ट्रान्सफ़ॉर्मर (उपरोक्त चित्र) में डाइलेक्ट्रिक पदार्थ का उपयोग दो उद्देश्यों से होता है : ट्रान्सफॉर्मर में विद्यमान उच्च वोल्टता का सामना करने के लिए क्योंकि ये पदार्थ विद्युत्रोधी हैं और ट्रान्सफॉर्मर में उत्पन्न ऊष्मा को नष्ट करने या फैलाने के लिए। आप इस इकाई में डाइलेक्ट्रिक के बारे में पढ़ेंगे। (चित्र का स्रोत : विकिमीडिया कॉमन्स)

इकाई 10

डाइलेक्ट्रिक पदार्थों के स्थूल गुणधर्म

इकाई की रूपरेखा

अध्ययन निर्देशिका

इस इकाई में आप डाइलेक्ट्रिक (अथवा विद्युतरोधी) पदार्थ पर विद्युत्-क्षेत्र के प्रभाव का अध्ययन करेंगे। इस इकाई को पढ़ने से पहले आपको स्कूल में पढ़े वैद्युत चालक तथा विद्युत्-रोधी संबंधी अपनी जानकारी को दुहरा लेना चाहिए। डाइलेक्ट्रिक पदार्थों का एक अभिलक्षणिक गुणधर्म यह होता है कि इनमें मुक्त इलेक्ट्रॉन नहीं होते जो विद्युत्-क्षेत्र के प्रभाव में गतिमान हो सकें। इस इकाई में प्रयुक्त गणितीय विधियों को समझने के लिए आपको इस पाठ्यक्रम के खंड 1 में दिए गए सदिश विश्लेषण को दुहरा लेना चाहिए। साथ ही, हमारी सलाह है कि आप इस इकाई का अध्ययन करते समय इसमें दी गई गणितीय व्युत्पत्तियों को साथ-साथ करते चलें। गणितीय व्युत्पत्तियों को केवल पढ़ने से विषय वस्तु को समझने में बहुत सहायता नहीं मिलती। हमारी यह भी सलाह है कि आप बोध प्रश्नों तथा अंत के प्रश्नों को स्वयं हल करने का प्रयास करें। ऐसा करने से सदिश कलन के आधार पर की गई व्युत्पत्तियों के बारे में आपकी समझ और बेहतर होगी।

"विज्ञान विज्ञान, ज्ञान के भंडार से अधिक एक सोचने का तरीका है।"	**कार्ल सैगन**

10.1 परिचय

खंड 2 में आपने निर्वात में स्थिर विद्युतिकी के बारे में पढ़ा है। आपने निर्वात में स्थित आवेशों के लिए स्थिरवैद्युत बल, विद्युत्-क्षेत्र, विद्युत्-विभव और स्थिरवैद्युत ऊर्जा की संकल्पनाओं के बारे में पढ़ा है। लेकिन वास्तविक संसार में अधिकतर स्थितियों में स्थिरवैद्युत परिघटनाएं पदार्थों में घटती हैं। आप जानते हैं कि पदार्थ ठोस, तरल या गैस में से किसी भी अवस्था में हो सकते हैं। विद्युत्-क्षेत्र में रखे जाने पर अलग-अलग प्रकार के पदार्थ अलग-अलग तरह से व्यवहार करते हैं।

स्कूल भौतिकी में आपने पढ़ा है कि विद्युत् गुणधर्मों के आधार पर हम अपने चारों ओर के अधिकतर पदार्थों को दो समूहों में बांट सकते हैं : **चालक** (conductor) और **विद्युत्-रोधी** (insulator) । विद्युत्-रोधी पदार्थों को परावैद्युत या **डाइलेक्ट्रिक** भी कहा जाता है। इस इकाई में आप बाह्य विद्युत्-क्षेत्र की उपस्थिति में डाइलेक्ट्रिक पदार्थों के व्यवहार के बारे में पढ़ेंगे और समझेंगे कि डाइलेक्ट्रिक माध्यम के लिए गाउस का नियम किस तरह बदलता है।

शायद आप जानना चाहें : **हमें डाइलेक्ट्रिक पदार्थों के स्थूल गुणधर्मों के बारे में क्यों पढ़ना चाहिए?** यह बात आप भाग 10.2 में समझेंगे जब हम आप को **डाइलेक्ट्रिक पदार्थों** से परिचित करायेंगे। भाग 10.3 में हम डाइलेक्ट्रिक पदार्थों के एक सरल मॉडल की मदद से समझायेंगे कि **जब किसी डाइलेक्ट्रिक पदार्थ को बाह्य विद्युत्-क्षेत्र में रखा जाता है तो क्या होता है**। आप जानेंगे कि इसके कारण डाइलेक्ट्रिक का **ध्रुवण** होता है। हम डाइलेक्ट्रिक के लिए ध्रुवणता सदिश $\vec{\mathbf{P}}$ और विस्थापन सदिश $\vec{\mathbf{D}}$ को परिभाषित करेंगे और डाइलेक्ट्रिक पदार्थों में विद्युत्-क्षेत्र का व्यंजक व्युत्पन्न करेंगे।

भाग 10.4 में हम ध्रुवित पदार्थ का विद्युत्-क्षेत्र प्राप्त करेंगे और उसका भौतिक अर्थ समझाएंगे। भाग 10.5 में हम विस्थापन सदिश $\vec{\mathbf{D}}$ के पदों में डाइलेक्ट्रिक माध्यम के लिए स्थिरवैद्युत समीकरणें या गाउस का नियम प्राप्त करेंगे।

इकाई 11 में आप संधारित्रों के बारे में विस्तार से पढ़ेंगे जिनमें डाइलेक्ट्रिक पदार्थों का उपयोग किया जाता है।

उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप :

- ❖ बाह्य विद्युत्-क्षेत्र में डाइलेक्ट्रिक पदार्थों के व्यवहार को समझा सकेंगे;
- ❖ ध्रुवण को परिभाषित कर सकेंगे और ध्रुवीय और अध्रुवीय डाइलेक्ट्रिक पदार्थों में ध्रुवण की परिघटना को समझा सकेंगे;
- ❖ विस्थापन सदिश $\vec{\mathbf{D}}$ की परिभाषा दे सकेंगे और डाइलेक्ट्रिक माध्यम के लिए गाउस का नियम प्राप्त कर सकेंगे;
- ❖ $\vec{\mathbf{D}}$ और विद्युत क्षेत्र $\vec{\mathbf{E}}$ में संबंध स्थापित कर सकेंगे; और
- ❖ डाइलेक्ट्रिक नियतांक को परिभाषित कर सकेंगे।

10.2 डाइलेक्ट्रिक पदार्थ

डाइलेक्ट्रिक या विद्युत्-रोधी पदार्थ महत्त्वपूर्ण होते हैं क्योंकि इनके बहुत से अनुप्रयोग हैं जैसे विद्युत्-रोधन में, संधारित्रों में, रेडियो आवृत्ति संचरण, मुद्रित परिपथ पट्ट आदि में। डाइलेक्ट्रिक पदार्थों के अध्ययन से हम समझ सकते हैं कि किसी संधारित्र के लिए सही डाइलेक्ट्रिक कैसे चुना जाता है। साथ ही हम अनेक प्रकाशिक परिघटनाओं जैसे कि परावर्तन, अपवर्तन, क्वार्टज़ या कैल्साइट के क्रिस्टलों में दोहरे अपवर्तन को भी समझ सकते हैं। प्राकृतिक रबर, रुई, लकड़ी कुछ अच्छे विद्युत्-रोधी पदार्थों के उदाहरण हैं। कागज़, माइका, कांच और विभिन्न प्रकार के प्लास्टिक भी अच्छे डाइलेक्ट्रिक पदार्थ हैं जिनका संधारित्रों में प्रयोग किया जाता है।

चित्र 10.1: फैराडे द्वारा प्रयुक्त गोलीय संधारित्र। फैराडे ने दिखाया कि जब माइका या कांच जैसे डाइलेक्ट्रिक पदार्थों को एक गोलीय संधारित्र की केंद्रीय गेंद और पीतल के एक संकेंद्री कोश के बीच में रखा जाता है, तब उसकी धारिता कई गुना बढ़ जाती है। इस गुणक का मान विभिन्न डाइलेक्ट्रिक पदार्थों के लिए अलग-अलग होता है। (चित्र का स्रोत : collections-online.nmsi.ac.uk)

स्कूल की भौतिकी में आपने यह पढ़ा होगा कि **डाइलेक्ट्रिक पदार्थों का उपयोग संधारित्रों की धारिता कई गुना बढ़ाने के लिए किया जाता है। ऐसा क्यों होता है**? चूंकि स्कूल भौतिकी से आप संधारित्रों के बारे में जानते हैं, इस सवाल का जवाब जानने पर आप समझ सकेंगे कि हमें डाइलेक्ट्रिक पदार्थों के बारे में क्यों पढ़ना चाहिए।

वास्तव में, इस प्रभाव को 1837 में फैराडे ने प्रयोग द्वारा दिखाया। फैराडे ने स्वतंत्र रूप से लगभग 1770 में कैवेंडिश द्वारा किए प्रयोगों को दोहराया और दिखाया कि जब माइका या कांच जैसे डाइलेक्ट्रिक पदार्थों को एक गोलीय संधारित्र की पीतल की केंद्रीय गेंद और पीतल के एक संकेंद्री कोश के बीच में रखा जाता है, तब उसकी धारिता **कई गुना बढ़** जाती है (देखें चित्र 10.1)। जिस गुणक से संधारित्र की धारिता बढ़ती है उसे **डाइलेक्ट्रिक नियतांक** कहा जाता है। डाइलेक्ट्रिक नियतांक का मान निर्वात के लिए 1 होता है और डाइलेक्ट्रिक पदार्थों के लिए 1 से अधिक होता है। कुछ पदार्थों के डाइलेक्ट्रिक नियतांक का मान तालिका 10.1 में दिया गया है।

डाइलेक्ट्रिक नियतांक डाइलेक्ट्रिक पदार्थों का एक महत्वपूर्ण स्थूल गुणधर्म होता है और इसका मान अलग-अलग डाइलेक्ट्रिक पदार्थों के लिए अलग-अलग होता है। उदाहरण के लिए, पानी के लिए इसका मान 80.4 है और विभिन्न प्रकार के कांच के लिए इसका मान लगभग 6 है। इस तरह संधारित्र की धारिता उसमें प्रयुक्त डाइलेक्ट्रिक पदार्थ के अनुसार बढ़ती है। संधारित्र में डाइलेक्ट्रिक पदार्थ का चुनाव उस अनुप्रयोग पर निर्भर करता है जिसके लिए उसको डिज़ाइन किया जाना है। इसके बारे में आप इकाई 11 में पढ़ेंगे।

तालिका 10.1: कुछ सामान्य पदार्थों के डाइलेक्ट्रिक नियतांक

पदार्थ	डाइलेक्ट्रिक नियतांक
वायु	1.0006
माइका	5–9
कांच	4.5–7.00
कागज़	2–2.3
पानी	80.4

अभी हमें यह जानने में रुचि है कि **जब किसी संधारित्र के दोनों चालकों के बीच डाइलेक्ट्रिक पदार्थ रखा जाता है तब उसकी धारिता क्यों बढ़ जाती है?**

इस परिघटना को समझने के लिए, आइये, हम एक समांतर प्लेट संधारित्र लें जिसकी चालक प्लेटों पर कुछ मुक्त आवेश Q है (चित्र 10.2)। मान लें कि संधारित्र की ऊपरी प्लेट पर ऋणात्मक आवेश है और निचली प्लेट पर धनात्मक आवेश है। यदि प्लेटों का क्षेत्रफल A हो और उनके बीच की दूरी d हो, तो आप स्कूल की भौतिकी से जानते हैं कि संधारित्र की धारिता का मान होता है :

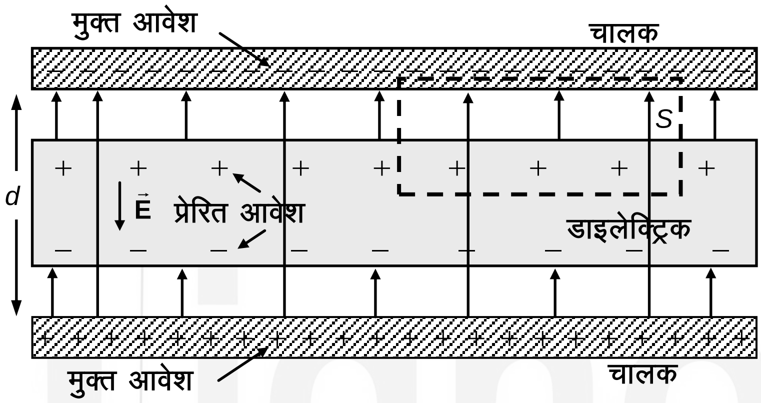
$$C = \varepsilon_0 \frac{A}{d} \tag{10.1}$$

और प्लेटों पर आवेश Q के कारण उनके बीच का विभवांतर होता है :

$$V = \frac{Q}{C} \tag{10.2}$$

अब **यह प्रयोग द्वारा स्थापित तथ्य है कि यदि हम प्लेटों के बीच डाइलेक्ट्रिक पदार्थ रखते हैं तो पाते हैं कि संधारित्र की धारिता बढ़ जाती है। यह कैसे संभव है**?

