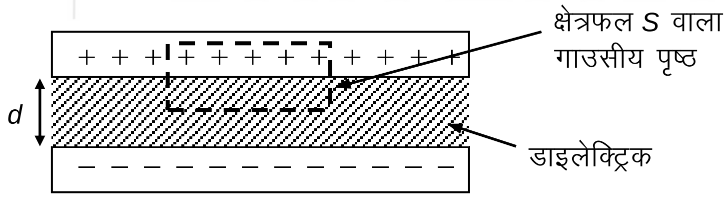
एक समांतर प्लेट संधारित्र की प्लेटों का क्षेत्रफल 1.0 cm^2 है और उनके बीच की दूरी 1.0×10^{-4} m है। संधारित्र की धारिता की गणना करें। यदि संधारित्र को 1.5 V वोल्टता वाली बैटरी से जोड़ा जाए तो उसमें संचित ऊर्जा की गणना करें।

जब हम समांतर प्लेट संधारित्र की प्लेटों के बीच में डाइलेक्ट्रिक पदार्थ रखते हैं, तब क्या होता है? आइये, पता लगाएं।

11.3.1 समांतर प्लेट संधारित्र जिसकी प्लेटों के बीच में डाइलेक्ट्रिक हो

इकाई 10 के भाग 10.5 में आपने पढ़ा है कि डाइलेक्ट्रिक माध्यम में विद्युत्-क्षेत्र सर्वत्र डाइलेक्ट्रिक नियतांक K के गुणक से कम हो जाता है [समीकरण (10.39क)]। इस परिणाम को हम समांतर प्लेट संधारित्र पर लागू कर सकते हैं : जब संधारित्र की समांतर प्लेटों के बीच में डाइलेक्ट्रिक पदार्थ रखा जाता है तब उसकी प्लेटों के बीच में विद्युत्-क्षेत्र डाइलेक्ट्रिक नियतांक K के गुणक से कम हो जाता है।

इस परिणाम को सिद्ध करने के लिए आइये, हम समांतर प्लेट संधारित्र लें जिसकी प्लेटों का क्षेत्रफल A हो और उनके बीच डाइलेक्ट्रिक पदार्थ रखा हो (चित्र 11.3)।



चित्र 11.3: समांतर प्लेट संधारित्र जिसकी प्लेटों के बीच डाइलेक्ट्रिक पदार्थ रखा है।

मान लें कि प्लेटों के बीच की दूरी d है और प्लेटों पर पृष्ठ आवेश घनत्व σ है। चित्र 11.3 देखें। अब हम डाइलेक्ट्रिक पदार्थों के लिए क्षेत्रफल S वाले पृष्ठ पर गाउस का नियम लागू करेंगे [इकाई 10 का समीकरण (10.30ख)] :

$$\oint \vec{\mathbf{D}}.d\vec{\mathbf{S}} = (Q_f)_{\text{परिबद्ध}}$$

क्योंकि $\vec{\mathbf{D}}$ संधारित्र की प्लेटों के लंबवत् है और उसमें केवल मुक्त पृष्ठ आवेश घनत्व का योगदान होता है, अतः

$$D = (Q/A) = \sigma \tag{11.13}$$

ध्यान दें कि, जैसाकि आपने इकाई 10 में पढ़ा है, परिबद्ध पृष्ठ आवेश का D के अभिवाह में योगदान नहीं होता। आगे, समीकरण (10.37) से हम जानते हैं कि

$$\vec{\mathbf{D}} = \varepsilon_0 K \vec{\mathbf{E}} \quad \text{or} \quad \vec{\mathbf{E}} = \frac{\vec{\mathbf{D}}}{\varepsilon_0 K} \qquad (11.14\text{क})$$

अतः, समीकरणों (11.13) और (11.14क) से हमें मिलता है :

$$E = \frac{D}{\varepsilon_0 K} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 K} \qquad (11.14\text{ख})$$

प्लेटों के बीच विभवांतर V का मान निम्नवत होता है : $V = Ed$ और समीकरण (11.14ख) का उपयोग करने पर हमें धारिता का मान मिलता है :

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\sigma A}{E d} = \frac{\sigma A \varepsilon_0 K}{\sigma d}$$

या

$$C = \frac{\varepsilon_0 K A}{d} \qquad (11.15)$$

समीकरण (11.15) और (11.12) की तुलना करने पर हम पाते हैं कि समांतर प्लेट संधारित्र की धारिता डाइलेक्ट्रिक नियतांक K के मान के गुणक से बढ़ जाती है। **यानी समांतर प्लेट संधारित्र की प्लेटों के बीच में डाइलेक्ट्रिक पदार्थ रखने पर उसकी धारिता बढ़ जाती है।**

डाइलेक्ट्रिक नियतांक का मान, प्लेटों के बीच में डाइलेक्ट्रिक पदार्थ रख कर और प्लेटों के बीच बिना डाइलेक्ट्रिक पदार्थ रखे, समांतर प्लेट संधारित्र की धारिता के अनुपात का मापन करके प्राप्त किया जा सकता है :

$$K = \frac{\text{धारिता का मान जब प्लेटों के बीच डाइलेक्ट्रिक हो}}{\text{धारिता का मान जब प्लेटों के बीच मुक्त आकाश हो}}$$

तालिका 11.1 में कुछ सामान्य डाइलेक्ट्रिक पदार्थों के आपेक्षिक विद्युतशीलता ε_r यानी डाइलेक्ट्रिक नियतांक K के मान दिए गए हैं।

चूंकि समीकरण (11.15) से धारिता का मान हम ऐसे लिख सकते हैं :

$$C = \frac{\varepsilon_0 A}{(d/K)} \qquad (11.16)$$

अतः, हम कह सकते हैं कि मोटाई d वाले डाइलेक्ट्रिक की **समतुल्य मुक्त स्थान मोटाई** (equivalent free space thickness) $\frac{d}{K}$ के बराबर है।

मुक्त स्थान मोटाई की संकल्पना हमें इस सवाल का जवाब देने में मदद देती है : **ऐसे संधारित्र की धारिता क्या होती है जिसकी प्लेटों के बीच की जगह में आंशिक रूप से डाइलेक्ट्रिक रखा जाता है**? आइये, इस सवाल का जवाब उदाहरण के द्वारा पता लगाएं।

तालिका 11.1: कुछ सामान्य डाइलेक्ट्रिक पदार्थों के आपेक्षिक विद्युतशीलता/ डाइलेक्ट्रिक नियतांक

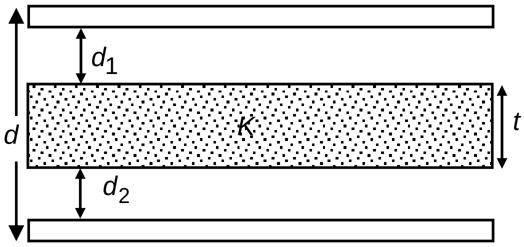
पदार्थ	डाइलेक्ट्रिक नियतांक
वायु	1.0006
अरंडी का तेल	4.7
अभ्रक	5 – 9
कांच	4.5 – 7.0
बैकेलाइट	4.5 – 7.5
कागज़	2.0 – 2.3
चीनी मिट्टी	5.5
क्वार्ट्ज़	1.5
पानी	80.4

उदाहरण 11.1 : आंशिक रूप से डाइलेक्ट्रिक पदार्थ से भरा संधारित्र

एक समांतर प्लेट संधारित्र लें जिसकी प्लेटों का क्षेत्रफल A हो। मान लें कि प्लेटों के बीच में मोटाई t और इन प्लेटों के बीच डाइलेक्ट्रिक नियतांक K वाली डाइलेक्ट्रिक की सिल्ली रखी जाती है (चित्र 11.4)। ध्यान दें कि डाइलेक्ट्रिक की सिल्ली की ऊपरी प्लेट से दूरी d_1 है और डाइलेक्ट्रिक की सिल्ली की निचली सतह की, संधारित्र की निचली प्लेट से दूरी d_2। संधारित्र की धारिता की गणना करें।

प्रयुक्त प्रतीकों के संदर्भ में आप ध्यान दें कि कुछ पुस्तकों में डाइलेक्ट्रिक नियतांक K को आपेक्षिक विद्युतशीलता ε_r भी कहा जाता है। हम इसे डाइलेक्ट्रिक नियतांक कहेंगे और इसे प्रतीक K से निरूपित करेंगे। परंतु, पूर्णता की दृष्टि से हमने आपेक्षिक विद्युतशीलता और इसके प्रतीक ε_r का भी जिक्र किया है।

हल ■



चित्र 11.4: डाइलेक्ट्रिक की समतुल्य मुक्त स्थान मोटाई के आधार पर संधारित्र की धारिता की गणना।

चित्र 11.4 से आप देख सकते हैं कि प्लेटों के बीच मुक्त स्थान मोटाई $(d-t)$ है। समीकरण (11.16) से मोटाई t और डाइलेक्ट्रिक नियतांक K वाली डाइलेक्ट्रिक की सिल्ली की मुक्त स्थान मोटाई (t/K) है। इस तरह, प्लेटों के बीच कुल मुक्त स्थान $(d-t+t/K)$ है तथा संधारित्र की धारिता है :

$$C = \frac{\varepsilon_0 A}{d-t+t/K} = \frac{\varepsilon_0 A K}{Kd-Kt+t} \tag{11.17}$$

हम धारिता की गणना दोनों प्लेटों के विभवों की गणना करके भी कर सकते हैं। चित्र 11.4 से आप देख सकते हैं कि

$$d = d_1 + d_2 + t \tag{11.18}$$

अब मान लें कि

V_1 संधारित्र की ऊपरी प्लेट और डाइलेक्ट्रिक की सिल्ली की ऊपरी सतह के बीच में विभवांतर है,

V_2 डाइलेक्ट्रिक की सिल्ली की ऊपरी सतह और निचली सतह के बीच में विभवांतर है,

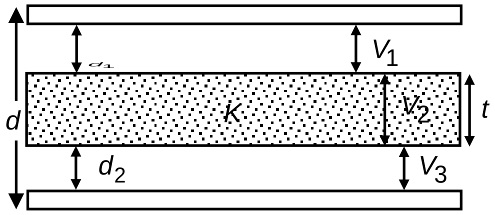
और

V_3 डाइलेक्ट्रिक की सिल्ली की निचली सतह और संधारित्र की निचली प्लेट के बीच में विभवांतर है।

ये तीनों विभवांतर आप चित्र 11.5 में देख सकते हैं।

संधारित्र पर कुल वोल्टता V इन तीनों विभवांतरों का योग है :

इस तरह, $$V = V_1 + V_2 + V_3 \tag{11.19}$$



चित्र 11.5: विभवांतरों से संधारित्र की धारिता की गणना।

यदि डाइलेक्ट्रिक के भीतर विद्युत क्षेत्र का मान $\vec{\mathbf{E}}$ हो , तब

$$V_1 = d_1 E, \qquad V_2 = E\frac{t}{K} \qquad \text{and} \qquad V_3 = d_2 E \qquad (11.20)$$

$$\therefore \qquad V = d_1 E + \frac{Et}{K} + d_2 E = (d_1 + d_2)E + \frac{Et}{K}$$

समीकरण (11.18) से $d_1 + d_2 = d - t$ का इस्तेमाल करने पर, हम लिख सकते हैं :

$$V = (d - t)E + \frac{Et}{K} = (d - t + \frac{t}{K})E \qquad (11.21)$$

समीकरण (11.21) की V, E और d के व्यापक संबंध ($V = Ed$), से तुलना करने पर हम पाते हैं कि डाइलेक्ट्रिक की समतुल्य मुक्त स्थान मोटाई है :

$$(d - t + \frac{t}{K}) \qquad (11.22)$$

अतः संधारित्र की धारिता C पहले की तरह है :

$$C = \frac{\varepsilon_0 A}{d - t + (t/K)} \qquad (11.23)$$

आगे पढ़ने से पहले आप एक बोध प्रश्न हल करें।

बोध प्रश्न 4 – आंशिक रूप से डाइलेक्ट्रिक से भरा संधारित्र

समांतर प्लेट संधारित्र की प्लेटों के बीच की जगह में डाइलेक्ट्रिक नियतांक 3 वाला डाइलेक्ट्रिक रखा गया है। परिकलित करें कि यदि डाइलेक्ट्रिक पदार्थ, प्लेटों के बीच की जगह के केवल 3/4 हिस्से में रखा गया हो तो संधारित्र की धारिता कितनी बढ जायेगी।

भाग 11.2.1 में आपने सीखा है कि संधारित्रों का प्रयोग आवेश और ऊर्जा संचित करने के लिए किया जाता है। आप जानते हैं कि यदि संधारित्रों के चालकों के बीच की जगह में डाइलेक्ट्रिक पदार्थ रखा जाए तो उनकी धारिता (अतः उनकी आवेश और ऊर्जा संचित करने की क्षमता) बढ़ जाती है। इससे जुड़ा एक तर्कसंगत सवाल यह भी है कि **डाइलेक्ट्रिक माध्यम में कितनी ऊर्जा संचित होती है?** आइये, समांतर प्लेट संधारित्र के लिए इस सवाल के जवाब का पता लगाएं।

11.3.2 डाइलेक्ट्रिक माध्यम में संचित ऊर्जा

समीकरण (11.9) से आप जानते हैं कि समांतर प्लेट संधारित्र में संचित ऊर्जा का मान होता है :

$$U = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{Q^2}{2C}$$

समीकरण (11.12) से आप जानते हैं कि यदि संधारित्र की प्लेटों के बीच मुक्त स्थान हो तो उसकी धारिता का मान होता है :

$$C = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$$

आप यह भी जानते हैं कि $V = Ed$

ऊर्जा U के व्यंजक [समीकरण (11.9)] में ये मान रखने पर, हमें मिलता है :

$$U = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 A}{d}E^2 d^2$$

$$= \frac{1}{2}\varepsilon_0 (Ad) E^2 d^2$$

या $$\frac{U}{\tau} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \text{ जहां आयतन } \tau = Ad \qquad (11.24)$$

समीकरण (11.24) से संधारित्र में प्रति एकक आयतन संचित ऊर्जा का मान प्राप्त होता है।

जब संधारित्र की प्लेटों के बीच डाइलेक्ट्रिक नियतांक K वाला डाइलेक्ट्रिक पदार्थ रखा जाता है, तब संधारित्र की प्रभावी धारिता का मान समीकरण (11.15) से व्यक्त होता है :

$$C_{\text{डाइलेक्ट्रिक}} = \frac{\varepsilon_0 KA}{d}$$

अतः, डाइलेक्ट्रिक नियतांक K वाले डाइलेक्ट्रिक पदार्थ से भरे संधारित्र में संचित ऊर्जा का व्यंजक होगा :

$$U = \frac{1}{2}C_{\text{डाइलेक्ट्रिक}}V^2$$

या $$U = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 KA}{d}E^2 d^2$$

$$= \frac{1}{2}\varepsilon_0 (Ad) KE^2$$

$$\therefore \quad \frac{U}{\tau} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 KE^2 = \frac{1}{2}\vec{\mathbf{E}}.\vec{\mathbf{D}} \qquad (11.25)$$

यहां $\vec{\mathbf{D}}$ डाइलेक्ट्रिक में विद्युत् विस्थापन है। अतः, संधारित्र की प्लेटों के बीच मुक्त स्थान होने पर संधारित्र में प्रति एकक आयतन संचित ऊर्जा का मान $\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$ होता है जो संधारित्र की प्लेटों के बीच डाइलेक्ट्रिक नियतांक K वाला डाइलेक्ट्रिक पदार्थ रखने पर हो जाता है : $\frac{1}{2}\varepsilon_0 KE^2 = \frac{1}{2}\vec{\mathbf{E}}.\vec{\mathbf{D}}$ ।

अतः डाइलेक्ट्रिक माध्यम में प्रति एकक आयतन संचित ऊर्जा होती है :

$$\frac{U}{\tau} = \frac{1}{2}\vec{\mathbf{E}}.\vec{\mathbf{D}}\,\text{Jm}^{-3} \qquad (11.26)$$

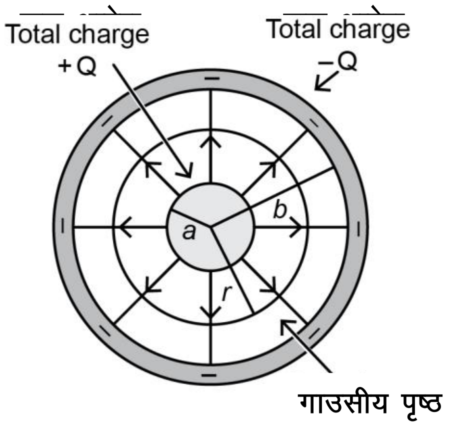
यहां हमने रैखिक डाइलेक्ट्रिक की चर्चा की है जिसके लिए $\vec{\mathbf{E}}$ और $\vec{\mathbf{D}}$ एक ही दिशा में होते हैं।

अब तक हमने समांतर प्लेट संधारित्र की धारिता का परिकलन किया है। अब हम गोलीय संधारित्र और बेलनाकार संधारित्र की धारिता का परिकलन करेंगे।

11.4 गोलीय और बेलनाकार संधारित्रों की धारिता

आइये, पहले हम गोलीय संधारित्र की चर्चा करें।

क) गोलीय संधारित्र



चित्र 11.6: त्रिज्या *a* तथा *b* वाले दो संकेन्द्री गोलीय कोशों से बना गोलीय संधारित्र।

चित्र 11.6 में एक गोलीय संधारित्र दिखाया गया है जिसमें दो संकेंद्री गोलीय कोश, जिनकी त्रिज्याएं a और b हैं, दिखाए गए हैं। हम मान लेते हैं कि $b > a$। मान लें कि भीतरी कोश पर आवेश Q है। यदि σ पृष्ठ आवेश घनत्व होतो $Q = 4\pi a^2 \sigma$।
अब हम गोलीय कोशों के बीच की जगह में स्थित गोलीय गाउसीय पृष्ठ S लेते हैं जिसकी त्रिज्या r है। ध्यान दें कि $\vec{\mathbf{E}}$ त्रिज्या दिशा में है। अतः यह पृष्ठ के अभिलंब $d\vec{\mathbf{S}}$ के समांतर है और $\oint_S \vec{\mathbf{E}}.d\vec{\mathbf{S}} = EA$, जहां A गाउसीय पृष्ठ के पृष्ठ का क्षेत्रफल

है। इस तरह $$\oint_S \vec{\mathbf{E}}.d\vec{\mathbf{S}} = EA = E4\pi r^2 = \frac{Q_{en}}{\varepsilon_0} = \frac{4\pi a^2\sigma}{\varepsilon_0}$$

या $$E = \frac{a^2\sigma}{\varepsilon_0}\frac{1}{r^2} \qquad (11.27)$$

विभवांतर $(V_a - V_b)$ होता है : $= \int_a^b \vec{\text{E}}.d\vec{\mathbf{r}}$

$$V = V_a - V_b = -\int_b^a \vec{\mathbf{E}}\,.\,d\vec{\mathbf{r}} = \int_a^b E\,dr \quad \text{(चूंकि } \vec{\mathbf{E}}, d\vec{\mathbf{r}} \text{ के अनुदिश है)}$$

या $$V = \int_a^b \frac{a^2\sigma}{\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}dr = -\frac{a^2\,\sigma}{\varepsilon_0}\frac{1}{r}\bigg|_a^b = \frac{a^2\,\sigma}{\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) \qquad (11.28)$$

अतः $$C = \frac{Q}{V} = \frac{4\pi a^2\sigma}{V} = \frac{4\pi\varepsilon_0}{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)} = \frac{4\pi\varepsilon_0\,ab}{(b-a)} \qquad (11.29)$$

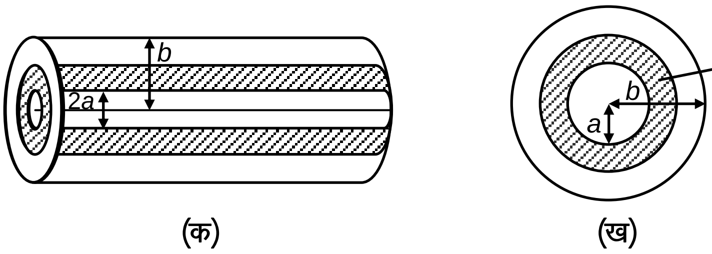
> V के लिए समाकल हल करने के लिए हमने इस परिणाम का इस्तेमाल किया है:
> $$\int \frac{dr}{r^2} = -\frac{1}{r}$$

यदि बाहरी पृष्ठ ∞ पर हो तो $b \to \infty$ और $C = 4\pi\varepsilon_0 a$।

ख) बेलनाकार संधारित्र

चित्र 11.7क में बेलनाकार संधारित्र का आरेख दिखाया गया है। यह दो खोखले समाक्ष (coaxial) बेलनाकार चालकों से बना होता है जिनकी त्रिज्याएं क्रमशः a और

b होती हैं। बेलनों के बीच की जगह में डाइलेक्ट्रिक नियतांक K वाला डाइलेक्ट्रिक पदार्थ रखा होता है। इस संधारित्र का एक आवर्धित अनुप्रस्थ काट चित्र 11.7ख में दिखाया गया है।