समीकरण (10.2) से आप देख सकते हैं कि धारिता में वृद्धि का अर्थ है कि प्लेटों के बीच का विभवांतर घट जाता है। ऐसा कैसे होता है? इस बात को हम उन अवधारणाओं की मदद से समझने की कोशिश कर सकते हैं, जिन्हें आपने खंड 2 में पढ़ा है।



चित्र 10.2: समांतर प्लेट संधारित्र जिसकी चालक प्लेटों के बीच में डाइलेक्ट्रिक पदार्थ रखा गया है।

चित्र 10.2 देखें। मान लें कि S एक गाउसीय पृष्ठ है (जो कि एक आयताकार बक्स है जिसका कुछ हिस्सा डाइलेक्ट्रिक पदार्थ में रखा है और कुछ हिस्सा संधारित्र की चालक प्लेट में रखा है) जैसा कि चित्र में दिखाया गया है। इकाई 6 से याद करें कि गाउस के नियम के मुताबिक किसी पृष्ठ से बाहर जाने वाला विद्युत अभिवाह उसके द्वारा परिबद्ध आवेश से संबंधित होता है :

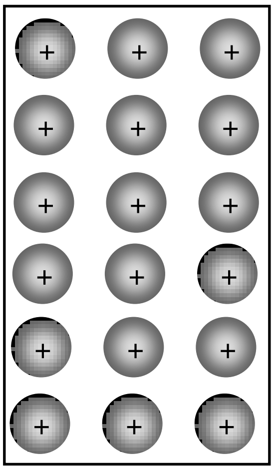
$$\oint_S \vec{\mathbf{E}}.d\vec{\mathbf{S}} = \frac{q_{en}}{\varepsilon_0}$$

चूंकि प्रयोग में हम पाते हैं कि संधारित्र की धारिता बढ़ती है, अतः समीकरण (10.2) से इसका अर्थ है कि संधारित्र की प्लेटों के बीच का विभवांतर घटता है। आप जानते हैं कि **विभवांतर या वोल्टता विद्युत्-क्षेत्र के समानुपाती होती है**। अतः, जब संधारित्र की धारिता बढ़ती है, तब विद्युत्-क्षेत्र को घटना चाहिए। गाउस के नियम से इसका अर्थ है कि आवेश को घटना चाहिए। ऐसा तभी संभव है **जब** (किसी प्रक्रिया से) **डाइलेक्ट्रिक पदार्थ की उपरी सतह पर एक धनात्मक आवेश आ जाए**। अवश्य ही, डाइलेक्ट्रिक पदार्थ पर यह धनात्मक आवेश, संधारित्र की प्लेट पर मौजूद ऋणात्मक आवेश से कम होना चाहिए।

यानी डाइलेक्ट्रिक पदार्थ की मौजूदगी के कारण धारिता में हुई वृद्धि की व्याख्या करने के लिए हमें पहले यह समझना होगा कि **जब डाइलेक्ट्रिक पदार्थ को विद्युत्-क्षेत्र में रखा जाता है तब उसकी एक सतह पर धनात्मक आवेश और दूसरी सतह पर ऋणात्मक आवेश किस प्रकार प्रेरित होता है**। इसके लिए हमें यह समझना होगा कि **विद्युत्-क्षेत्र में रखने पर डाइलेक्ट्रिक पदार्थों में क्या होता है**। अगले भाग में हम यही समझेंगे और विद्युत्-क्षेत्र में डाइलेक्ट्रिक के **ध्रुवण** की अवधारणा भी समझेंगे।

10.3 विद्युत्-क्षेत्र में डाइलेक्ट्रिक पदार्थ : ध्रुवण

स्कूल भौतिकी में आपने यह पढ़ा है कि चालक वे पदार्थ होते हैं जिनमें इलेक्ट्रॉन स्वतंत्र रूप से पदार्थ में घूम सकते हैं और विद्युत धारा उत्पन्न करते हैं। खंड 2 में आपने पढ़ा है कि चालक के भीतर विद्युत्-क्षेत्र शून्य होता है और चालक का संपूर्ण आवेश उसकी सतह पर रहता है। चालक के आवेश का विद्युत्-क्षेत्र उसकी सतह के लम्बवत् होता है। साथ ही, चालक की सतह समविभव सतह होती है।



चित्र 10.3: परमाणुओं से बने डाइलेक्ट्रिक पदार्थ का मॉडल। पदार्थ में आवेश चारों ओर घूमने के लिए स्वतंत्र नहीं हैं; वे परमाणुओं से परिबद्ध हैं। + चिन्ह धनात्मक नाभिक दिखाता है और सलेटी गोला ऋणात्मक इलेक्ट्रॉन वितरण का प्रतीक है।

डाइलेक्ट्रिक पदार्थों के लिए आप क्या कह सकते हैं? डाइलेक्ट्रिक पदार्थों के वर्णन के लिए हम निम्नलिखित सरल मॉडल का प्रयोग करते हैं जिसे आपने स्कूल की भौतिकी में पढ़ा होगा (देखें चित्र 10.3) :

- प्रत्येक पदार्थ की तरह डाइलेक्ट्रिक पदार्थ भी बहुत से अणुओं/परमाणुओं से मिलकर बने होते हैं।
- प्रत्येक परमाणु में धनात्मक आवेश वाला नाभिक होता है और नाभिक के चारों ओर ऋणात्मक आवेश वाला इलेक्ट्रॉन वितरण होता है।
- परमाणु का कुल धनात्मक आवेश उसके कुल ऋणात्मक आवेश के बराबर होता है जिससे कि परमाणु/अणु विद्युतीय रूप से उदासीन होता है।
- चालकों के विपरीत, डाइलेक्ट्रिक पदार्थों में परमाणुओं/अणुओं से संलग्न आवेश उनमें स्वतंत्र रूप से नहीं घूम सकते : अधिक से अधिक वे परमाणु/अणु के भीतर घूम सकते हैं। डाइलेक्ट्रिक पदार्थों के परमाणुओं/अणुओं में आवेश परिबद्ध होते हैं।
- एक अणु एक ही प्रकार के अथवा विभिन्न प्रकार के परमाणुओं से मिलकर बना होता है।

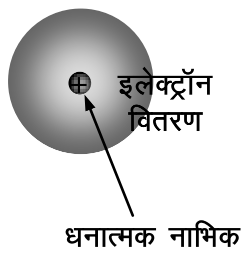
अब हम इस सरल मॉडल की मदद से समझेंगे कि विद्युत क्षेत्र में रखने पर डाइलेक्ट्रिक पदार्थों में क्या होता है। आइये, हम यह पूछें : **क्या होता है जब हम डाइलेक्ट्रिक पदार्थों को विद्युत्-क्षेत्र में रखते हैं?**

चूंकि डाइलेक्ट्रिक परमाणुओं/अणुओं से मिलकर बने होते हैं इसलिए इस सवाल का जवाब देने के लिए हमें पहले यह समझना होगा कि **जब हम डाइलेक्ट्रिक के एक उदासीन परमाणु/अणु को विद्युत्-क्षेत्र में रखते हैं तब क्या होता है?** आपकी पहली प्रतिक्रिया यह हो सकती है कि कुछ नहीं होगा, क्योंकि परमाणु और अणु उदासीन होते हैं। लेकिन यह सही नहीं है। विद्युत्-क्षेत्र में डाइलेक्ट्रिक पदार्थ का व्यवहार इस बात पर निर्भर करता है कि वह **उदासीन परमाणुओं/अध्रुवीय अणुओं** से मिलकर बना है या **ध्रुवीय अणुओं** से मिलकर बना है।

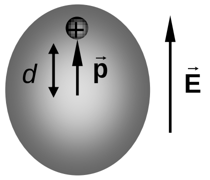
सामान्यतः डाइलेक्ट्रिक पदार्थ दो प्रकार के होते हैं : एक **अध्रुवीय डाइलेक्ट्रिक पदार्थ (non-polar dielectrics)** जो **उदासीन परमाणुओं** या **अध्रुवीय अणुओं से मिलकर बने होते हैं**। दूसरे **ध्रुवीय डाइलेक्ट्रिक पदार्थ (polar dielectrics)** जो **ध्रुवीय अणुओं से मिलकर बने होते हैं**। अगले भाग में आप अध्रुवीय अणुओं और ध्रुवीय अणुओं की अवधारणा समझेंगे।

जब हम डाइलेक्ट्रिक पदार्थों को विद्युत्-क्षेत्र में रखते हैं, तब विद्युत्-क्षेत्र के कारण डाइलेक्ट्रिक पदार्थ में निम्नलिखित दो प्रक्रियाओं में से कोई एक प्रक्रिया घटती है :

1. अध्रुवीय डाइलेक्ट्रिक पदार्थों में मौजूद उदासीन परमाणुओं या अध्रुवीय अणुओं में **द्विध्रुवों का प्रेरण** (induction)।
2. ध्रुवीय डाइलेक्ट्रिक पदार्थों में मौजूद ध्रुवीय अणुओं के **स्थाई द्विध्रुवों का संरेखण** (alignment)।



(क)



(ख)

चित्र 10.4: क) एक परमाणु जिसके केंद्र पर धनात्मक आवेश वाला नाभिक है, नाभिक के चारों ओर ऋणात्मक आवेश वाला इलेक्ट्रॉन वितरण है और धनात्मक और ऋणात्मक आवेश वितरण के केन्द्र संपाती हैं; ख) विद्युत्-क्षेत्र की उपस्थिति में परमाणु में धनात्मक और ऋणात्मक आवेश वितरण के केन्द्र संपाती नहीं रहते। ये एक-दूसरे से अलग हो जाते हैं जिसके कारण परमाणु में द्विध्रुव प्रेरित होता है। यह चित्र पैमाने के अनुसार नहीं है और कई गुना आवर्धित है।

अब हम इन दोनों प्रक्रियाओं को समझायेंगे।

10.3.1 उदासीन परमाणुओं और अध्रुवीय अणुओं में प्रेरित द्विध्रुव

आइये, पहले हम यह पूछें : जब हम एक डाइलेक्ट्रिक पदार्थ को विद्युत्-क्षेत्र $\vec{E}$ में रखते हैं तब **उसमें मौजूद एक उदासीन परमाणु में क्या होता है?** शायद आप सोचें कि कुछ नहीं होगा, क्योंकि परमाणु उदासीन है। लेकिन यह सही नहीं है। यह जानने के लिए कि क्या होता है आइये, हम परमाणु के निम्नलिखित सरल मॉडल पर विचार करें (चित्र 10.4क) :

- परमाणु का धनात्मक नाभिक इसके केंद्र पर होता है,
- ऋणात्मक आवेश वाले इलेक्ट्रॉन, केंद्र के चारों ओर गोले में वितरित होते हैं,
- धनात्मक आवेश वितरण का केन्द्र और ऋणात्मक आवेश वितरण का केन्द्र संपाती हैं; और
- परमाणु उदासीन है और इसमें द्विध्रुव आघूर्ण नहीं होता।