चित्र 11.7: क) बेलनाकार संधारित्र; ख) बेलनाकार संधारित्र का अनुप्रस्थ काट।

बेलनाकार संधारित्रों के कुछ उदाहरण हैं :

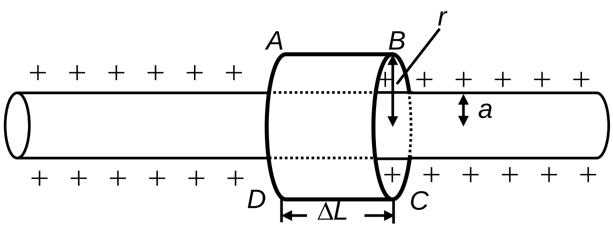
i) समाक्ष केबल जिसमें भीतरी चालक तार होता है और बाहरी चालक तार की जाली होती है जिनके बीच में विद्युतरोधी पदार्थ होता है जो प्रायः प्लास्टिक होता है।

ii) समुद्री केबल जिसमें तांबे का चालक पदार्थ पॉलीस्टिरीन से ढ़का रहता है तथा समुद्र का पानी बाहरी चालक का काम करता है।

ये संधारित्र हमारे चारों ओर आम तौर पर इस्तेमाल होते हैं। अतः इनकी धारिता का परिकलन महत्वपूर्ण होता है। अब हम बेलनाकार संधारित्र की प्रति एकक लंबाई की धारिता का परिकलन करेंगे।

चूंकि समाक्ष संधारित्र के भीतरी और बाहरी बेलन चालक हैं, अतः वे समविभव सतहें हैं (इकाई 9 का भाग 9.3 देखें)। विद्युत्-क्षेत्र त्रिज्य दिशा में होता है यानी बेलन की सतह के लंबवत् होता है। मान लें कि λ संधारित्र के भीतरी बेलन पर प्रति एकक लंबाई आवेश है (देखें चित्र 11.8)। बाहरी बेलन भूसंपर्कित है। बाहरी बेलन की भीतरी सतह पर विपरीत चिन्ह् का परंतु बराबर मान का आवेश प्रकट होता है जिसे चित्र में नहीं दिखाया गया है। ऐसा इसलिए है क्योंकि चालक के भीतर विद्युत्-क्षेत्र का मान शून्य होता है।

बेलनाकार संधारित्र का विद्युत्-क्षेत्र परिकलित करने के लिए हम एक समाक्ष संवृत बेलनाकार गाउसीय पृष्ठ $ABCD$ लेते हैं, जिसकी लंबाई ΔL है और त्रिज्या r है (चित्र 11.8 देखें)।



चित्र 11.8: बेलनाकार संधारित्र की धारिता का परिकलन। *ABCD* गाउसीय पृष्ठ है।

विद्युत्-क्षेत्र भीतरी बेलन की सतह के लंबवत् होगा तथा भीतरी और बाहरी दोनों बेलनों के बीच के स्थान में सीमित होता है। गाउसीय बेलन $ABCD$ की ऊपरी और निचली सतहों से विद्युत् विस्थापन सदिश $\vec{\mathbf{D}}$ का अभिवाह शून्य होता है क्योंकि $\vec{\mathbf{D}}$ इन सतहों के समांतर होता है यानी वह $d\vec{\mathbf{S}}$ के लंबवत् होता है (क्योंकि परिभाषा से, $d\vec{\mathbf{S}}$ सतह के लंबवत् होता है)। चूंकि $\vec{\mathbf{D}}$ त्रिज्या दिशा में होता है, अतः बेलन की वक्र सतह के सभी बिंदुओं पर वह सतह के लंबवत् यानी $d\vec{\mathbf{S}}$ के समांतर होता है और $\vec{\mathbf{D}}.d\vec{\mathbf{S}}$ परिमित होता है। अतः इस संवृत गाउसीय पृष्ठ के वक्र भाग से हो कर जाने वाला अभिवाह है :

$$\vec{\mathbf{D}}.d\vec{\mathbf{S}} = \vec{\mathbf{D}}.\hat{\mathbf{n}}d\vec{\mathbf{S}} = D(2\pi r)\Delta L = \text{समाहित आवेश} = \lambda\Delta L \tag{11.30}$$

या
$$D = \frac{\lambda}{2\pi r} = \varepsilon E = \varepsilon_0 KE \tag{11.31}$$

जहां $\lambda\,\Delta L$ गाउसीय पृष्ठ द्वारा समाहित मुक्त आवेश है और K डाइलेक्ट्रिक नियतांक है। अतः

$$E = \frac{\lambda}{2\pi r \varepsilon_0 K} \tag{11.32}$$

धारिता का मान प्राप्त करने के लिए, हमें भीतरी और बाह्य बेलनों के बीच विभवांतर परिकलिक करना है। इन बेलनों के बीच विभवांतर होगाः

$$V_a - V_b = -\int_b^a \vec{\mathbf{E}}.d\vec{\mathbf{r}} = \int_a^b \vec{\mathbf{E}}.d\vec{\mathbf{r}} \tag{11.33}$$

चूंकि बेलनाकार सममिति के लिए, $\vec{\mathbf{E}}$ और $d\vec{\mathbf{r}}$ समान दिशा में होते हैं, $\vec{\mathbf{E}}.d\vec{\mathbf{r}} = E\,dr$ ।
अतः

$$V = \int_a^b E.dr$$

या
$$V = \int_a^b \left(\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 K}\right)\frac{dr}{r} = \left(\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 K}\right)[\ln r]_a^b$$

या
$$V = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 K}\ln\left(\frac{b}{a}\right) \tag{11.34}$$

अतः बेलनाकार संधारित्र की प्रति एकक लंबाई की धारिता है :

$$C = \frac{\lambda}{V} = \frac{2\pi\varepsilon_0 K}{\ln(b/a)} \tag{11.35}$$

बेलनाकार संधारित्र की प्रति एकक लंबाई की धारिता के समीकरण (11.35) द्वारा दिए गए व्यंजक से हम पाते हैं कि **धारिता का मान भीतरी और बाहरी बेलनों की त्रिज्याओं के अनुपात पर निर्भर करती है न कि उनके निरपेक्ष मान पर।**

आप विभिन्न संधारित्रों की धारिता परिकलित करने से संबंधित कुछ प्रश्न हल करना चाहेंगे। अतः आगे पढ़ने से पहले आप एक बोध प्रश्न हल करें।

बोध प्रश्न 5 – बेलनाकार और गोलीय संधारित्र की धारिता

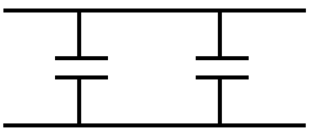
क) दो बेलनाकार संधारित्र समान लंबाई के हैं और उनके बीच में एक ही डाइलेक्ट्रिक पदार्थ रखा है। उनमें से एक के भीतरी और बाहरी बेलनों की त्रिज्याएं क्रमशः 8 cm और 10 cm है, और दूसरे के भीतरी और बाहरी बेलनों की त्रिज्याएं क्रमशः 4 cm और 5 cm हैं। उनकी धारिताओं का अनुपात प्राप्त करें।

ख) एक गोलीय संधारित्र में वायु परत की मोटाई 4.0 cm है। इसकी धारिता का मान व्यास 30 cm वाले एक विद्युतरोधी चालक गोले की धारिता के बराबर है। गोलीय संधारित्र की सतहों की त्रिज्याएं परिकलित करें।

11.5 श्रेणी और समांतर क्रम में संयोजित संधारित्र

प्रतिरोधों की तरह विद्युत् परिपथों में संधारित्रों का संयोजन भी भिन्न प्रकार से किया जाता है। उदाहरण के लिए, श्रेणी और समांतर क्रम में या उनके किसी संयोजन में। इस भाग में हम श्रेणी और समांतर क्रम में संधारित्रों के संयोजन की समतुल्य धारिता का परिकलन करेंगे। इसमें मूलभूत सिद्धांत यह है कि **यदि समतुल्य संधारित्र और संधारित्रों का संयोजन एक ही विभवांतर पर रखा जाये तो समतुल्य संधारित्र पर आवेश, संधारित्रों के संयोजन पर आवेश के बराबर होगा।** उस समतुल्य संधारित्र की धारिता, संधारित्रों के संयोजन की **प्रभावी धारिता** कहलाती है।

पहले हम **संधारित्रों के समांतर क्रम में संयोजन** की प्रभावी धारिता प्राप्त करेंगे।



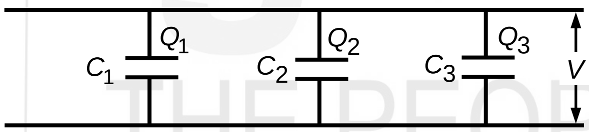
चित्र 11.9: श्रेणी क्रम में संयोजित दो संधारित्र।

11.5.1 समांतर क्रम में संधारित्रों का संयोजन

चित्र 11.9 में दो संधारित्रों का समांतर क्रम में संयोजन दिखाया गया है। इस संयोजन में

- प्लेटों के बीच में विभवांतर एक ही रहता है।
- कुल आवेश प्रत्येक संधारित्र पर आवेश के योग के बराबर है (क्योंकि आवेश संचित करने के लिए अधिक क्षेत्रफल उपलब्ध होता है)।

अब हम तीन संधारित्रों के समांतर क्रम में संयोजन की प्रभावी धारिता प्राप्त करेंगे जिसे चित्र 11.10 में दिखाया गया है।



चित्र 11.10: समांतर क्रम में संधारित्र।

यहां C_1, C_2 और C_3 क्रमशः तीनों संधारित्रों की धारिताएं हैं, Q_1, Q_2 और Q_3 उन पर उपस्थित आवेश हैं और V प्रत्येक संधारित्र की प्लेटों के बीच में विभवांतर है। मान लें कि C संयोजन की **प्रभावी धारिता** है। समांतर क्रम में इस संयोजन का कुल आवेश Q है :

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 \tag{11.36}$$

चूंकि संधारित्रों के समांतर क्रम में इस संयोजन का विभवांतर V प्रत्येक संधारित्र की प्लेटों के बीच में विभवांतर के बराबर है, अतः

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q_1 + Q_2 + Q_3}{V} = \frac{Q_1}{V} + \frac{Q_2}{V} + \frac{Q_3}{V}$$

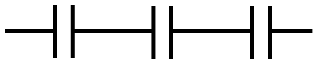
या

$$\boxed{C = C_1 + C_2 + C_3} \tag{11.37}$$

अतः **समांतर क्रम में संयोजित संधारित्रों की प्रभावी धारिता उन संधारित्रों की धारिताओं के योग के बराबर होती है।**