जब उदासीन परमाणु को बाह्य विद्युत्-क्षेत्र में रखा जाता है, तब परमाणु में दोनों धनात्मक आवेश और ऋणात्मक आवेश के क्षेत्र बाह्य विद्युत्-क्षेत्र से प्रभावित होते हैं : **धनात्मक नाभिक विद्युत्-क्षेत्र की दिषा में विस्थापित होता है और परमाणु में ऋणात्मक आवेष वाले इलेक्ट्रॉन विपरीत दिषा में विस्थापित होते हैं**। लेकिन धनात्मक और ऋणात्मक आवेश एक-दूसरे को आकर्षित भी करते हैं और परमाणु एकजुट रहता है। अगर विद्युत्-क्षेत्र अत्यधिक विशाल होता है, तो वह परमाणु को आयनित कर देता है।

अगर विद्युत्-क्षेत्र अत्यधिक विशाल नहीं होता तब साम्यावस्था जल्दी ही स्थापित हो जाती है। परमाणु पर दो विपरीत बल लगते हैं। एक बल बाह्य विद्युत्-क्षेत्र के कारण लगता है और धनात्मक नाभिक एवं इलेक्टॉनों को एक-दूसरे से दूर ले जाता है। दूसरा बल उनके पारस्परिक स्थिरवैद्युत आकर्षण के कारण लगता है और उन्हें एक-दूसरे के निकट लाता है। जब ये दो विपरीत बल संतुलित हो जाते हैं तब साम्यावस्था स्थापित हो जाती है। जब ऐसा होता है, तब धनात्मक आवेश का केन्द्र एक दिशा में स्थानांतरित हो जाता है और ऋणात्मक आवेश का केन्द्र उसकी विपरीत दिशा में स्थानांतरित हो जाता है। **इसके कारण धनात्मक और ऋणात्मक आवेषों के केन्द्रों के बीच में एक दूरी स्थापित हो जाती है और एक विद्युत द्विध्रुव बन जाता है** (चित्र 10.4ख)। ध्यान दें कि विद्युत्-क्षेत्र के कारण ऋणात्मक आवेश वितरण का विरूपण हो गया है।

इस तरह, एक बाह्य विद्युत्-क्षेत्र $\vec{E}$ की उपस्थिति में एक द्विध्रुव आघूर्ण प्रेरित होता है। इस द्विध्रुव आघूर्ण की दिशा विद्युत्-क्षेत्र की दिशा में ही होती है। आइए अब हम इस प्रेरित द्विध्रुव आघूर्ण का व्यजंक प्राप्त करें।

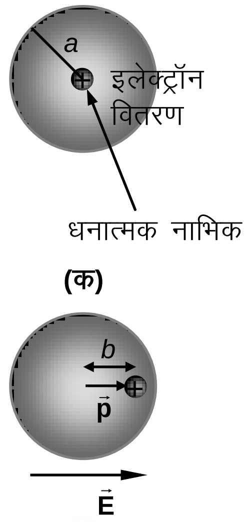
मान लें कि परमाणु के धनात्मक और ऋणात्मक आवेशों के केन्द्रों के बीच की दूरी d है। तब परमाणु का द्विध्रुव आघूर्ण का व्यंजक होगा :

$$\vec{\mathbf{p}} = qd\hat{\mathbf{n}} = q\vec{\mathbf{d}} \qquad (10.3)$$

जहां $\hat{\mathbf{n}}, \vec{\mathbf{d}}$ की दिशा में एकक सदिश है जिसकी दिशा $\vec{\mathbf{E}}$ की ही दिशा है। अधिकतर स्थितियों में **विस्थापन $\vec{\mathbf{d}}$ बाह्य विद्युत्-क्षेत्र के समानुपाती होता है** जब तक कि विद्युत्-क्षेत्र अत्यधिक विशाल न हो। (उस स्थिति में परमाणु आयनित भी हो सकता है।) चूंकि $\vec{\mathbf{d}} \propto \vec{\mathbf{E}}$ (जब तक कि $\vec{\mathbf{E}}$ अत्यधिक विशाल न हो) और $\vec{\mathbf{p}} = q\vec{\mathbf{d}}$, अतः **प्रेरित द्विध्रुव आघूर्ण बाह्य विद्युत्-क्षेत्र के समानुपाती होता है** :

$$\vec{\mathbf{p}} \propto \vec{\mathbf{E}} \quad \text{और} \quad \vec{\mathbf{p}} = \alpha\vec{\mathbf{E}} \qquad (10.4)$$

समानुपातिकता स्थिरांक α को **परमाण्वीय ध्रुवणता (atomic polarisability)** कहते हैं। इसकी इकाई $C^2 mN^{-1}$ है। इसका मान परमाणु की संरचना पर निर्भर करता है। आइये, अब समीकरण (10.4) का उपयोग कर एक परमाणु की परमाण्वीय ध्रुवणता का अनुमान लगाएं।



चित्र 10.5: क) त्रिज्या *a* का एक उदासीन परमाणु; ख) विद्युत्-क्षेत्र की उपस्थिति में परमाणु में द्विध्रुव प्रेरित होता है। यहां हम मान रहे हैं कि साम्यावस्था में इलेक्ट्रॉन वितरण गोलाकार है।

उदाहरण 10.1 : परमाण्वीय ध्रुवणता

मान लें कि त्रिज्या a वाला एक परमाणु बाह्य विद्युत्-क्षेत्र E में रखा है (चित्र 10.5)। धनात्मक नाभिक और ऋणात्मक गोलाकार इलेक्ट्रॉन वितरण के केन्द्र के बीच की दूरी और परमाणु के द्विध्रुव आघूर्ण की गणना करें। उसकी परमाण्वीय ध्रुवणता का मान प्राप्त करें। त्रिज्या $a_0 \approx 10^{-10}$ m वाले हाइड्रोजन परमाणु की परमाण्वीय ध्रुवणता का अनुमानित मान प्राप्त करें।

हल ■ आपने सीखा है कि बाह्य विद्युत्-क्षेत्र की उपस्थिति में धनात्मक नाभिक ऋणात्मक आवेश के केन्द्र से दूर चला जाता है। गणना को सरल रखने के लिए हम मान लेते हैं कि इलेक्ट्रॉन वितरण गोलाकार है और धनात्मक आवेश से उसके केन्द्र की दूरी b है (चित्र 10.5ख)। आपने यह भी सीखा है कि जब बाह्य विद्युत्-क्षेत्र $\vec{\mathbf{E}}$ के कारण नाभिक पर लग रहा बल ऋणात्मक इलेक्ट्रॉन वितरण के कारण नाभिक पर लग रहे आकर्षण बल के बराबर होता है तब साम्यावस्था स्थापित होती है। इकाई 5 से आप जानते हैं कि बाह्य विद्युत्-क्षेत्र के कारण नाभिक पर लग रहा बल $+q\vec{\mathbf{E}}$ है जहां q नाभिक पर आवेश है।

आइए अब ऋणात्मक इलेक्ट्रॉन वितरण के कारण नाभिक के नई स्थिति पर विद्युत्-क्षेत्र E_e की गणना करें। इकाई 6 से आप जानते हैं कि एकसमान आवेशित अचालक गोले के कारण उसके किसी आंतरिक बिन्दु पर विद्युत्-क्षेत्र का मान निम्नवत होगा :

$$E_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qb}{a^3}$$

जहां q इलेक्ट्रॉन वितरण का कुल आवेश है, b ऋणात्मक इलेक्ट्रॉन वितरण के केन्द्र से नाभिक की दूरी है, और a, गोलीय एकसमान आवेशित इलेक्ट्रॉन वितरण की त्रिज्या है।

साम्यावस्था में हम बाह्य विद्युत्-क्षेत्र E का मान निम्नवत लिख सकते हैं :

$$E = E_e$$

या $$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qb}{a^3}$$

या $$b = \frac{4\pi\varepsilon_0 a^3 E}{q}$$

समीकरण (10.3) से द्विध्रुव आघूर्ण $p = qb = 4\pi\varepsilon_0 a^3 E$

अतः समीकरण (10.4) से परमाण्वीय ध्रुवणता को निम्नवत लिख सकते हैं :

$$\alpha = \frac{p}{E} = 4\pi\varepsilon_0 a^3$$

हाइड्रोजन परमाणु के लिए $a = a_0 \approx 10^{-10}$m है। आइये, हम इस मॉडल पर आधारित हाइड्रोजन परमाणु की परमाण्वीय ध्रुवणता का अनुमान करें। यह है :

$$\alpha = 4\pi \times 8.85 \times 10^{-12} \times 10^{-30} C^2mN^{-1} = 1.11 \times 10^{-40} C^2mN^{-1}$$

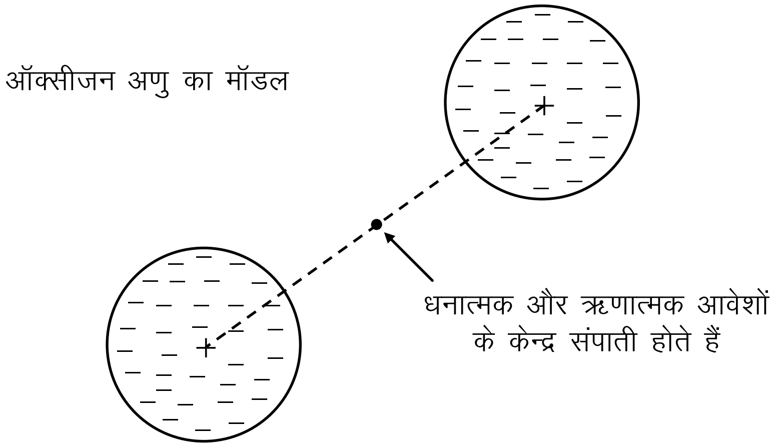
विद्युत्-क्षेत्र $E = 10^6\ Vm^{-1}$ की उपस्थिति में दूरी b का मान होगा :

$$b \approx \frac{4\pi \times 8.85 \times 10^{-12} \times 10^{-30} \times 10^6}{1.6 \times 10^{-19}} m \approx 6.9 \times 10^{-15}\ m$$

यद्यपि परमाणु का यह मॉडल बहुत सरल है, फिर भी समीकरण (10.4) के आधार पर परमाण्वीय ध्रुवणता का अनुमानित मान बहुत ग़लत नहीं है। सरल परमाणुओं के लिए यह चार के गुणक के भीतर सटीक होता है। हाइड्रोजन परमाणु के लिए इस मॉडल के आधार पर प्राप्त किए गए मान का उसके प्रायोगिक मान से तुलना करें। $10^{-30}\ m^3$ की इकाई में हाइड्रोजन परमाणु के लिए $\frac{\alpha}{4\pi\varepsilon_0}$ का मान 0.667 है।

अभी तक हमने समझा है कि बाह्य विद्युत्-क्षेत्र की उपस्थिति में एक उदासीन परमाणु में किस तरह एक विद्युत् द्विध्रुव आघूर्ण प्रेरित होता है। अणु के लिए क्या होता है? क्या स्थिति वही रहती है या कुछ अलग होती है? आइये, पता लगाएं।

एक प्रकार के अणुओं में जिन्हें **अध्रुवीय अणु** कहते हैं, धनात्मक और ऋणात्मक आवेशों के केन्द्र सदैव **संपाती** होते हैं। विद्युत्-क्षेत्र की अनुपस्थिति में ऐसे अणुओं का द्विध्रुव आघूर्ण शून्य होता है। ऐसे अणुओं के बने हुए डाइलेक्ट्रिक पदार्थ **अध्रुवीय डाइलेक्ट्रिक पदार्थ** कहलाते हैं। अध्रुवीय अणुओं के कुछ उदाहरण हैं वायु, हाइडोजन, ऑक्सीजन (चित्र 10.6), बेंज़ीन, कार्बन टेट्राक्लोराइड, आदि।



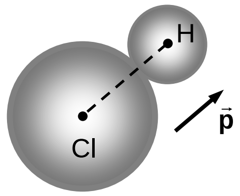
चित्र 10.6: ऑक्सीजन के अणु में धनात्मक और ऋणात्मक आवेशों के केन्द्र संपाती होते हैं। बाह्य विद्युत्-क्षेत्र की अनुपस्थिति में इसका द्विध्रुव आघूर्ण शून्य होता है।