आइये, अब हम विद्युत् परिपथों में श्रेणी क्रम में संयोजित संधारित्रों की प्रभावी धारिता प्राप्त करें।

11.5.2 श्रेणी क्रम में संधारित्रों का संयोजन



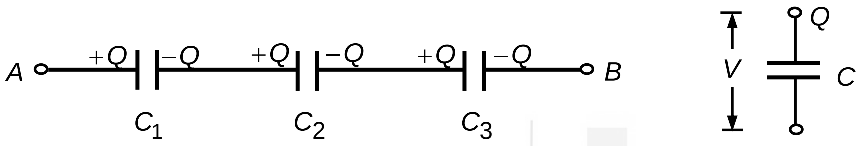
चित्र 11.11: श्रेणी क्रम में संयोजित संधारित्र।

चित्र 11.11 में श्रेणी क्रम में संयोजित संधारित्र दिखाए गए हैं।

इस संयोजन में

- यदि एक विभव स्रोत को पहले संधारित्र की पहली प्लेट और आखरी संधारित्र की दूसरी प्लेट के बीच में जोड़ दिया जाए, तो प्रत्येक संधारित्र पर बराबर मात्रा का आवेश प्रेरित होगा, और
- प्रत्येक संधारित्र पर विभवांतर इसकी धारिता पर निर्भर करेगा।

आइये, अब हम चित्र 11.12 में दिखाए गए श्रेणी क्रम में संयोजित तीन संधारित्रों की प्रभावी धारिता प्राप्त करें। यहां C_1, C_2 और C_3 क्रमशः तीन संधारित्रों की धारिताएं हैं।



चित्र 11.12: श्रेणी क्रम में संधारित्र।

जब इस संयोजन के सिरों A और B पर विभवांतर V लगाया जाता है, तब एक प्लेट पर आवेश $+Q$ आवेश प्रेरित होता है जो दूसरी प्लेट पर आवेश $-Q$ प्रेरित करता है। अन्य प्लेटों पर स्थिर वैद्युत प्रेरण के कारण समान और विपरीत आवेश आ जाता है।

प्रत्येक संधारित्र पर विभवांतर उसकी धारिता के व्युत्क्रमानुपाती होता है (चूंकि $C = Q/V, V = Q/C$)। चूंकि Q नियत है, अतः $V \propto 1/C$.।

अतः प्रत्येक संधारित्र पर विभवांतर होगा :

$$V_1 \propto 1/C_1, \quad V_2 \propto 1/C_2 \text{ और } \quad V_3 \propto 1/C_3$$

अब हम तीनों संधारित्रों के स्थान पर धारिता C का एक संधारित्र रखते हैं, जिस पर आवेश Q है, जब उस पर विभवांतर $V = V_1 + V_2 + V_3$ है। इस धारिता को हम संयोजन की **प्रभावी धारिता** कहते हैं। इस प्रकार

$$C = \frac{Q}{V} \quad \text{या} \quad \frac{1}{C} = \frac{V}{Q}$$

लेकिन $V = V_1 + V_2 + V_3$। इसलिए हम लिख सकते हैं :

$$\frac{1}{C} = \frac{V_1 + V_2 + V_3}{Q} = \frac{V_1}{Q} + \frac{V_2}{Q} + \frac{V_3}{Q}$$

या

$$\boxed{\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}} \tag{11.38}$$

अतः **श्रेणी क्रम में संयोजित संधारित्रों की प्रभावी धारिता का व्युत्क्रम प्रत्येक संधारित्र की धारिता के व्युत्क्रम के योग के बराबर होता है।**

आगे पढ़ने से पहले आप एक बोध प्रश्न हल करें।

बोध प्रश्न 6 – विभिन्न संयोजनों में संधारित्र

क) चित्र 11.11 में दिखाए गए संधारित्रों के संयोजन की प्रभावी धारिता प्राप्त करें और प्रत्येक संधारित्र पर विभवांतर प्राप्त करें। दिया है कि $C_1 = 0.05\ \mu F$, $C_2 = 0.02\ \mu F$, $C_3 = 0.01\ \mu F$ और $V = 220\ V$ ।

ख) तीन संधारित्रों को इस प्रकार जोड़ा गया है कि इनमें से दो संधारित्र (C_1 और C_2) श्रेणी क्रम में संयोजित हैं और तीसरा संधारित्र (C_3) श्रेणी में जुड़े संधारित्रों के संयोजन से समांतर क्रम में जुड़ा हुआ है। संधारित्रों के इस संयोजन की प्रभावी धारिता प्राप्त करें।

11.6 व्यवहारिक संधारित्रों में डाइलेक्ट्रिक पदार्थों के अनुप्रयोग

इकाई 10 में आपने पढ़ा है कि डाइलेक्ट्रिक पदार्थों के संधारित्रों में महत्वपूर्ण अनुप्रयोग होते हैं। यद्यपि अनुप्रयोगों के हिसाब से तय होता है कि डाइलेक्ट्रिक पदार्थों में कौन से गुणधर्म आवश्यक हैं लेकिन फिर भी डाइलेक्ट्रिक पदार्थों में कुछ गुणधर्म संधारित्रों में उनके उपयोग के लिए वांछनीय होते हैं। प्रायः व्यावहारिक संधारित्रों को छोटा होना चाहिए, उनका प्रतिरोध अधिक होना चाहिए, उनका उपयोग उच्च तापमान पर और लंबे समय तक हो सकना चाहिए। साथ ही, उनकी कीमत कम होनी चाहिए।

विविध अनुप्रयोगों के अनुसार भिन्न संधारित्रों में विविध डाइलेक्ट्रिक पदार्थों, जैसे कि क्राफ्ट, कागज, पतली फिल्म, सिरेमिक आदि का प्रयोग किया जाता है। उदाहरण के लिए, खास तौर पर बनाए गए पतले **क्राफ्ट कागज** का, जिसमें छेद या चालक कण न हों, **शक्ति संधारित्रों** में प्रयोग होता है जहां अधिक वोल्टता सहन करना अधिक महत्वपूर्ण होता है न कि डाइलेक्ट्रिक हानि को कम करना। इसके साथ्-साथ क्राफ्ट कागज़ को किसी उचित तरल द्वारा संसेचित किया जाता है। इससे डाइलेक्ट्रिक नियतांक अधिक हो जाता है, संधारित्र छोटा हो जाता है और उसकी भंजन वोल्टता अधिक हो जाती है।

संधारित्र में टेफलॉन, मायलार या पॉलिथीन की पतली फ़िल्मों के इस्तेमाल से वह छोटा हो जाता है और उसकी प्रतिरोधकता अधिक हो जाती है। टेफलॉन का उच्च आवृत्तियों पर प्रयोग होता है क्योंकि इसमें डाइलेक्ट्रिक हानि कम होती है। ऐसे संधारित्रों में संसेचित कागज़ पर विद्युत् अपघट्य की एक पतली परत का लेप कर दिया जाता है। क्योंकि परत बहुत पतली होती है, इसलिए संधारित्र छोटा होता है। इन संधारित्रों के लिए, ध्रुवणता और अधिकतम कार्यकारी वोल्टता महत्वपूर्ण गुणधर्म हैं।

कुछ सिरेमिक संधारित्रों का इलेक्ट्रॉनिक परिपथों में प्रयोग होता है। जिन उच्च डाइलेक्ट्रिक नियतांक वाले पदार्थों में तापमान के साथ डाइलेक्ट्रिक नियतांक के मान में परिवर्तन कम होता है, उनके इस्तेमाल से संधारित्र छोटे हो जाते हैं। बेरियम टाइटेनैट और इसके रूपांतरण ऐसे पदार्थों के अच्छे उदाहरण हैं।

आइये, अब हम कुछ आम संधारित्रों के बारे में पढ़ें जिनमें ऐसे डाइलेक्ट्रिक पदार्थों का इस्तेमाल होता है। मोटे तौर पर हम संधारित्रों को दो समूहों में बांट सकते हैं : **अचर**

संधारित्र और **चर संधारित्र**। इनकी ज्यामिति और प्रयोग के आधार पर हम इन्हें आगे फिर से वर्गीकृत कर सकते हैं। नीचे संधारित्रों के वर्गीकरण दिया गया है।

संधारित्रों के प्रकार

- **अचर संधारित्र**
  - **कागज़ वाले संधारित्र**
  - **अभ्रक वाले संधारित्र**
  - **सिरेमिक संधारित्र**
  - **विद्युत् अपघटनी संधारित्र**
- **चर संधारित्र**
  - **गेज वाला संधारित्र जिसे टयूब वाले अभिग्राही में प्रयोग में लाते हैं।**
  - **गेज वाला संधारित्र जिसे ट्रांज़िस्टर वाले अभिग्राही में प्रयोग में लाते हैं।**
  - **सूक्ष्म समंजक संधारित्र**

चित्र 11.13: व्यवहारिक संधारित्रों का वर्गीकरण।

अब हम चित्र 11.13 में दिखाए गए कुछ आम संधारित्रों का संक्षिप्त विवरण देंगे।

अचर संधारित्र

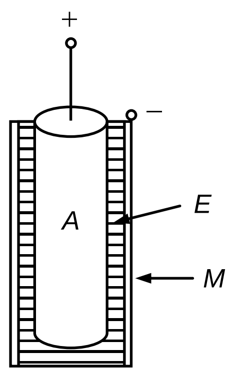
चित्र 11.14: अचर संधारित्र।

जैसा कि इनके नाम से स्पष्ट है, इन संधारित्रों की धारिता अचर रहती है। वास्तव में ये समांतर प्लेट संधारित्र होते हैं, लेकिन बहुत छोटे होते हैं ताकि ये बहुत कम जगह घेरें। इन संधारित्रों में, अभ्रक या कागज़ (जिन पर पैराफीन की एकसमान परत का लेप किया गया हो) की सतहों पर धातु की दो पतली परतों का लेपन किया जाता है। अभ्रक या कागज़, चालकों के बीच डाइलेक्ट्रिक की भांति कार्य करता है। इस संयोजन को मोड़ कर संहत किया जाता है (चित्र 11.14)। यद्यपि पैराफीन्-मोम वाला कागज़ का संधारित्र सस्ता होता है, यह अच्छी मात्रा में शक्ति अवशोषित कर लेता है। इसलिए इस प्रकार के संधारित्रों को हम प्रत्यावर्ती धारा परिपथों, रेडियो आदि में प्रयोग में लाते हैं।

सिरेमिक संधारित्र

ये सभी आवृत्तियों पर कम हानि वाले संधारित्र हैं। सिरेमिक पदार्थ इस तरह से बनाए जा सकते हैं कि उनके डाइलेक्ट्रिक नियतांक बहुत अधिक हो सकते हैं। उदाहरण के लिए, टेफलॉन के लिए $\varepsilon = 8$ है लेकिन टाइटेनियम मिलाने से इसके लिए ε का मान 100 हो जाता है और बेरियम टाइटेनेट मिलाने से ε का मान 5000 हो जाता है। इस प्रकार के प्रत्येक डाइलेक्ट्रिक की दोनों सतहों पर चांदी की परत का लेप किया जाता है जिससे हम एक बहुत अधिक धारिता वाला संधारित्र बना सकते हैं। इन डाइलेक्ट्रिक पदार्थों का दूसरा लाभ यह है कि इनका ऋणात्मक तापमान गुणांक होता है। सिरेमिक संधारित्रों को मुख्य रूप से ट्रांजिस्टर के परिपथों में प्रयोग में लाया जाता है।

विद्युत् अपघटनी संधारित्र

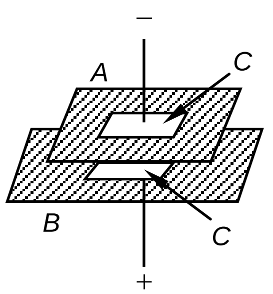


चित्र 11.15: गीले प्रकार का विद्युत् अपघटनी संधारित्र।

विद्युत् अपघटनी संधारित्र में एल्युमिनियम के दो इलेक्ट्रोड होते हैं, जिनमें एक धनात्मक तथा दूसरा ऋणात्मक होता है। धनात्मक प्लेट पर विद्युत् अपघटन द्वारा एल्यूमिनियम ऑक्साइड की एक पतली परत का लेप कर दिया जाता है। यह परत एक डाइलेक्ट्रिक की भांति कार्य करती है। इन दो इलेक्ट्रोडों को विद्युत् अपघट्य के द्वारा संपर्क में रखा जाता है, जो ग्लीसरीन और सोडियम का घोल (या किसी बोरेट का पेस्ट, उदाहरणार्थ, अमोनियम बोरेट) होता है। विद्युत् अपघटनी संधारित्र दो प्रकार के होते हैं : गीले प्रकार के और सूखे प्रकार के।

गीले प्रकार के विद्युत् अपघटनी संधारित्रों में (चित्र 11.15) धनात्मक प्लेट (*A*) बेलन के आकार की होती है और इसकी सतह का क्षेत्रफल बहुत अधिक होता है। इसे विद्युत् अपघट्य (*E*) के भीतर डाल दिया जाता है, जो धातु के बर्तन (*M*) में होता है। यह एक ऋणात्मक प्लेट की तरह कार्य कर सकता है।

सूखे प्रकार के संधारित्र में (चित्र 11.16) दोनों प्लेटें एल्यूमिनियम की लंबी पत्तियों के रूप में होती हैं। दोनों में से एक पत्ती (*A*) पर एल्युमिनियम ऑक्साइड की परत विद्युत् अपघटन के द्वारा जमाई जाती है। इसे दूसरी पत्ती (*B*) से विद्युत् अपघट्य से भीगी हुई रूई (*C*) द्वारा अलग रखा जाता है। इन पत्तियों को बेलन के आकार में लपेट दिया जाता है। एल्यूमिनियम पर जमाई गई ऑक्साइड की परतों का, धारा के लिए एक दिशा में बहुत कम प्रतिरोध होता है और दूसरी दिशा में बहुत अधिक प्रतिरोध होता है। इसलिए **एक विद्युत् अपघटनी संधारित्र को दिष्टधारा परिपथ में इस प्रकार जोड़ना चाहिए कि ऑक्साइड वाली प्लेट का विभव दूसरी प्लेट की तुलना में सदैव धनात्मक हो।**



चित्र 11.16: सूखे प्रकार का विद्युत् अपघटनी संधारित्र।

परिवर्तनशील वायु संधारित्र/गुम्फित संधारित्र

एक आम इस्तेमाल में आने वाला संधारित्र, जिसकी धारिता को लगातार बदला जा सकता है, रेडियो में विभिन्न स्टेशनों को पकड़ने के लिए इस्तेमाल होता है। इस संधारित्र की धारिता को एकसमान रूप से, एक घुंडी को घुमाकर बदला जा सकता है (चित्र 11.17)।

चित्र 11.17: परिवर्तनशील वायु संधारित्र। (Source: freewebs.com)

इस संधारित्र में एल्यूमिनियम की अर्धगोलाकार प्लेटों के दो समूह होते हैं। प्लेटों का एक समूह स्थिर होता है तथा प्लेटों के दूसरे समूह को एक घुंडी की मदद से घुमाया जा सकता है। घुंडी को घुमाने पर प्लेटों का अस्थिर समूह, प्लेटों के स्थिर समूह के बीच की जगह के अंदर चला जाता है (या बाहर की तरफ आ जाता है)। इस प्रकार प्लेटों के दोनों समूहों के अतिव्यापन के क्षेत्रफल को एकसमान रूप से बदला जा सकता है। इससे संधारित्र की धारिता बदल जाती है। प्लेटों के बीच में स्थित हवा डाइलेक्ट्रिक का काम करती है। आम तौर पर इसमें एक ही घुंडी से जुड़े दो संधारित्र होते हैं। जब घुंडी को घुमाया जाता है तो प्लेटों के दोनों समूहों की धारिता, एक साथ बदलती है। ये संधारित्र ज़्यादातर वायरलेस तथा इलेक्ट्रॉनिक परिपथों में इस्तेमाल किये जाते हैं।

संधारित्र का वोल्टता अनुमतांक

संधारित्रों का डिज़ाइन और निर्माण इस तरह से किया जाता है कि वे एक अधिकतम वोल्टता तक ठीक से बिना किसी क्षति के काम कर सकें। यह अधिकतम वोल्टता संधारित्र की प्लेटों के बीच की दूरी पर निर्भर करती है। यदि वोल्टता को इससे अधिक कर दिया जाये तो इलेक्ट्रॉन प्लेटों के बीच की जगह को लांघ कर दूसरी प्लेट तक पहुंच जाते हैं जिससे संधारित्र को स्थायी क्षति भी पहुंच सकती है। अधिकतम वोल्टता जिससे संधारित्र सुरक्षित रहता है, कार्यकारी वोल्टता कहलाती है। बड़े संधारित्रों में उनकी धारिता तथा कार्यकारी वोल्टता (WV) लिखी रहती है। कम धारिता वाले छोटे संधारित्रों में यह वर्ण कोड द्वारा अंकित की जाती है। यह कोड प्रतिरोधकों के वर्ण कोड जैसा ही होता है।

तालिका 11.2 में हम विभिन्न प्रकार के संधारित्रों के लिए धारिता परिसर, अधिकतम वोल्टता अनुमतांक और उनके उपयोग दे रहे हैं।

तालिका 11.2: भिन्न संधारित्रों के धारिता परिसर, अधिकतम वोल्टता अनुमतांक और उपयोग।

डाइलेक्ट्रिक का प्रकार	धारिता परिसर	अधिकतम वोल्टता अनुमतांक	टिप्पणी
कागज़	250 pF – 10 μF	150 kV	कम कीमत के, उन परिपथों में प्रयुक्त जिनमें हानि महत्वपूर्ण नहीं होती।
अभ्रक	25 pF – 0.25 μF	2 kV	उच्च गुणवत्ता के, कम हानि के परिपथ में प्रयुक्त।
सिरेमिक	0.5 pF – 0.01 μF	500 kV	उच्च गुणवत्ता के, कम हानि के परिपथ में प्रयुक्त जहां छोटा होना महत्वपूर्ण है।
विद्युत् अपघट्य (एल्यूमिनियम ऑक्साइड)	1μF – 1000 μF	600 V कम धारिता पर	जहां अधिक धारिता की आवश्यक हो।

आपने इस इकाई में जो कुछ पढ़ा है, अब हम उसका सारांश दे रहे हैं।

11.7 सारांश

अवधारणा	विवरण
धारिता	■ कोई भी युक्ति जिसमें आवेश संचित किया जा सकता है, **संधारित्र** कहलाती है। समांतर प्लेट संधारित्र जिसकी प्लेटों के बीच निर्वात हो, की **धारिता** निम्नलिखित होती है : $$C = \frac{Q}{V} = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$$ प्लेटों के बीच डाइलेक्ट्रिक नियतांक K वाले डाइलेक्ट्रिक पदार्थ से भरे समांतर प्लेट संधारित्र की **धारिता** होती है: $$C = \frac{\varepsilon_0 AK}{d}$$

संधारित्र में संचित ऊर्जा

- संधारित्र में संचित ऊर्जा होती है :

$$U = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{Q^2}{2C}$$

धारिता पर डाइलेक्ट्रिक का असर

- यदि समांतर प्लेट संधारित्र की प्लेटों के बीच मोटाई t वाला डाइलेक्ट्रिक रखा जाये, तो उसकी परिणामी धारिता होती है :

$$C = \frac{\varepsilon_0 A}{[d - t + (t/K)]}$$

डाइलेक्ट्रिक माध्यम में संचित ऊर्जा

- डाइलेक्ट्रिक माध्यम में प्रति एकक आयतन संचित ऊर्जा होती है :

$$\frac{1}{2}\vec{\mathbf{E}}.\vec{\mathbf{D}}$$

गोलीय संधारित्र

- गोलीय संधारित्र की धारिता का व्यंजक है :

$$C = \frac{4\pi\varepsilon_0 ab}{(b-a)}$$

जहां a तथा b क्रमशः आंतरिक और बाह्य कोशों की त्रिज्याएं हैं।

बेलनाकार संधारित्र

- बेलनाकार संधारित्र की, जिसमें डाइलेक्ट्रिक भरा हो, प्रति एकक लंबाई की धारिता होती है :

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0 K}{\ln(b/a)}$$

श्रेणीक्रम में संधारित्र

- श्रेणी क्रम में संयोजित दो संधारित्रों C_1 और C_2 की प्रभावी धारिता होती है:

$$C = \left[\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right]^{-1} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

समांतर क्रम में संधारित्र

- समांतर क्रम संयोजित दो संधारित्रों C_1 और C_2 की प्रभावी धारिता होती है :

$$C = C_1 + C_2$$

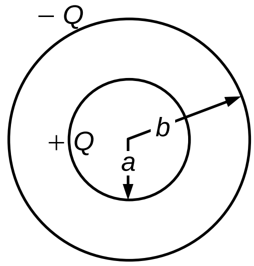
11.8 अंत में कुछ प्रश्न

1. एक समांतर प्लेट संधारित्र में समान दूरी d पर क्षेत्रफल A की n प्लेटें हैं और एकांतर प्लेटों को आपस में जोड़ा गया है। यदि इन प्लेटों के बीच डाइलेक्ट्रिक नियतांक K वाला डाइलेक्ट्रिक भरा हो तो प्रमाणित करें कि उसकी धारिता $(n-1)\varepsilon_0 K\ A/d$ है।