चूंकि **अध्रुवीय अणुओं** में स्थाई द्विध्रुव आघूर्ण नहीं होता (बाह्य विद्युत्-क्षेत्र की अनुपस्थिति में उनका द्विध्रुव आघूर्ण शून्य होता है), अतः आप तुरन्त कह सकते हैं कि **बाह्य विद्युत्-क्षेत्र की उपस्थिति में उनका व्यवहार ठीक वैसा ही होना चाहिए जैसा कि उदासीन परमाणुओं का होता है**।

इस तरह, **जब एक उदासीन परमाणु या अध्रुवीय अणु को बाह्य विद्युत्-क्षेत्र में रखा जाता है, तो उसमें प्रेरण के कारण विद्युत्-क्षेत्र की दिशा में एक अल्प द्विध्रुव आघूर्ण आ जाता है।**

10.3.2 विद्युत्-क्षेत्रों में ध्रुवीय अणुओं का संरेखण

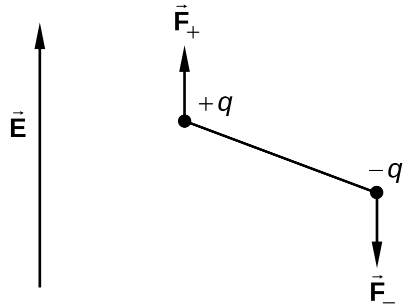
कुछ अणुओं की संरचना ऐसी होती है कि उनमें धनात्मक और ऋणात्मक आवेशों के केन्द्र संपाती नहीं होते। ऐसे अणु, जैसे कि पानी और कांच, विद्युततः उदासीन होते हैं, लेकिन इनमें बाह्य विद्युत्-क्षेत्र की अनुपस्थिति में भी विद्युत् द्विध्रुव आघूर्ण होता है। ऐसे अणुओं को ध्रुवीय अणु कहा जाता है। इस तरह ध्रुवीय अणुओं में स्थाई द्विध्रुव आघूर्ण होता है। इस प्रकार के अणुओं के बने हुए डाइलेक्ट्रिक पदार्थों को ध्रुवीय डाइलेक्ट्रिक पदार्थ कहते हैं।



चित्र 10.7: हाइड्रोजन क्लोराइड अणु में धनात्मक और ऋणात्मक आवेश के केन्द्र संपाती नहीं होते। अणु में स्थाई द्विध्रुव आघूर्ण होता है।

उदाहरण के लिए, हाइड्रोजन क्लोराइड (HCl) के अणु की सरल संरचना देखें (चित्र 10.7)। यह एक द्विपरमाण्वीय अणु है जिसके परमाणु अलग-अलग प्रकार के हैं। मूल रूप से H और Cl परमाणु गोलाकार होते हैं, लेकिन जब इन परमाणुओं से HCl अणु बनता है, तो H परमाणु के इलेक्ट्रॉन आंशिक रूप से Cl की संरचना पर स्थानांतरित हो जाते हैं जिससे कि धनात्मक हाइड्रोजन नाभिक बचा रह जाता है। इस तरह अणु के क्लोरीन वाले सिरे पर ऋणात्मक आवेश की मात्रा बढ़ जाती है और अणु के हाइड्रोजन वाले सिरे पर धनात्मक आवेश की मात्रा बढ़ जाती है। और धनात्मक और ऋणात्मक आवेश के केन्द्र एक-दूसरे से दूर हो जाते हैं, जिससे कि HCl अणु में स्थाई द्विध्रुव आघूर्ण उत्पन्न होता है।

आपने अभी सीखा है कि **ध्रुवीय अणुओं** में स्थाई विद्युतीय द्विध्रुव होते हैं। **यदि इन अणुओं को बाह्य विद्युत्-क्षेत्र में रखा जाए तो धनात्मक आवेश पर लग रहा बल $\vec{F}_+$ ऋणात्मक आवेश पर लग रहे बल $\vec{F}_-$ के बराबर और विपरीत दिशा में होगा**। लेकिन चित्र 10.8 से ध्यान दें कि ये बल एक **बल युग्म** बनाते हैं। अतः प्रत्येक विद्युतीय द्विध्रुव पर एक **बल आघूर्ण** आरोपित होगा जो **उसे विद्युत्-क्षेत्र की दिशा में संरेखित करेगा**।



चित्र 10.8: एक ध्रुवीय अणु पर बाह्य विद्युत्-क्षेत्र में एक-दूसरे से दूर स्थित धनात्मक आवेश और ऋणात्मक आवेश पर लग रहे बलों के कारण बल आघूर्ण आरोपित होता है। इस बल आघूर्ण के कारण अणु का विद्युत्-क्षेत्र की दिशा में संरेखण होता है।

भाग 10.3.1 और 10.3.2 में आपने सीखा है कि बाह्य विद्युत्-क्षेत्र में उदासीन परमाणु/अध्रुवीय अणु और ध्रुवीय अणु किस प्रकार व्यवहार करते हैं। अब हम इस प्रश्न

का उत्तर देंगे : **जब एक डाइलेक्ट्रिक पदार्थ को विद्युत्-क्षेत्र में रखा जाता है, तो क्या होता है**?

10.3.3 डाइलेक्ट्रिक पदार्थों का ध्रुवण और ध्रुवण सदिश $\vec{P}$

आपने सीखा है कि डाइलेक्ट्रिक पदार्थ दो प्रकार के होते हैं : उदासीन परमाणुओं / अध्रुवीय अणुओं के बने हुए अध्रुवीय डाइलेक्ट्रिक पदार्थ और ध्रुवीय अणुओं के बने हुए ध्रुवीय डाइलेक्ट्रिक पदार्थ। तो हमें वास्तव में यह समझना होगा : **बाह्य विद्युत्-क्षेत्र में ध्रुवीय और अध्रुवीय डाइलेक्ट्रिक पदार्थ किस प्रकार व्यवहार करते हैं**? भाग 10.3.1 और 10.3.2 में आपने जो सीखा है, उसके आधार पर हम इस प्रश्न का उत्तर ऐसे दे सकते हैं :

1. **अध्रुवीय डाइलेक्ट्रिक पदार्थ** : जब एक उदासीन परमाणुओं/अध्रुवीय अणुओं के बने हुए अध्रुवीय डाइलेक्ट्रिक पदार्थ को बाह्य विद्युत्-क्षेत्र में रखा जाता है, तो डाइलेक्ट्रिक पदार्थ के परमाणुओं/अणुओं में विद्युत्-क्षेत्र की दिशा में एक अल्प द्विध्रुव आघूर्ण प्रेरित होता है।

2. **ध्रुवीय डाइलेक्ट्रिक पदार्थ** : जब एक ध्रुवीय अणुओं (जिनमें स्थाई द्विध्रुव आघूर्ण होता है) के बने हुए ध्रुवीय डाइलेक्ट्रिक पदार्थ को बाह्य विद्युत्-क्षेत्र में रखा जाता है, तो डाइलेक्ट्रिक पदार्थ के ध्रुवीय अणुओं के स्थाई द्विध्रुव आघूर्णों पर एक बल आघूर्ण आरोपित होता है, जो उन्हें विद्युत्-क्षेत्र की दिशा में संरेखित करता है।

इस तरह, दोनों प्रक्रियाओं में (**उदासीन परमाणुओं या अध्रुवीय अणुओं में द्विध्रुवों का प्रेरण और ध्रुवीय अणुओं में स्थाई द्विध्रुवों का संरेखण**) डाइलेक्ट्रिक पदार्थ में विद्युत क्षेत्र की दिशा में परमाण्वीय या आण्विक द्विध्रुव उत्पन्न होते हैं। हम कहते हैं कि डाइलेक्ट्रिक पदार्थ का **ध्रुवण** हो गया है। सम्पूर्ण डाइलेक्ट्रिक पदार्थ विद्युतीय तौर पर उदासीन होता है और उसके भीतर किसी भी आयतन अवयव में आवेश की अधिकता नहीं होती।

लेकिन डाइलेक्ट्रिक पदार्थ के परमाणु/अणु लगातार यादृच्छिक तापीय गति करते हैं और एक-दूसरे से टकराते रहते हैं। अतः, कभी भी विद्युतीय द्विध्रुवों का पूरी तरह से संरेखण नहीं होता और विद्युत्-क्षेत्र के बढ़ने या तापमान के घटने के साथ संरेखण बढ़ता है। अणुओं की यादृच्छिक गति के कारण उच्च तापमान पर द्विध्रुवों का संरेखण समाप्त हो जाता है ख़ास कर तब जब विद्युत्-क्षेत्र को हटा दिया जाता है।

अतः सार रूप में गुणात्मक तौर पर हम कह सकते हैं कि

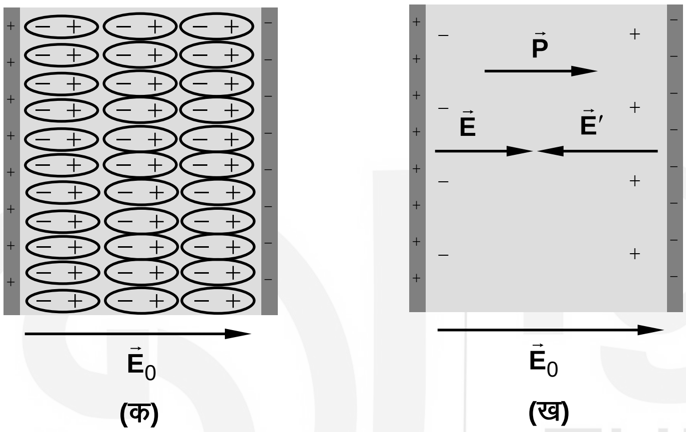
दोहराएं

> डाइलेक्ट्रिक पदार्थ का **ध्रुवण** वह परिघटना है जिसमें बाह्य विद्युत्-क्षेत्र के परिणाम स्वरूप
>
> क) उदासीन परमाणुओं या अध्रुवीय अणुओं में ऋणात्मक और धनात्मक आवेशों के केन्द्रों के आपेक्षिक विस्थापन के कारण द्विध्रुव आघूर्ण का प्रेरण होता है।
>
> या
>
> ख) ध्रुवीय अणुओं में स्थाई द्विध्रुवों का संरेखण होता है।

अब हम डाइलेक्ट्रिक पदार्थ के ध्रुवण की गणितीय परिभाषा देंगे।

मान लें कि **डाइलेक्ट्रिक पदार्थ समांग और समदैषिक** है। इसका अर्थ यह है कि **डाइलेक्ट्रिक पदार्थ के गुणधर्म सभी बिन्दुओं पर और सभी दिशाओं में समान हैं।** मान लें कि इस डाइलेक्ट्रिक पदार्थ के एक खंड को बाह्य विद्युत्-क्षेत्र $\vec{\mathbf{E}}_0$ में रखा जाता है। इस बाह्य विद्युत्-क्षेत्र को किसी भी साधन द्वारा आरोपित किया जा सकता है। उदाहरण के लिए चित्र 10.9क के समांतर प्लेट संधारित्र की प्लेटों पर मौजूद आवेश द्वारा। यदि डाइलेक्ट्रिक पदार्थ उदासीन परमाणुओं या अध्रुवीय अणुओं का बना होगा, तो उसके प्रत्येक परमाणु, अणुओं में विद्युत्-क्षेत्र के कारण द्विध्रुव प्रेरित होगा। यदि डाइलेक्ट्रिक पदार्थ ध्रुवीय अणुओं का बना होगा तो उसके प्रत्येक ध्रुवीय अणु पर एक बल आघूर्ण आरोपित होगा, जो उसे विद्युत्-क्षेत्र के अनुदिश संरेखित करेगा। आपने भाग 10.3.1 और 10.3.2 में पढ़ा है कि दोनों ही स्थितियों में द्विध्रुव आघूर्णों की दिशा विद्युत्-क्षेत्र की दिशा में ही होगी।

समांग डाइलेक्ट्रिक पदार्थ के गुणधर्म जैसे कि विद्युत्शीलता (permittivity) और वैद्युत प्रवृत्ति (susceptibility) डाइलेक्ट्रिक पदार्थ के सभी बिन्दुओं पर समान होते हैं। यानी वे स्थिति के साथ परिवर्तित नहीं होते। समदैशिक डाइलेक्ट्रिक के गुणधर्म सभी दिशाओं में समान होते हैं।