2. एक समांतर प्लेट संधारित्र की प्लेटों के बीच की दूरी 0.5 cm है। प्लेटों के बीच क्या विभवांतर होना चाहिए जिससे कि एक प्रोटॉन पर गुरूत्वाकर्षण बल उस पर विद्युत्-क्षेत्र के कारण लगने वाले बल के बराबर हो? प्रोटॉन का द्रव्यमान 1.67×10^{-27} kg है।

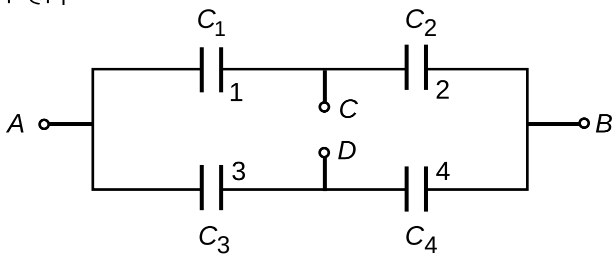
3. एक संधारित्र दो खोखले संकेंद्री धातु के गोलों से बना है जिनकी त्रिज्याएं a और b $(b > a)$. है। संकेंद्री गोलों के बीच के स्थान में डाइलेक्ट्रिक नियतांक K वाला

डाइलेक्ट्रिक पदार्थ भरा है और बाहरी गोला भू-संपर्कित है (चित्र 11.18 देखें)। इस संधारित्र की धारिता का परिकलन करें।



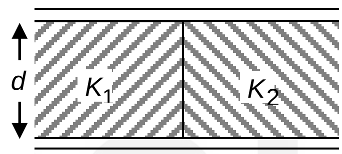
चित्र 11.18: अंत के प्रश्न 3 के लिए चित्र।

4. चित्र 11.19 में दिखाये गए समायोजन के लिए, धारिताओं पर वह प्रतिबंध प्राप्त करें कि जब सिरों A और B के बीच वोल्टता आरोपित हो तो सिरों C और D के बीच वोल्टता शून्य हो।



चित्र 11.19: अंत के प्रश्न 4 के लिए चित्र।

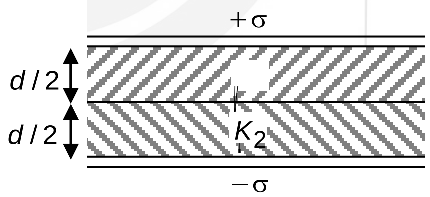
5. दो संधारित्रों को , जिनमें से एक आवेशित है और दूसरा अनावेशित है, समांतर क्रम में जोड़ा गया है। प्रमाणित करें कि संयोजन की अंतिम ऊर्जा प्रत्येक संधारित्र की प्रारंभिक ऊर्जा के योग से कम होगी। ऊर्जा हानि के लिए एक सूत्र प्राप्त करें जो कि संधारित्रों की प्रारंभिक धारिताओं और आवेशों पर आधारित हो।



चित्र 11.20: अंत के प्रश्न 6 के लिए चित्र।

6. एक समांतर प्लेट संधारित्र लें जिसका क्षेत्रफल A है और प्लेटों के बीच की दूरी d है। संधारित्र में डाइलेक्ट्रिक नियतांकों K_1 और K_2 वाले दो डाइलेक्ट्रिक पदार्थ बराबर मात्रा में भरे हैं (चित्र 11.20)। संयोजन की धारिता का परिकलन करें। $K_1 = K_2$ के लिए संयोजन की धारिता क्या है?

7. एक समांतर प्लेट संधारित्र की प्लेटों के बीच मोटाई d का स्थान डाइलेक्ट्रिक पदार्थ के दो आवेशरहित खंडों से भरा है जिनमें से प्रत्येक डाइलेक्ट्रिक पदार्थ की मोटाई $d/2$ है और डाइलेक्ट्रिक नियतांक K_1 और K_2 है (चित्र 11.21)। यहां d संधारित्र की प्लेटों के बीच की दूरी है। ऊपरी और निचली प्लेटों पर मुक्त पृष्ठ आवेश घनत्व क्रमशः $+\sigma$ और $-\sigma$, है।



चित्र 11.21: अंत के प्रश्न 7 के लिए चित्र।

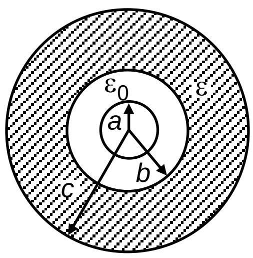
निम्नलिखित की गणना करें :

क) प्रत्येक खंड में विद्युत् विस्थापन ।

ख) प्रत्येक खंड में विद्युत्-क्षेत्र ।

ग) संधारित्र की प्लेटों के बीच विभवांतर।

घ) संधारित्र की धारिता, यदि प्लेटों का क्षेत्रफल A हो।



चित्र 11.22: अंत के प्रश्न 8 के लिए चित्र।

8. धातु के दो संकेंद्री गोलीय कोश लें जिनकी त्रिज्याएं क्रमशः a और c हैं। दोनों कोशों के बीच का क्षेत्र आंशिक रूप से डाइलेक्ट्रिक पदार्थ से भरा है जैसा कि चित्र 11.22 में दिखाया गया है। $r = b$ और $r = c$. पर पृष्ठ आवेश घनत्वों की गणना करें। जब भीतरी कोश पर आवेश Q रखा जाता है, तो बाहरी और भीतरी कोशों के बीच विभवांतर की गणना करें। इस अभिविन्यास की धारिता क्या है?

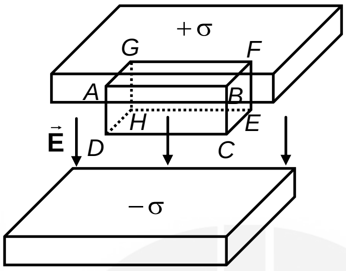
11.9 हल और उत्तर

बोध प्रश्न

1. समीकरण 11.5 से, त्रिज्या R (m में) के गोलीय कोश की धारिता है :

$$C = 4\pi\varepsilon_0 R = 4\pi \times 8.85 \times 10^{-12} \times 6000 \times 10^3 \text{ F} = 6.67 \times 10^{-4} \text{ F}$$

2. मान लें कि समांतर प्लेट संधारित्र की ऊपरी और निचली प्लेटों पर पृष्ठ आवेश घनत्व क्रमशः $+\sigma$ और $-\sigma$ हैं (चित्र 11.23)। अब ऊपरी प्लेट की भीतर और प्लेटों के बीच की जगह में स्थित गाउसीय पृष्ठ लें (चित्र 11.23)। इस गाउसीय पृष्ठ पर गाउस का नियम लागू करने के लिए हम पहले उस पृष्ठ के लिए $\oint_S \vec{\mathbf{E}}.d\vec{\mathbf{S}}$ की गणना करेंगे।



चित्र 11.23: बोध प्रश्न 2 के उत्तर के लिए चित्र।

पृष्ठ $ABFG$ के लिए उसका मान शून्य है क्योंकि चालक के भीतर $\vec{\mathbf{E}}$ शून्य है।

इसी तरह, पृष्ठों $ABCD$, $EFGH$, $BCEF$ और $ADHG$ के लिए उसका मान शून्य है क्योंकि इन पृष्ठों पर विद्युत्-क्षेत्र लंबवत् है।

क्योंकि $\vec{\mathbf{E}}$ पृष्ठ $DCEH$ के लंबवत् है, अतः पृष्ठ $DCEH$ के लिए समाकल का मान EA है जहां A पृष्ठ का क्षेत्रफल है। गाउस के नियम से यह समाकल $\dfrac{Q_{en}}{\varepsilon_0}$, के बराबर है जहां Q_{en} गाउसीय पृष्ठ द्वारा समावेशित आवेश है। इस तरह,

$$EA = \frac{Q_{en}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

3. संधारित्र की धारिता है :

$$C = \frac{\varepsilon_0 A}{d} = \frac{8.85 \times 10^{-12} \times (1.0 \times 10^{-2})^2}{1.0 \times 10^{-4}} \text{ F} = 8.85 \text{ pF}$$

संधारित्र द्वारा संचित ऊर्जा होती है $U = \dfrac{1}{2} CV^2$. अतः

$$U = [\frac{1}{2} \times 8.85 \times 10^{-12} \times (1.5)^2] \text{ J} = 9.95 \times 10^{-12} \text{ J} \approx 1.0 \times 10^{-11} \text{ J}$$

4. हम जानते हैं कि $K = \dfrac{\text{डाइलेक्ट्रिक के साथ धारिता}}{\text{मुक्त आकाश के साथ धारिता}}$

यहां $K = 3$। अतः, संधारित्र की प्लेटों के बीच डाइलेक्ट्रिक पदार्थ रखने पर धारिता 3 गुना बढ़ जाती है। समीकरण (11.15) से, संधारित्र की प्लेटों के बीच की जगह में डाइलेक्ट्रिक न होने पर धारिता $C_{\text{मुक्त आकाश}} = \dfrac{\varepsilon_0 A}{d}$ होती है। समीकरण (11.17)/(11.23) से, संधारित्र की प्लेटों के बीच की जगह में मोटाई t वाला डाइलेक्ट्रिक रखने पर धारिता का मान होता है :

$$C_{\text{डाइलेक्ट्रिक}} = \frac{\varepsilon_0 A}{(d - t + t/K)}$$ जहां d प्लेटों के बीच की दूरी है।

$$\therefore \frac{C_{\text{डाइलेक्ट्रिक}}}{C_{\text{मुक्त आकाश}}} = \frac{d}{(d - t + t/K)}$$

यहां $t = \frac{3}{4}d$ और $K = 3$

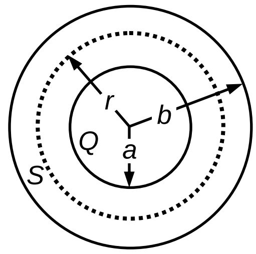
$$\therefore \quad d - t + t/K = d - \frac{3}{4}d + \frac{3d}{4 \times 3} = \frac{d}{2}$$

अतः, $\frac{C_{\text{डाइलेक्ट्रिक}}}{C_{\text{मुक्त आकाश}}} = \frac{d}{\frac{d}{2}} = 2$

यानी धारिता 2 गुना हो जाती है।

5. क) समीकरण (11.35) से, $C_1 = \frac{2\pi\varepsilon_0 K}{\ln(10/8)}$ और $C_2 = \frac{2\pi\varepsilon_0 K}{\ln(5/4)}$

$$\therefore \quad \frac{C_1}{C_2} = \frac{\ln(5/4)}{\ln(10/8)} = 1 \qquad \text{or} \qquad C_1 = C_2$$



चित्र 11.24: बोध प्रश्न 5ख के उत्तर के लिए चित्र।

ख) चित्र 11.24 देखें जिसमें त्रिज्या a तथा b वाले दो संकेन्द्री गोलीय कोश दिखाए गए हैं।

प्रश्न के अनुसार,

$$(b - a) = 4.0\,\text{cm} = 0.04\,\text{m} \tag{i}$$

समीकरण (11.28) से हम गोलीय संधारित्र के धारिता का व्यंजक निम्नवत लिखते हैं :

$$C_1 = \frac{4\pi\varepsilon_0 ab}{(b-a)} = \frac{4\pi\varepsilon_0 ab}{(0.04\,\text{m})} \tag{ii}$$

समीकरण (11.5) से हम त्रिज्या a वाले एक विद्युत्‌रोधी चालक गोले की धारिता का व्यंजक निम्नवत लिखते हैं:

$$C_2 = 4\pi\varepsilon_0 a$$

प्रश्न के अनुसार, विद्युत्‌रोधी चालक गोले की त्रिज्या,

$$a = [(30\,\text{cm}/2)] = 15\,\text{cm} = 0.15\,\text{m}$$

अतः,

$$C_2 = 4\pi\varepsilon_0 (0.15\,\text{m}) \tag{iii}$$

प्रश्न के अनुसार, $C_1 = C_2$

अतः, समीकरण (ii) और (iii) से हम पाते हैं :

$$\frac{ab}{(0.04\,\text{m})} = (0.15\,\text{m})$$

$$ab = 0.006\,\text{m}$$

आगे, हम लिख सकते हैं :

$$(b+a)^2 = (b-a)^2 + 4ab$$

$$= (0.04\,\text{m})^2 + 4 \times (0.006\,\text{m})$$

$$(b+a) = 0.16\,\text{m} \tag{iv}$$

अतः समीकरण (i) और (iv) से हम पाते हैं,

$a = 6.0\,\text{cm}$ और $b = 10\,\text{cm}$

6. क) जब संधारित्र श्रेणी क्रम में संयोजित हों, तो प्रभावी धारिता C होती है :

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{C} = \left(\frac{1}{0.05} + \frac{1}{0.02} + \frac{1}{0.01}\right) \quad \Rightarrow \quad C = \frac{1}{170}\ \mu\text{F}$$

और
$$Q = CV = \frac{1}{170} \times 10^{-6} \times 220\ \text{C} = 1.3 \times 10^{-6}\ \text{C}$$

$$V_1 = \frac{Q}{C_1} = \frac{1.3 \times 10^{-6}}{0.05 \times 10^{-6}}\ \text{V} = 26\,\text{V}$$

$$V_2 = \frac{Q}{C_2} = \frac{1.3 \times 10^{-6}}{0.02 \times 10^{-6}}\ \text{V} = 65\,\text{V}$$

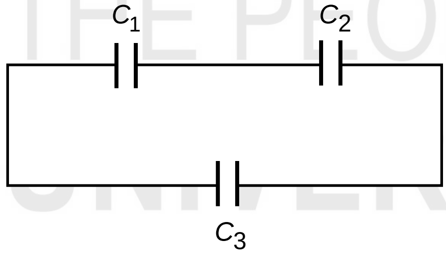
$$V_3 = \frac{Q}{C_3} = \frac{1.3 \times 10^{-6}}{0.01 \times 10^{-6}}\ \text{V} = 1.3 \times 10^2\ \text{V}$$

ख) चित्र 11.25 में यह संयोजन दिखाया गया है। मान लें कि C_4, C_1 और C_2 की प्रभावी धारिता है। श्रेणी क्रम में संयोजित संधारित्रों की प्रभावी धारिता के परिणाम का इस्तेमाल करने पर हमें मिलता है :

$$\frac{1}{C_4} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \quad \text{or} \quad C_4 = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

धारिता C_4 और C_3 के योग से संयोजन की कुल धारिता C मिलती है :

$$C = C_4 + C_3 \quad \text{or} \quad C = C_3 + \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$



चित्र 11.25: बोध प्रश्न 6ख के उत्तर के लिए चित्र।

अंत में कुछ प्रश्न

1. चित्र 11.26 से आप देख सकते हैं कि n प्लेटों से समांतर क्रम में संयोजित $(n-1)$ समांतर प्लेट संधारित्र मिलते हैं। इन प्लेटों के बीच डाइलेक्ट्रिक नियतांक K वाला डाइलेक्ट्रिक पदार्थ भरा है। उदाहरण के लिए, पहली तीन प्लेटों A, B, C से हमें दो संधारित्र AB और BC मिलते हैं, आदि। समांतर क्रम में संयोजित बराबर धारिता वाले $(n-1)$ समांतर प्लेट संधारित्रों की प्रभावी धारिता C है :

$$C = (n-1) \times \text{एक संधारित्र की धारिता} = (n-1)K\frac{\varepsilon_0 A}{d}$$

चित्र 11.26: अंत के प्रश्न 1 के उत्तर के लिए चित्र।

2. मान लें कि V आवश्यक विभव है। तब $E = V/d = V/(5 \times 10^{-3})\ \text{Vm}^{-1}$

प्रोटॉन पर विद्युत्-क्षेत्र के कारण लगने वाला बल है :

$$qE = (200 \times 1.6 \times 10^{-19}\ V)\text{N}$$

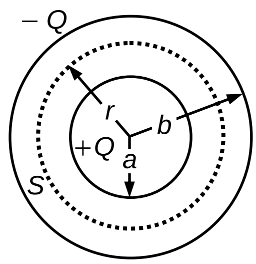
प्रोटॉन पर गुरूत्वाकर्षण बल है :

$$mg = (1.67 \times 10^{-27} \times 9.8)\text{N}$$

दोनों को बराबर रखने पर हमें मिलता है :

$$V = \frac{(1.67 \times 10^{-27} \times 9.8)}{(200 \times 1.6 \times 10^{-19})}\ \text{V} = 5 \times 10^{-10}\ \text{V}$$

3. यदि त्रिज्या 'a' के भीतरी गोले पर आवेश $+Q$ हो तो बाहरी गोले की भीतरी सतह पर बराबर किन्तु विपरीत चिन्ह् का आवेश प्रकट होता है। विद्युत्-क्षेत्र दोनों संकेंद्री गोलों के बीच की जगह में सीमित होता है। धारिता का परिकलन करने के लिए हमें $\vec{\mathbf{D}}$ का परिकलन करना होगा। अब हम गोलों के बीच डाइलेक्ट्रिक पदार्थ में त्रिज्या r का गोलीय गाउसीय पृष्ठ S लेते हैं (चित्र 11.27)। $\vec{\mathbf{D}}$ पृष्ठ S के लंबवत् है। इस तरह, गाउस के नियम से, हमें मिलता है :



चित्र 11.27: अंत के प्रश्न 3 के उत्तर के लिए चित्र।

$$4\pi r^2 D = Q$$

चूंकि $\vec{\mathbf{D}} = \varepsilon_0 K \vec{\mathbf{E}}$, हमें मिलता है :

$$E = \frac{D}{\varepsilon_0 K} = \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 K}\right)\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

बाहरी गोले के सापेक्ष भीतरी गोले का विभव है :

$$V = V_a - V_b = -\int_b^a \vec{\mathbf{E}}.d\vec{\mathbf{r}} = \int_a^b \vec{\mathbf{E}}.d\vec{\mathbf{r}} = \int_a^b \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 K}\frac{dr}{r^2}$$

चूंकि $\vec{\mathbf{E}}.d\vec{\mathbf{r}} = E\,dr$ । चूंकि बाहरी गोला भू-संपर्कित है, वह शून्य विभव पर है और $V_b = 0$ ।

$$\therefore \qquad V = V_a = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 K}\left(-\frac{1}{r}\bigg|_a^b\right)$$

या $$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 K}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

अतः धारिता का मान है : $C = \dfrac{Q}{V} = \dfrac{4\pi\varepsilon_0 abK}{(b-a)}$

4. बिंदु C से जुड़े हुए संधारित्रों 1 और 2 की दोनों प्लेटों का विभव बराबर है। अतः, यदि इनमें से एक प्लेट को आवेश q_1 दिया जाए तो दूसरी प्लेट पर बराबर किन्तु विपरीत चिन्ह् का आवेश आ जाएगा। मान लें कि A और B के बीच एक वोल्टता आरोपित की जाती है। मान लें कि धारिता C_1 वाले संधारित्र 1 पर आवेश q_1 प्रकट होता है और धारिता C_3 वाले संधारित्र 3 पर आवेश q_2 प्रकट होता है। तब संधारित्रों 1,2,3 और 4 की प्लेटों के बीच का विभवांतर होता है, क्रमशः

$$\frac{q_1}{C_1}, \frac{q_1}{C_2}, \frac{q_2}{C_3} \text{ and } \frac{q_2}{C_4}$$

यदि C और D के बीच का विभवांतर शून्य हो, तब

C_2 पर विभवांतर $= C_4$ पर विभवांतर और

C_1 पर विभवांतर $= C_3$ पर विभवांतर

$$\therefore \qquad \frac{q_1}{C_2} = \frac{q_2}{C_4} \qquad \text{और} \qquad \frac{q_1}{C_1} = \frac{q_2}{C_3}$$

या $$\frac{q_1}{q_2} = \frac{C_2}{C_4} = \frac{C_1}{C_3}$$

सिरों C और D के बीच का विभवांतर शून्य होने के लिए धारिताओं पर यही प्रतिबंध होगा।

5. मान लें कि आवेशित संधारित्र पर आरंभिक आवेश q है और उसकी धारिता C_1. है। जब इस संधारित्र को धारिता C_2, वाले अनावेशित संधारित्र से जोड़ा जाता है तब आवेश q तब तक दोनों संधारित्रों में बंटता है जब तक कि उनके विभव बराबर नहीं हो जाते क्योंकि दोनों को समांतर क्रम में जोड़ा गया है।