चित्र 10.9: क) बाह्य विद्युत्-क्षेत्र $\vec{\mathbf{E}}_0$ में रखे डाइलेक्ट्रिक पदार्थ के एक खण्ड में धनात्मक और ऋणात्मक आवेशों के केन्द्रों का आपेक्षिक विस्थापन होता है और वह ध्रुवित हो जाता है; ख) आवेशों के विस्थापन के कारण खण्ड के पृष्ठों पर पृष्ठ आवेश उत्पन्न होते हैं। इनके कारण विद्युत क्षेत्र $\vec{\mathbf{E}}'$ उत्पन्न होता है जिसकी दिशा बाह्य विद्युत क्षेत्र $\vec{\mathbf{E}}_0$ की दिशा के विपरीत होती है। यह एक आदर्श स्थिति है। वास्तव में, डाइलेक्ट्रिक पदार्थ में अणु/परमाणु यादृच्छिक गति करते हैं।

धनात्मक और ऋणात्मक आवेशों के केन्द्रों के आपेक्षिक विस्थापन के कारण डाइलेक्ट्रिक पदार्थ के खण्ड के पृष्ठों पर पृष्ठ आवेश उत्पन्न होते हैं जैसा कि चित्र 10.9ख में दिखाया गया है। डाइलेक्ट्रिक पदार्थ के पृष्ठों पर मौजूद पृष्ठ आवेशों के कारण विद्युत्-क्षेत्र, माना कि $\vec{\mathbf{E}}'$, उत्पन्न होता है जिसकी दिशा बाह्य विद्युत्-क्षेत्र की दिशा के विपरीत होती है। डाइलेक्ट्रिक में परिणामी विद्युत क्षेत्र $\vec{\mathbf{E}}$ विद्युत्-क्षेत्रों $\vec{\mathbf{E}}_0$ और $\vec{\mathbf{E}}'$ का सदिश योग होता है। इसकी दिशा वही होती है, जो $\vec{\mathbf{E}}_0$ की है लेकिन परिमाण उससे कम होता है।

इस परिघटना के गणितीय वर्णन के लिए हम **ध्रुवण सदिश $\vec{\mathbf{P}}$** की परिभाषा देते हैं, जिसके अनुसार यह **प्रति एकक आयतन कुल द्विध्रुव आघूर्ण** के बराबर होता है :

$$\vec{\mathbf{P}} = \text{ प्रति एकक आयतन कुल द्विध्रुव आघूर्ण}$$

इस प्रकार से परिभाषित **ध्रुवण एक बड़े क्षेत्र में जिसमें बहुत बड़ी संख्या में परमाणु/अणु मौजूद हैं औसत द्विध्रुव आघूर्ण है**। इस प्रकार यह एक डाइलेक्ट्रिक पदार्थ का **औसत स्थूल गुणधर्म** है जो उस डाइलेक्ट्रिक पदार्थ को बनाने वाले

परमाणुओं और अणुओं के विद्युतीय द्विध्रुव आघूर्णों का बड़े पैमाने पर प्रकटीकरण है। यदि डाइलेक्ट्रिक पदार्थ में N **ध्रुवित अणु प्रति एकक आयतन हों** तो

$$\vec{\mathbf{P}} = N\vec{\mathbf{p}} \tag{10.5}$$

एक आदर्श समांग और समदैशिक डाइलेक्ट्रिक पदार्थ में ध्रुवण $\vec{\mathbf{P}}$ विद्युत्-क्षेत्र $\vec{\mathbf{E}}$ के समानुपाती होता है :

$$\vec{\mathbf{P}} \propto \vec{\mathbf{E}} \qquad \text{या} \qquad \vec{\mathbf{P}} = \chi\, \varepsilon_0 \vec{\mathbf{E}} \tag{10.6}$$

जहां समानुपातिकता स्थिरांक χ को **वैद्युत प्रवृत्ति** (electric susceptibility) कहते हैं। समीकरण (10.6) में अचर ε_0 को इसलिए रखा गया है जिससे कि अचर χ विमाहीन हो। वे डाइलेक्ट्रिक पदार्थ जो समीकरण (10.6) को संतुष्ट करते हैं **रैखिक डाइलेक्ट्रिक** कहलाते हैं।

समीकरण (10.6) को बहुत से डाइलेक्ट्रिक पदार्थों के लिए प्रयोगों द्वारा सत्य पाया गया है बशर्ते विद्युत्-क्षेत्र बहुत प्रबल न हो। समीकरण (10.6) हमें बताता है कि किसी डाइलेक्ट्रिक पदार्थ की वैद्युत प्रवृत्ति **उसका वह गुणधर्म है, जो यह तय करता है कि जब उसे किसी बाह्य विद्युत्-क्षेत्र में रखा जाएगा, तो उसका कितना ध्रुवण होगा।** डाइलेक्ट्रिक पदार्थ की वैद्युत प्रवृत्ति उसकी सूक्ष्म संरचना और तापमान जैसे बाह्य कारकों पर निर्भर करती है।

ध्यान दें कि समीकरण (10.6) में $\vec{\mathbf{E}}$ डाइलेक्ट्रिक पदार्थ में मौजूद नेट विद्युत्-क्षेत्र है। यह मुक्त आवेशों और डाइलेक्ट्रिक पदार्थ के ध्रुवण, दोनों के ही कारण है। अतः यदि हम डाइलेक्ट्रिक पदार्थ को बाह्य विद्युत्-क्षेत्र $\vec{\mathbf{E}}_0$ में रखें तो हम सीधे-सीधे समीकरण (10.6) से $\vec{\mathbf{P}}$ की गणना नहीं कर सकते।

ऐसा इसलिए है, क्योंकि बाह्य विद्युत्-क्षेत्र डाइलेक्ट्रिक पदार्थ का ध्रुवण करता है। लेकिन परिणामी ध्रुवण का अपना विद्युत्-क्षेत्र होता है। ध्रुवण का विद्युत्-क्षेत्र नेट विद्युत्-क्षेत्र में योगदान करता है जो परिवर्तित हो जाता है। परिवर्तित विद्युत्-क्षेत्र फिर से ध्रुवण को परिवर्तित कर देता है और यह प्रक्रिया चलती रहती है। अतः वास्तव में पदार्थ के ध्रुवण की परिघटना काफ़ी जटिल होती है और हम उसके विवरण में यहां नहीं जाएंगे। अभी के लिए हमारी रुचि केवल यह जानने में है कि किसी बिंदु पर ध्रुवित डाइलेक्ट्रिक पदार्थ का विद्युत्-क्षेत्र क्या होता है? यह आप अगले भाग में पढ़ेंगे, लेकिन आगे पढ़ने से पहले आप एक सरल बोध प्रश्न हल करें।

बोध प्रश्न 1 – ध्रुवण की इकाई

$\vec{\mathbf{P}}$ की इकाई प्राप्त करें।

10.4 ध्रुवित पदार्थ का विद्युत्-क्षेत्र

ध्रुवित डाइलेक्ट्रिक पदार्थ का एक पिंड लें, जिसमें बहुत बड़ी संख्या में परमाण्वीय/आणविक द्विध्रुव मौजूद हैं जो बाह्य विद्युत्-क्षेत्र की दिशा में संरेखित हैं। मान लें कि इस पदार्थ का प्रति एकक आयतन द्विध्रुव आघूर्ण $\vec{\mathbf{P}}$ है। अब सवाल यह है : **किसी**

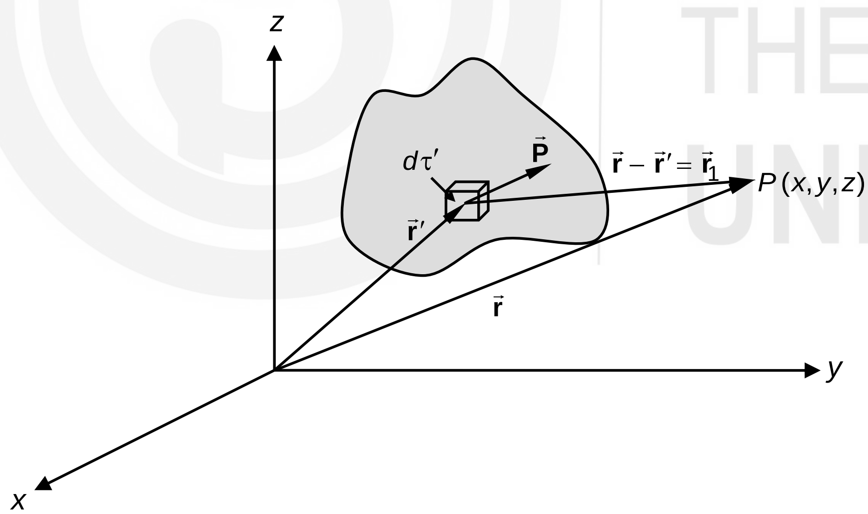
बिंदु पर इस पिंड द्वारा उत्पन्न विद्युत्-क्षेत्र क्या है? इकाई 5 से याद करें कि हम जानते हैं कि किसी बिंदु पर एक द्विध्रुव का विद्युत्-क्षेत्र क्या होता है।

अतः इस सवाल का जवाब पाने के लिए हम डाइलेक्ट्रिक पदार्थ के इस पिंड को विशाल संख्या में अत्यल्प द्विध्रुवों में बांट देंगे और किसी बिंदु पर उन द्विध्रुवों के विद्युत्-क्षेत्रों का समाकलन करके उस बिंदु पर पिंड का नेट विद्युत्-क्षेत्र प्राप्त करेंगे। यह भौतिकी की एक मानक विधि है जिसके बारे में आपने इस पाठ्यक्रम के खंड 1 में पढ़ा है। शायद आप जानते हों कि इस सवाल को विद्युत्-विभव के लिए हल करना आसान होता है, क्योंकि वह एक अदिश राशि है। तब हम उसके व्यंजक से विद्युत्-क्षेत्र प्राप्त कर सकते हैं।

तो हम डाइलेक्ट्रिक पदार्थ का एक अत्यल्प आयतन अवयव $d\tau$ लेते हैं जिसका द्विध्रुव आघूर्ण $\vec{\mathbf{P}}d\tau$ है। पहले हम उस बिन्दु पर इस द्विध्रुव अवयव के कारण विद्युत्-विभव की गणना करते हैं। फिर सम्पूर्ण डाइलेक्ट्रिक पिंड पर समाकलन करके कुल विद्युत्-विभव प्राप्त करते हैं। आप इकाई 8 से जानते हैं कि एक द्विध्रुव के कारण, जिसका द्विध्रुव आघूर्ण $\vec{\mathbf{p}}$ हो, उससे दूरी $\vec{\mathbf{r}}$ पर स्थित बिन्दु पर उत्पन्न **विद्युत्-विभव** होता है :

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\hat{\mathbf{r}}.\vec{\mathbf{p}}}{r^2} \qquad (10.7)$$

चित्र 10.10 देखें जिसमें डाइलेक्ट्रिक पिंड का आयतन अवयव $d\tau'$ दिखाया गया है। यह स्थिति $\vec{\mathbf{r}}'(x', y', z')$ पर है और इसका द्विध्रुव आघूर्ण $\vec{\mathbf{P}}d\tau'$ है।



चित्र 10.10: डाइलेक्ट्रिक पिंड के कारण किसी बिंदु पर विद्युत्-क्षेत्र की गणना।

बिन्दु $P\,(x, y, z)$ पर इस अवयव के कारण विद्युत्-विभव dV होता है :

$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{\mathbf{p}}.\hat{\mathbf{r}}_1}{r_1^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{\mathbf{P}}.\hat{\mathbf{r}}_1}{r_1^2}d\tau' \qquad (\because \; \vec{\mathbf{p}} = \vec{\mathbf{P}}d\tau') \; (10.8)$$

जहां $\qquad \vec{\mathbf{r}}_1 = \vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}' \qquad (10.9)$

पिंड के सम्पूर्ण आयतन τ पर समाकलन करने पर हमें **कुल विद्युत्-विभव** का मान प्राप्त होता है :

$$V(\vec{\mathbf{r}}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_\tau \frac{\vec{\mathbf{P}}\,.\,\hat{\mathbf{r}}_1}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'|^2}d\tau' \quad (10.10)$$