   मान लें कि इस प्रक्रिया में आवेशित संधारित्र से आवेश q_2 अनावेशित संधारित्र में आ जाता है। मान लें कि जब दोनों संधारित्रों के विभव बराबर हो जाते हैं, तब आवेशित संधारित्र में आवेश q_1 बाकी रह जाता है। तब $q_1 = q - q_2$ । चूंकि संधारित्रों के विभव बराबर हैं, अतः

$$\frac{q_1}{C_1} = \frac{q - q_2}{C_1} = \frac{q_2}{C_2}$$

   इन समीकरणों को q_1 और q_2, के लिए हल करने पर हमें मिलता है :

$$q_2 = \frac{C_2 q}{(C_1 + C_2)} \qquad \text{(i)}$$

   और
$$q_1 = \frac{C_1 q}{(C_1 + C_2)} \qquad \text{(ii)}$$

   आवेश के बंटने से पहले आवेशित संधारित्र की प्रारंभिक ऊर्जा E_i है :

$$E_i = \frac{q^2}{2C_1}$$

   दोनों संधारित्रों की अंतिम ऊर्जा E_f है :

$$E_f = \frac{q_1^2}{2C_1} + \frac{q_2^2}{2C_2}$$

   समीकरण (ii) और (i) से, q_1 और q_2 के मान रखने पर हमें मिलता है :

$$E_f = \frac{C_1 q^2}{2(C_1 + C_2)^2} + \frac{C_2 q^2}{2(C_1 + C_2)^2} = \frac{q^2}{2(C_1 + C_2)}$$

   अतः ऊर्जा की हानि है : $\dfrac{q^2}{2}\left[\dfrac{1}{C_1} - \dfrac{1}{C_1 + C_2}\right] = \dfrac{q^2 C_2}{2C_1(C_1 + C_2)}$

6. चित्र 11.19 में दिखाया गया संयोजन क्षेत्रफल $\dfrac{A}{2}$, मोटाई d वाले दो संधारित्रों के समतुल्य है जिनमें डाइलेक्ट्रिक नियतांकों K_1 और K_2, वाले डाइलेक्ट्रिक पदार्थ भरे हैं। ये संधारित्र समांतर क्रम में संयोजित हैं (क्योंकि एक संधारित्र की ऊपरी और निचली प्लेटें क्रमशः दूसरे संधारित्र की ऊपरी और निचली प्लेटों से जुड़ी हुई हैं)। अब समीकरण (11.15) से हमें मिलता है :

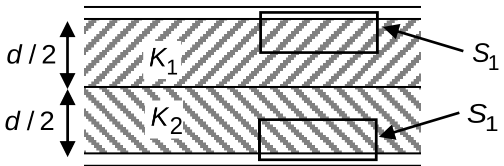
$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 K_1 A/2}{d} \qquad \text{और} \qquad C_2 = \frac{\varepsilon_0 K_2 A/2}{d}$$

$$\therefore \quad C = C_1 + C_2 = \frac{\varepsilon_0 A/2}{d}(K_1 + K_2) = \frac{\varepsilon_0 A}{2d}(K_1 + K_2)$$

   जब $K_1 = K_2$, तब हमें मिलता है : $C = \dfrac{\varepsilon_0 K A}{d}$ जो जाना पहचाना परिणाम है।

7. क) डाइलेक्ट्रिक पदार्थ के दोनों खंडों में क्षेत्रफल ΔA के गाउसीय पृष्ठ S_1 और S_2 लें (चित्र 11.28)।

मान लें कि दोनों खंडों में विस्थापन सदिश क्रमशः $\vec{\mathbf{D}}_1$ और $\vec{\mathbf{D}}_2$, हैं।



चित्र 11.28: अंत के प्रश्न 7 के उत्तर के लिए चित्र।

पृष्ठ S_1, पर गाउस का नियम लागू करने से, हमें मिलता है :

$$\int_{S_1} \vec{\mathbf{D}}_1 . d\vec{\mathbf{S}} = Q_{en}\Big|_{S_1}$$

या $\quad D_1 \Delta A = \sigma \Delta A \quad \Rightarrow \quad D_1 = \sigma \qquad$ (i)

इसी तरह, पृष्ठ S_2, के लिए: $\quad D_2 = \sigma \qquad$ (ii)

ख) चूंकि $\vec{\mathbf{D}} = \varepsilon_0 K \vec{\mathbf{E}}$, अतः हमें मिलता है: $\quad E_1 = \dfrac{D_1}{\varepsilon_0 K_1} = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0 K_1} \qquad$ (iii)

और $\quad E_2 = \dfrac{D_2}{\varepsilon_0 K_2} = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0 K_2} \qquad$ (iv)

ग) संधारित्र की प्लेटों के बीच विभवांतर है :

$$V = \int_0^d \vec{\mathbf{E}}.d\vec{\mathbf{r}} = \int_0^{d/2} \vec{\mathbf{E}}_1.d\vec{\mathbf{r}} + \int_{d/2}^{d} \vec{\mathbf{E}}_2.d\vec{\mathbf{r}} = \int_0^{d/2} E_1 dr + \int_{d/2}^{d} E_2 dr$$

या $\quad V = E_1 r\Big|_0^{d/2} + E_2 r\Big|_{d/2}^{d} = E_1 \dfrac{d}{2} + E_2 \dfrac{d}{2}$

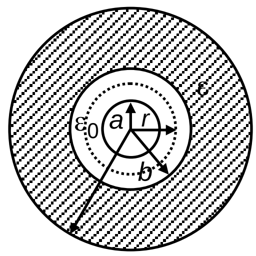
इस व्यंजक में समीकरणों (iii) और (iv) को रखने पर हमें मिलता है :

$$V = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \frac{d}{2} \left(\frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2} \right) \qquad \text{(v)}$$

घ) समीकरण (v) से, $\quad C = \dfrac{Q}{V} = \dfrac{\sigma A \varepsilon_0}{\dfrac{\sigma d}{2}\left(\dfrac{1}{K_1} + \dfrac{1}{K_2}\right)} = \dfrac{2A\varepsilon_0}{d} \dfrac{K_1 K_2}{(K_1 + K_2)}$

8. $r = b$ और $r = c$, पर पृष्ठ आवेश घनत्वों की गणना के लिए हमें दोनों स्थितियों के लिए ध्रुवण का परिकलन करना होगा। इसे हम इस प्रकार करते हैं :

गोलीय सममिति के लिए दोनों ही स्थितियों में विद्युत्-क्षेत्र और विस्थापन त्रिज्य दिशा में हैं। अब त्रिज्या r ताकि $a < r < b$ (चित्र 11.29) वाले गोलीय गाउसीय सतह पर विचार करें। चूंकि गोले द्वारा समावेशित आवेश Q है, अतः गाउस के नियम से हमें मिलता है:



चित्र 11.29: अंत के प्रश्न 8 के उत्तर के लिए चित्र।

$$D_1 4\pi r^2 = Q \quad \Rightarrow \quad D_1 = \frac{Q}{4\pi r^2}$$

अब इकाई 5 से विद्युत्-क्षेत्र का व्यंजक हम निम्नवत लिख सकते हैं :

$$\vec{\mathbf{E}}_1 = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}} \qquad a < r < b \qquad \text{(i)}$$

इसी तरह हम सिद्ध कर सकते हैं कि क्षेत्र $b < r < c$ के लिए

$$\vec{\mathbf{E}}_2 = \frac{Q}{4\pi \varepsilon r^2} \hat{\mathbf{r}} \qquad b < r < c \text{ के लिए} \qquad \text{(ii)}$$

अब आप जानते हैं कि रैखिक डाइलेक्ट्रिक पदार्थों के लिए

$$\vec{\mathbf{P}} = \vec{\mathbf{D}} - \varepsilon_0 \vec{\mathbf{E}} = (\varepsilon - \varepsilon_0)\vec{\mathbf{E}} = \varepsilon_0 (K-1)\vec{\mathbf{E}}$$

अतः $r = b$, पर $\vec{\mathbf{P}}_1 = \varepsilon_0 (K-1)\vec{\mathbf{E}}_1$

चूंकि $r = b$ पर डाइलेक्ट्रिक के पृष्ठ पर अभिलंब $-\hat{\mathbf{r}}$, के अनुदिश है, अतः हमें मिलता है :

$$\sigma_b\big|_{r=b} = -\vec{\mathbf{P}}_1 . \hat{\mathbf{r}}\Big|_{r=b} = -\varepsilon_0 (K-1)\vec{\mathbf{E}}_1 . \hat{\mathbf{r}}\Big|_{r=b}$$

$$= -\varepsilon_0 (K-1) \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}} . \hat{\mathbf{r}}\Big|_{r=b}$$

$$= -\varepsilon_0 (K-1) \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 b^2}$$

ध्यान दें कि डाइलेक्ट्रिक के पृष्ठ पर अभिलंब की दिशा डाइलेक्ट्रिक के गोले के बाहर की ओर होती है, जो $r = c$ पर $+\hat{\mathbf{r}}$ है लेकिन $r = b$. पर $-\hat{\mathbf{r}}$ है।

या $$\sigma_b\big|_{r=b} = -\frac{Q(K-1)}{4\pi b^2}$$

$r = c$, पर σ_b की गणना के लिए हम उपरोक्त विधि का प्रयोग करते हैं। चूंकि $r = c$ पर डाइलेक्ट्रिक के पृष्ठ पर अभिलंब $\hat{\mathbf{r}}$, के अनुदिश है, अतः (हाशिए की टिप्पणी देखें) :

$$\sigma_b\big|_{r=c} = \vec{\mathbf{P}}_2 . \hat{\mathbf{r}}\Big|_{r=c} = \varepsilon_0 (K-1)\vec{\mathbf{E}}_2 . \hat{\mathbf{r}}\Big|_{r=c}$$

$$= \varepsilon_0 (K-1) \frac{Q}{4\pi\varepsilon c^2}$$

$$= \varepsilon_0 (K-1) \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 K c^2} \qquad \left(\because K = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)$$

या $$\sigma_b\big|_{r=c} = \frac{Q(K-1)}{4\pi K c^2}$$

बाहरी और भीतरी कोशों के बीच विभवांतर की गणना के लिए हम उसकी परिभाषा से शुरू करते हैं :

$$V = -\int_c^a \vec{\mathbf{E}} . d\vec{\mathbf{r}} = \int_a^c \vec{\mathbf{E}} . d\vec{\mathbf{r}} = \int_a^b \vec{\mathbf{E}}_1 . d\vec{\mathbf{r}} + \int_b^c \vec{\mathbf{E}}_2 . d\vec{\mathbf{r}}$$

समीकरणों (i) और (ii) से $\vec{\mathbf{E}}_1$ और $\vec{\mathbf{E}}_2$ रखने पर हमें मिलता है :

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \int_a^b \frac{dr}{r^2} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 K} \int_b^c \frac{dr}{r^2} \qquad (\because \varepsilon = \varepsilon_0 K)$$

$$= -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r}\right)\Bigg|_a^b - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 K} \left(\frac{1}{r}\right)\Bigg|_b^c$$

$$= -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right) - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 K} \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{b}\right)$$

V के व्यंजक को सरल करने पर हमें मिलता है :

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{c-b}{K cb} + \frac{b-a}{ab}\right]$$

और $$C = \frac{Q}{V} = \frac{4\pi\varepsilon_0}{\dfrac{c-b}{K cb} + \dfrac{b-a}{ab}}$$