अब आप सिद्ध कर सकते हैं कि

$$\vec{\nabla}'\left(\frac{1}{r_1}\right) = \frac{\hat{\mathbf{r}}_1}{r_1^2} \quad (10.11)$$

जहां $\vec{\nabla}'$ का परिकलन (x', y', z') के लिए होता है। वास्तव में आप यह गणना स्वयं कर सकते हैं और समीकरण (10.11) को सिद्ध कर सकते हैं। इसके लिए आगे पढ़ने से पहले बोध प्रश्न 2 हल करें।

बोध प्रश्न 2 – ध्रुवित डाइलेक्ट्रिक का विद्युत्-विभव

समीकरण (10.11) व्युत्पन्न करें।

इकाई 8 और 9 से आप जानते हैं कि एक बिन्दु आवेश q के कारण दूरी r पर विद्युत्-विभव का व्यंजक है :

$$V(\vec{\mathbf{r}}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$$

और आवेश वितरण का विद्युत्-विभव का व्यंजक है :

$$V(\vec{\mathbf{r}}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum\frac{q_i}{r_i}$$

किसी संतत आवेश वितरण के लिए :

$$V(\vec{\mathbf{r}}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{dq}{r}$$

आयतन आवेश घनत्व $\rho(\vec{\mathbf{r}})$ वाले आवेश वितरण के लिए :

$$V(\vec{\mathbf{r}}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(\vec{\mathbf{r}}')}{r}\,d\tau'$$

पृष्ठ आवेश घनत्व $\sigma(\vec{\mathbf{r}})$ वाले पृष्ठ आवेश वितरण के लिए :

$$V(\vec{\mathbf{r}}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\sigma(\vec{\mathbf{r}}')}{r}\,dS'$$

समीकरण (10.11) को समीकरण (10.10) में रखने पर हमें मिलता है :

$$V(\vec{\mathbf{r}}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_\tau \vec{\mathbf{P}}.\vec{\nabla}'\left(\frac{1}{r_1}\right)d\tau' \quad (10.12)$$

अब हम समीकरण (10.12) में इस सदिश सर्वसमिका का प्रयोग करेंगे :

$$\vec{\nabla}'.(f\vec{\mathbf{A}}) = f\,\vec{\nabla}'.\vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{A}}.\vec{\nabla}'f$$

जहां f और $\vec{\mathbf{A}}$ क्रमशः अदिश और सदिश क्षेत्र हैं। हम सदिश सर्वसमिका में $f = \dfrac{1}{r_1}$ और $\vec{\mathbf{A}} = \vec{\mathbf{P}}$ रखते हैं। तब हमें मिलता है :

$$\vec{\mathbf{P}}\,.\,\vec{\nabla}'\left(\frac{1}{r_1}\right) = \left(\vec{\nabla}'\,.\,\frac{\vec{\mathbf{P}}}{r_1}\right) - \frac{1}{r_1}(\vec{\nabla}'.\,\vec{\mathbf{P}})$$

इस परिणाम को समीकरण (10.12) में रखने पर हमें विभव का यह व्यंजक मिलता है :

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\int_\tau\left(\vec{\nabla}'.\frac{\vec{\mathbf{P}}}{r_1}\right)d\tau' - \int_\tau\frac{1}{r_1}(\vec{\nabla}'.\vec{\mathbf{P}})\,d\tau'\right] \quad (10.13)$$

अब हम समीकरण (10.13) के पहले पद पर गाउस की डाइवर्जेंस प्रमेय लागू करके विभव के व्यंजक को फिर से लिखते हैं। तब हमें मिलता है :

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\oint_S\frac{1}{r_1}\vec{\mathbf{P}}.d\vec{\mathbf{S}}' - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_\tau\frac{1}{r_1}(\vec{\nabla}'.\vec{\mathbf{P}})\,d\tau' \quad (10.14)$$

समीकरण (10.14) का पहला पद एक **पृष्ठ आवेश घनत्व** σ_b द्वारा उत्पन्न विद्युत्-विभव के समतुल्य है (हाशिए में दी गई टिप्पणी का अंतिम समीकरण देखें) यदि हम σ_b की परिभाषा इस प्रकार दें :

$$\boxed{\sigma_b = \vec{\mathbf{P}}.\hat{\mathbf{n}}} \qquad (10.15)$$

जहां $\hat{\mathbf{n}}$ पृष्ठ के लंबवत् एकक सदिश है। समीकरण (10.14) का दूसरा पद एक **आयतन आवेश घनत्व** ρ_b द्वारा उत्पन्न विद्युत्-विभव के समतुल्य है यदि हम ρ_b की परिभाषा इस प्रकार दें :

$$\boxed{\rho_b = -\vec{\nabla}.\vec{\mathbf{P}}} \qquad (10.16)$$

इन परिभाषाओं के साथ हम समीकरण (10.14) को इस प्रकार लिख सकते हैं :

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\oint_S \frac{\sigma_b}{r_1}\, dS' + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_\tau \frac{\rho_b}{r_1} d\tau' \qquad (10.17)$$

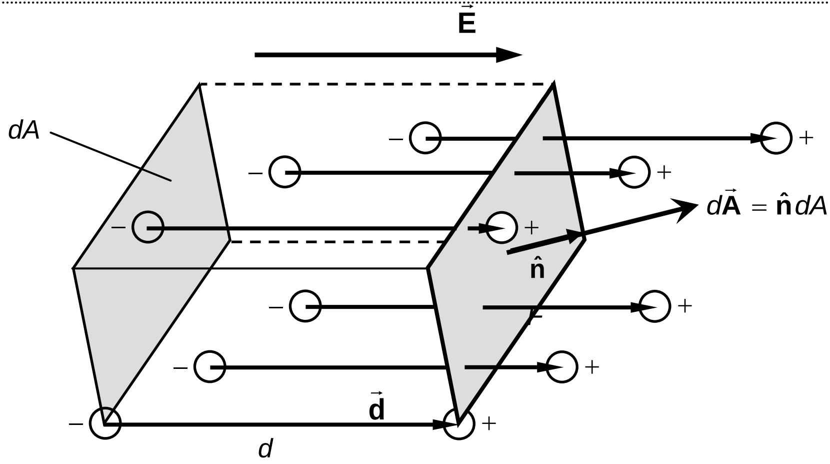
इस तरह **एक ध्रुवित डाइलेक्ट्रिक पिंड का विद्युत्-विभव और विद्युत्-क्षेत्र डाइलेक्ट्रिक पदार्थ में परिबद्ध आवेशों के पृष्ठ आवेश घनत्व $\sigma_b = \vec{\mathbf{P}}.\hat{\mathbf{n}}$ और आयतन आवेश घनत्व $\rho_b = -\vec{\nabla}.\vec{\mathbf{P}}$ द्वारा उत्पन्न विद्युत्-विभव और विद्युत्-क्षेत्र के बराबर होता है।** यानी समीकरण (10.10) को हल करने के लिए हमें सभी अत्यल्प द्विध्रुवों के योगदान की गणना करने की ज़रूरत नहीं है। इसके बजाय हम परिबद्ध आवेशों का निर्धारण कर सकते हैं और फिर उन विद्युत्-क्षेत्रों का जो वे उत्पन्न करते हैं। यह प्रक्रिया गाउस के नियम का प्रयोग करके किसी भी आयतन या पृष्ठ आवेश घनत्व के विद्युत्-क्षेत्र की गणना करने जैसी ही है। अब आप एक ध्रुवित डाइलेक्ट्रिक पदार्थ में इन परिबद्ध आवेश घनत्वों का भौतिक अर्थ समझना चाहेंगे।

10.4.1 परिबद्ध आवेश घनत्व की भौतिक व्याख्या

अभी तक आपने पढ़ा है कि ध्रुवित पिंड का विद्युत्-क्षेत्र “परिबद्ध आवेशों” के वितरण के विद्युत्-क्षेत्र के बराबर होता है जिनके घनत्व σ_b और ρ_b हैं। लेकिन हमने इन राशियों की परिभाषा समीकरण (10.12) को एक विशेष रूप में रखने के लिए दी थी और इनका भौतिक अर्थ नहीं समझाया था। इस भाग में हम यही समझाएंगे। अब हम सिद्ध करेंगे कि परिबद्ध विद्युत् आवेश घनत्व σ_b और ρ_b **वास्तविक आवेष** होते हैं।

आइये, पहले हम पृष्ठ आवेश घनत्व σ_b लें। मान लें कि डाइलेक्ट्रिक पदार्थ के प्रति एकक आयतन में अणुओं की संख्या N है। बाह्य विद्युत्-क्षेत्र $\vec{\mathbf{E}}$ की उपस्थिति में धनात्मक और ऋणात्मक आवेशों के केन्द्र एक-दूसरे से d की दूरी पर विस्थापित हो जाते हैं। आसानी के लिए हम मान लेते हैं कि ऋणात्मक आवेशों के केन्द्र स्थिर रहते हैं और धनात्मक आवेशों के केन्द्र गतिमान होते हैं, जिससे कि प्रति अणु द्विध्रुव आघूर्ण $\vec{\mathbf{p}}$ उत्पन्न होता है।

अब डाइलेक्ट्रिक पदार्थ में पृष्ठीय क्षेत्रफल का अवयव $d\vec{\mathbf{A}}$ लें (चित्र 10.11)। बाह्य विद्युत्-क्षेत्र $\vec{\mathbf{E}}$ की उपस्थिति में धनात्मक आवेशों के केन्द्र इस पृष्ठीय क्षेत्रफल के अवयव $d\vec{\mathbf{A}}$ को $\vec{\mathbf{E}}$ की दिशा में पार करेंगे।



चित्र 10.11: सदिश $d\vec{\mathbf{A}}$ छायांकित पृष्ठ के लंबवत् है। वृत्त अणु के धनात्मक और ऋणात्मक आवेश दिखाते हैं, जो विद्युत्-क्षेत्र की दिशा में एक-दूसरे से दूरी d पर हैं।

पृष्ठीय क्षेत्रफल के अवयव $d\vec{\mathbf{A}}$ को पार करने वाले धनात्मक आवेशों के केन्द्रों की संख्या उस समांतर चतुर्भुज में मौजूद अणुओं की संख्या के बराबर है जिसका आयतन है :

$$dV = d\vec{\mathbf{A}}.\vec{\mathbf{d}} \tag{10.18}$$

अतः आयतन अवयव dV में आवेश का मान है :

$$dQ = NqdV = Nq\vec{\mathbf{d}}.d\vec{\mathbf{A}} = N\vec{\mathbf{p}}.d\vec{\mathbf{A}} = \vec{\mathbf{P}}.d\vec{\mathbf{A}} = \vec{\mathbf{P}}.\hat{\mathbf{n}}dA \tag{10.19}$$

जहां $\vec{\mathbf{p}} = q\vec{\mathbf{d}}$ द्विध्रुव आघूर्ण है, $\vec{\mathbf{P}} = N\vec{\mathbf{p}}$ ध्रुवण है और $\hat{\mathbf{n}}$ पृष्ठ के लंबवत् एकक सदिश है। चित्र 10.10 से आप देख सकते हैं कि यदि डाइलेक्ट्रिक पदार्थ के पृष्ठ पर क्षेत्रफल का अवयव $d\vec{\mathbf{A}}$ हो, तो आवेश dQ उसमें मोटाई $\vec{\mathbf{d}}.\hat{\mathbf{n}}$ की एक परत में एकत्र होगा। चूंकि d अणु के आकार के परिमाण की कोटि का है, अतः हम कह सकते हैं कि डाइलेक्ट्रिक पदार्थ के पृष्ठ पर आवेश उपस्थित है। अतः पृष्ठीय आवेष घनत्व यानी प्रति एकक क्षेत्रफल पृष्ठीय आवेश का मान होता है :

$$\sigma_b = \frac{dQ}{dA} = \vec{\mathbf{P}}.\hat{\mathbf{n}} \tag{10.20}$$

अतः **ध्रुवण के कारण डाइलेक्ट्रिक पदार्थ के पृष्ठ पर परिबद्ध आवेश आ जाता है।**

अब आइये, हम वह स्थिति लें कि जब **ध्रुवण असमान है** यानी डाइलेक्ट्रिक पदार्थ के भिन्न बिन्दुओं पर इसका मान भिन्न है। इसका अर्थ यह है कि डाइलेक्ट्रिक पदार्थ रैखिक नहीं है। यह असमदैशिक है यानी ध्रुवण सभी दिशाओं में समान नहीं है और असमांग है यानी ध्रुवण स्थिति के साथ-साथ बदलता है।

इस स्थिति में डाइलेक्ट्रिक पदार्थ के पृष्ठ पर परिबद्ध आवेश एकत्र होने के साथ-साथ डाइलेक्ट्रिक पदार्थ के **भीतर** भी परिबद्ध आवेश एकत्र होता है। आइये, हम इस स्थिति के लिए परिबद्ध आवेश घनत्व की गणना करें। चूंकि ध्रुवण असमान है, इसलिए समांतर चतुर्भुज के आयतन dV से और उसके पृष्ठीय क्षेत्रफल $d\vec{\mathbf{A}}$ वाले पृष्ठ से एक नेट आवेश Q बाहर की ओर प्रवाहित होता है। इसका मान हम समीकरण (10.19) द्वारा दिए गए dQ के मान का पूरे पृष्ठ पर समाकलन करके प्राप्त कर सकते हैं :

$$Q = \int \vec{\mathbf{P}}.d\vec{\mathbf{A}} \tag{10.21}$$

किसी दिए आयतन के भीतर रह जाने वाला नेट परिबद्ध आवेश उससे बाहर की ओर प्रवाहित होने वाले आवेश के बराबर लेकिन विपरीत चिन्ह वाला होता है। अतः,

$$-Q = -\oint_S \vec{\mathbf{P}}.d\vec{\mathbf{A}} \qquad (10.22क)$$

जैसा कि आप जानते हैं हम नेट परिबद्ध आवेश को परिबद्ध आयतन आवेश घनत्व के पदों में इस प्रकार लिख सकते हैं :

$$-Q = \int_V \rho_b dV \quad \Rightarrow \quad -\oint_S \vec{\mathbf{P}}.d\vec{\mathbf{A}} = \int_V \rho_b dV \qquad (10.22ख)$$

इकाई 4 से आप जानते हैं कि गाउस का डाइवर्जेंस प्रमेय होता है :

$$\oint_S \vec{\mathbf{P}}.d\vec{\mathbf{A}} = \int_V \vec{\nabla}.\vec{\mathbf{P}} dV \qquad (10.23)$$

समीकरण (10.22ख) को समीकरण (10.23) में रखने पर हमें मिलता है :

$$\int_V \vec{\nabla}.\vec{\mathbf{P}} dV = -\int_V \rho_b dV \qquad (10.24)$$

चूंकि यह परिणाम सभी आयतन अवयवों के लिए सत्य है, अतः,

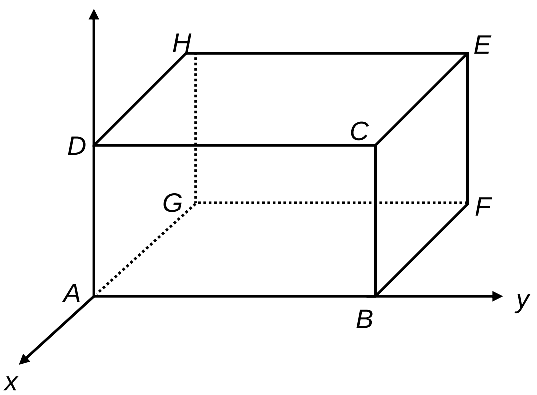
$$\rho_b = -\vec{\nabla}.\vec{\mathbf{P}} \qquad (10.25)$$

समीकरण (10.25) हमें बताता है कि **यदि डाइलेक्ट्रिक पदार्थ का ध्रुवण असमान होता है**, तो **उसके डाइवर्जेंस के कारण पदार्थ में नेट परिबद्ध आवेश एकत्रित हो जाता है। आयतन आवेश घनत्व इस परिबद्ध आवेश से संबंधित होता है।** समदैशिक डाइलेक्ट्रिक पदार्थों के लिए आयतन आवेश घनत्व शून्य होता है, क्योंकि उनके लिए $\vec{\nabla}.\vec{\mathbf{P}} = 0$ होता है। ये **वास्तविक आवेश घनत्व** हैं जिन्हें हमने यहां (पृष्ठीय या आयतन) परिबद्ध या ध्रुवण आवेश घनत्व कहा है। अब आप एक वास्तविक परस्थिति के लिए इनके मानों की गणना करना चाहेंगे।

बोध प्रश्न 3 – परिबद्ध आवेश घनत्व का परिकलन

क) एक डाइलेक्ट्रिक खंड का ध्रुवण इस तरह होता है कि $\vec{\mathbf{P}} = 2.5\times10^{-7}(2x\,\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}})\,\text{Cm}^{-2}$। इस खंड के लिए परिबद्ध आयतन आवेश घनत्व की गणना करें।

ख) डाइलेक्ट्रिक पदार्थ का ध्रुवित खंड लें जिसे चित्र 10.12 में दिखाया गया है। इसके लिए ध्रुवण $\vec{\mathbf{P}} = 2.0\times10^{-6}\,\hat{\mathbf{k}}\,\text{Cm}^{-2}$ हैं। इस खंड के 6 पृष्ठों पर पृष्ठीय आवेश घनत्व की गणना करें।



चित्र 10.12: बोध प्रश्न 3ख के लिए चित्र।

अब हम यह समझाएंगे कि एक डाइलेक्ट्रिक पदार्थ के भीतर गाउस का नियम किस प्रकार रूपांतरित होता है।

10.5 डाइलेक्ट्रिक पदार्थों के लिए स्थिरवैद्युत समीकरणें : विस्थापन सदिश $\vec{D}$ और गाउस नियम

आपने इकाई 6 में स्थिरवैद्युतिकी की आधारभूत समीकरण यानी गाउस के नियम के बारे में पढ़ा है। इकाई 6 से याद करें कि गाउस के नियम का अवकली रूप है :

$$\vec{\nabla}\,.\,\vec{\mathbf{E}} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad (10.26)$$

यहां ρ सभी विद्युत आवेशों का आयतन आवेश घनत्व है और $\vec{\mathbf{E}}$ इन सभी आवेशों का नेट विद्युत्-क्षेत्र है। डाइलेक्ट्रिक पदार्थों के लिए गाउस के नियम को रूपांतरित करने के लिए हम पाते हैं कि समीकरण (10.26) के विद्युत्-क्षेत्र को निम्नलिखित दो भागों में बांटने से आसानी होती है :

1. एक जो परिबद्ध ध्रुवण आवेश घनत्व (ρ_b) के कारण होता है, और
2. दूसरा जो बाकी सभी आवेशों (जिन्हें हम इससे बेहतर शब्द नहीं होने के कारण **मुक्त आवेश** कहते हैं) के कारण होता है।

मुक्त आवेश डाइलेक्ट्रिक पदार्थ में अन्य कोई भी वह आवेश है जो ध्रुवण का परिणाम नहीं है। यह चालक पर मौजूद इलेक्ट्रॉनों के कारण हो सकता है या फिर डाइलेक्ट्रिक पदार्थ में मौजूद आयनों के कारण या किसी अन्य कारण से हो सकता है। अभी हम मुक्त आवेश के स्रोत की चिन्ता नहीं करेंगे।

तब हम डाइलेक्ट्रिक पदार्थ में कुल आयतन आवेश घनत्व ρ को परिबद्ध ध्रुवण आवेश घनत्व ρ_b और मुक्त आवेश घनत्व ρ_f के योग के रूप में लिख सकते हैं :

$$\rho = \rho_f + \rho_b \qquad (10.27क)$$

अतः, समीकरण (10.26) या गाउस का नियम हो जाता है :

$$\vec{\nabla}.\vec{\mathbf{E}} = \frac{\rho_f + \rho_b}{\varepsilon_0} = \frac{\rho_f - \vec{\nabla}.\vec{\mathbf{P}}}{\varepsilon_0} \quad (\because\ \rho_b = -\vec{\nabla}.\vec{\mathbf{P}}) \qquad (10.27ख)$$

या $$\vec{\nabla}.\left(\vec{\mathbf{E}} + \frac{\vec{\mathbf{P}}}{\varepsilon_0}\right) = \frac{\rho_f}{\varepsilon_0} \qquad (10.28क)$$

या $$\vec{\nabla}.\left(\varepsilon_0\vec{\mathbf{E}} + \vec{\mathbf{P}}\right) = \rho_f \qquad (10.28ख)$$

अब हम एक नया सदिश $\vec{\mathbf{D}}$ जिसे हम **विद्युत् विस्थापन** कहते हैं, इस प्रकार परिभाषित करते हैं :

$$\boxed{\vec{\mathbf{D}} = \varepsilon_0\vec{\mathbf{E}} + \vec{\mathbf{P}}} \qquad (10.29)$$

समीकरण (10.29) को (10.28ख) में रखने पर हमें $\vec{\mathbf{D}}$ के पदों में डाइलेक्ट्रिक माध्यम के लिए गाउस का नियम प्राप्त होता है :

$$\boxed{\vec{\nabla}.\vec{\mathbf{D}} = \rho_f} \tag{10.30क}$$

समाकल के रूप में डाइलेक्ट्रिक माध्यम के लिए गाउस का नियम होता है :

$$\boxed{\int \vec{\mathbf{D}}.d\vec{\mathbf{S}} = (Q_f)_{\text{परिबद्ध}}} \tag{10.30ख}$$

जहां $(Q_f)_{\text{परिबद्ध}}$ उस आयतन में कुल मुक्त आवेश है। यह डाइलेक्ट्रिक पदार्थों के लिए गाउस के नियम को व्यक्त करने का बहुत उपयोगी तरीका है, क्योंकि इसमें केवल उस आयतन में मौजूद **मुक्त आवेश** ही शामिल हैं। यानी हम $\vec{\mathbf{D}}$ की गणना मानक विधियों से कर सकते हैं, जिसमें किसी प्रकार की सममिति (रैखिक, समतलीय, गोलीय या बेलनाकार) वाले आवेश वितरणों के लिए गाउस नियम का इस्तेमाल किया जाता है। $\vec{\mathbf{E}}$ के कर्ल का समीकरण वही रहता है :

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{0}} \tag{10.31}$$

भाग 10.3 के समीकरण (10.6) से आप जानते हैं कि **रैखिक डाइलेक्ट्रिक पदार्थों** के लिए ध्रुवण $\vec{\mathbf{P}}$ विद्युत्-क्षेत्र के समानुपाती होता है और यदि $\vec{\mathbf{E}}$ बहुत प्रबल न हो तो इसका मान होता है :

$$\vec{\mathbf{P}} = \varepsilon_0 \chi \, \vec{\mathbf{E}} \tag{10.32}$$

आपने सीखा है कि χ **डाइलेक्ट्रिक पदार्थ या माध्यम की वैद्युत प्रवृत्ति होती है। यह पदार्थ का स्थूल गुणधर्म है, जो उसकी सूक्ष्म संरचना पर निर्भर करता है। यह इस बात का सूचक है कि बाह्य विद्युत्-क्षेत्र द्वारा किस सीमा तक किसी पदार्थ का ध्रुवण हो सकता है।** किसी पदार्थ की वैद्युत प्रवृत्ति जितनी अधिक होगी, उतना ही उस पदार्थ का बाह्य विद्युत्-क्षेत्र में ध्रुवण अधिक होगा, जिससे कि पदार्थ के अन्दर का विद्युत्-क्षेत्र घट जाएगा।

समीकरण (10.32) को समीकरण (10.29) में रखने पर हम रैखिक डाइलेक्ट्रिक पदार्थों के लिए $\vec{\mathbf{D}}$ का मान इस प्रकार लिख सकते हैं :

$$\vec{\mathbf{D}} = \varepsilon_0 \vec{\mathbf{E}} + \varepsilon_0 \chi \vec{\mathbf{E}} = \varepsilon_0 (1+\chi) \vec{\mathbf{E}} \tag{10.33}$$

अब यदि हम एक नये प्राचल ε को निम्नवत परिभषित करें :

$$\boxed{\varepsilon = \varepsilon_0 \, (1+\chi)} \tag{10.34}$$

तब हम डाइलेक्ट्रिक पदार्थों के भीतर समीकरण (10.33) द्वारा दिए गए क्षेत्र $\vec{\mathbf{D}}$ का मान इस प्रकार लिख सकते हैं :

$$\boxed{\vec{\mathbf{D}} = \varepsilon \vec{\mathbf{E}}} \tag{10.35}$$

आप समीकरणों (10.29) से (10.37) को याद रखें तो अच्छा रहेगा क्योंकि हम इनका इस खंड में काफ़ी इस्तेमाल करेंगे।

समीकरण (10.34) द्वारा परिभाषित समानुपातिकता स्थिरांक ε को डाइलेक्ट्रिक पदार्थ की **विद्युत्शीलता (permittivity)** कहा जाता है। समीकरण (10.35) हमें बताता है कि विस्थापन $\vec{\mathbf{D}}$ कुल विद्युत्-क्षेत्र $\vec{\mathbf{E}}$ के समानुपाती है। यदि हम समीकरण (10.34) को ε_0 से भाग दें तो हमें एक विमाहीन राशि ε_r या K प्राप्त होती है :

$$\boxed{\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = 1 + \chi = K} \tag{10.36}$$

अचर ε_r या K डाइलेक्ट्रिक पदार्थ या माध्यम की **आपेक्षिक विद्युत्शीलता (relative permittivity)** या **डाइलेक्ट्रिक नियतांक** कहलाता है। अब से हम डाइलेक्ट्रिक नियतांक के लिए प्रतीक K का प्रयोग करेंगे। इस तरह हम समीकरण (10.35) को ऐसे भी लिख सकते हैं :

$$\boxed{\vec{\mathbf{D}} = \varepsilon_0 K \vec{\mathbf{E}}} \tag{10.37}$$

वैद्युत प्रवृत्ति और डाइलेक्ट्रिक नियतांक डाइलेक्ट्रिक पदार्थों के महत्वपूर्ण स्थूल गुणधर्म हैं। डाइलेक्ट्रिक नियतांक इस बात का भी मापन करता है कि किसी बाहय विद्युत्-क्षेत्र द्वारा कोई डाइलेक्ट्रिक पदार्थ किस सीमा तक ध्रुवित किया जा सकता है। यदि अधिक डाइलेक्ट्रिक नियतांक वाले पदार्थ को विद्युत्-क्षेत्र में रखा जाए, तो उस पदार्थ के भीतर विद्युत्-क्षेत्र का परिमाण बहुत कम हो जाता है। इस गुणधर्म का इस्तेमाल धारिता बढ़ाने के लिए किया जाता है और यह विविध अनुप्रयोगों के लिए संधारित्रों के डिज़ाइन के लिए एक महत्त्वपूर्ण तथ्य होता है।

अब आप थोड़ा ठहर कर उन बातों को दोहराना चाहेंगे जिन्हें आपने अभी तक पढ़ा है। इसके साथ-साथ आप डाइलेक्ट्रिक नियतांक की गणना के लिए एक बोध प्रश्न भी करना चाहेंगे।

बोध प्रश्न 4 – डाइलेक्ट्रिक पदार्थ का डाइलेक्ट्रिक नियतांक

दो समांतर प्लेटों पर, जिनके क्षेत्रफल $100\ \text{cm}^2$ हैं, परिमाण 1.0×10^{-7} C के समान और विपरीत आवेश हैं। प्लेटों के बीच के स्थान में डाइलेक्ट्रिक पदार्थ रखा जाता है और डाइलेक्ट्रिक के भीतर विद्युत्-क्षेत्र $3.3 \times 10^5\ \text{Vm}^{-1}$ है। डाइलेक्ट्रिक का डाइलेक्ट्रिक नियतांक क्या है? दिया है कि प्लेटों के बीच डाइलेक्ट्रिक पदार्थ न होने पर विद्युत्-क्षेत्र $E_0 = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$ है जहां σ प्लेटों पर पृष्ठीय आवेश घनत्व है।

इस तरह निर्वात में स्थिरवैद्युतिकी के नियम

$$\boxed{\vec{\nabla}.\vec{\mathbf{E}}_0 = \frac{\rho_f}{\varepsilon_0} \quad \text{तथा} \quad \vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{E}} = \vec{0}} \tag{10.38क}$$

रैखिक डाइलेक्ट्रिक पदार्थों के लिए (जिनमें ध्रुवण विद्युत्-क्षेत्र के समानुपाती होता है) इस प्रकार रूपांतरित हो जाते है :

$$\boxed{\vec{\nabla}.\vec{\mathbf{D}} = \rho_f \quad \text{or} \quad \vec{\nabla}.(K\vec{\mathbf{E}}) = \frac{\rho_f}{\varepsilon_0} \quad \text{and} \quad \vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{0}}} \tag{10.38ख}$$

यदि K का मान अचर हो तब हम लिख सकते हैं :

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{E}} = \vec{\nabla} \times (K\vec{\mathbf{E}}) = \vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{D}} = \vec{\mathbf{0}} \tag{10.38ग}$$

ध्यान दें कि KE के लिए समीकरणों (10.38ख और ग) का वही स्वरूप है, जो समीकरण (10.38क) का E_0 (निर्वात में विद्युत्-क्षेत्र) के लिए है। इससे हमें यह हल प्राप्त होता है :

$$KE = E_0 \qquad (10.39\text{क})$$

समीकरण (10.39क) का अर्थ यह है कि डाइलेक्ट्रिक नियतांक K वाले डाइलेक्ट्रिक माध्यम में **सर्वत्र विद्युत्-क्षेत्र, गुणक K से कम हो जाता है**।

इकाई 8 के समीकरण (8.15) से याद करें कि किन्हीं दो बिन्दुओं a और b के बीच का विभवांतर, विद्युत्-क्षेत्र के रेखा समाकल का ऋणात्मक होता है :

$$V_b - V_a = -\int_a^b \vec{\mathbf{E}}.d\vec{\mathbf{r}} \qquad (10.39\text{ख})$$

अतः विभवांतर या वोल्टता भी उसी गुणक K से कम हो जाती है। लेकिन समांतर प्लेट संधारित्र के लिए उसकी प्लेटों पर मौजूद आवेश का मान वही रहता है। अतः उसकी धारिता $C = \dfrac{Q}{V}$ गुणक K से बढ़ जाती है। अतः समीकरण (10.1) से उसका मान होता है :

$$C = \frac{\varepsilon_0 KA}{d} \qquad (10.39\text{ग})$$

अब आप इन समीकरणों को समांतर प्लेट संधारित्र पर लागू करें।

बोध प्रश्न 5 – विद्युत् विस्थापन और ध्रुवण

समांतर प्लेट संधारित्र की प्लेटों का क्षेत्रफल $6.45 \times 10^{-4}\,\text{m}^2$ है और उनके बीच की दूरी $2.0 \times 10^{-3}\,\text{m}$ है। प्लेटों पर 100 V की वोल्टता लगाई जाती है। यदि संधारित्र की प्लेटों के बीच डाइलेक्ट्रिक नियतांक 6.0 वाला डाइलेक्ट्रिक पदार्थ रखा जाए, तो निम्नलिखित गणनाएं करें :

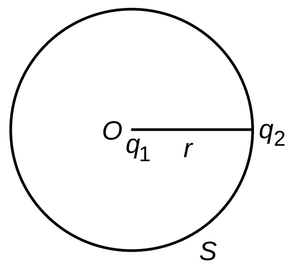
क) संधारित्र की धारिता;

ख) संधारित्र की प्रत्येक प्लेट पर आवेश का मान;

ग) विस्थापन D; और

घ) ध्रुवण P।

अब आप जानना चाहेंगे : **डाइलेक्ट्रिक पदार्थ में रखे दो बिन्दु आवेशों के बीच कितना बल लगता है?**



चित्र 10.13: एक समांग डाइलेक्ट्रिक माध्यम में स्थित दो आवेश q_1 तथा q_2 ।

इस सवाल का जवाब देने के लिए दो आवेश q_1 और q_2 लें जो एक समांग डाइलेक्ट्रिक पदार्थ में स्थित हैं। हम इस डाइलेक्ट्रिक पदार्थ में आवेश q_1 पर केन्द्रित गोलाकार गाउसीय पृष्ठ लेते हैं। इसकी त्रिज्या r है जो दोनों आवेशों q_1 और q_2 के बीच की दूरी है (देखें चित्र 10.13)।

आइये, हम इस पृष्ठ पर गाउस का नियम लागू करें। चूंकि $\vec{\mathbf{D}}$ त्रिज्य सदिश के अनुदिश है, जो पृष्ठ S के लंबवत् एकक सदिश $\hat{\mathbf{n}}$ के समांतर है, इसलिए गाउस का नियम लागू करने पर हमें मिलता है :

$$\oint_S \vec{\mathbf{D}}.d\vec{\mathbf{S}} = \oint_S \vec{\mathbf{D}}.\hat{\mathbf{n}}\,dS = \oint_S D\,dS = Q_{\text{परिबद्ध}}$$

यहां $Q_{\text{परिबद्ध}} = q_1$ क्योंकि गाउसीय गोला आवेश q_1 को समावेशित करता है।

गाउसीय गोले की त्रिज्या r है और अचर D के लिए हमें मिलता है :

$$4\pi r^2 D = q_1 \quad \text{या} \quad D = \frac{q_1}{4\pi r^2}$$

समीकरण (10.37) से हम इस परिणाम को इस तरह लिख सकते हैं :

$$D = \frac{q_1}{4\pi r^2} = \varepsilon_0 K E$$

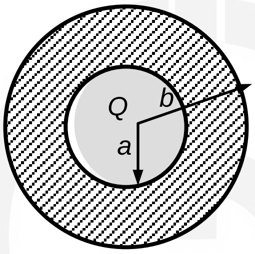
या

$$E = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2 K} \quad \text{और} \quad \vec{\mathbf{E}} = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0\, r^2 K}\hat{\mathbf{r}} \qquad (10.40)$$

जहां $\hat{\mathbf{r}}$ त्रिज्य दिशा में q_1 से q_2 की ओर एकक सदिश है। अतः आवेश q_2 पर लग रहा बल है :

$$\vec{\mathbf{F}} = q_2\vec{\mathbf{E}} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 K r^2}\hat{\mathbf{r}} \qquad (10.41)$$

समीकरण (10.41) से आप देख सकते हैं कि डाइलेक्ट्रिक माध्यम में किन्हीं दो आवेशों के बीच का बल गुणक K से घट जाता है। अब हम डाइलेक्ट्रिक पदार्थ में विद्युत्-क्षेत्र की गणना का उदाहरण लेंगे।



चित्र 10.14: उदाहरण 10.2 के लिए चित्र।

उदाहरण 10.2 : डाइलेक्ट्रिक पदार्थ में विद्युत्-क्षेत्र की गणना

त्रिज्या a वाले धातु के एक गोले पर आवेश Q है। इसे दूरी b तक डाइलेक्ट्रिक नियतांक K वाले रैखिक डाइलेक्ट्रिक से घेरा गया है। तीन क्षेत्रों में विद्युत्-क्षेत्र की गणना करें : (i) $r < a$, (ii) $a < r < b$ और (iii) $r > b$ । गोले के केन्द्र पर विद्युत्-विभव की गणना करें।

हल ■ चित्र 10.14 देखें। चूंकि धातु में आवेश उसकी सतह पर रहता है, इसलिए गाउस के नियम से :

$$E = 0 \qquad r < a \text{ के लिए}$$

क्षेत्र $a < r < b$ में विद्युत्-क्षेत्र का परिकलन करने के लिए जिसमें डाइलेक्ट्रिक माध्यम मौजूद है हम समीकरण (10.30ख) $\oint_S \vec{\mathbf{D}}.d\vec{\mathbf{S}} = Q_{\text{परिबद्ध}}$ का इस्तेमाल करते हैं।

$$\therefore \quad D\left(4\pi r^2\right) = Q \quad \Rightarrow \quad \vec{\mathbf{D}} = \frac{Q}{4\pi r^2}\hat{\mathbf{r}} \qquad a < r < b \text{ के लिए} \quad (10.42)$$

समीकरण (10.37) से $\quad \vec{\mathbf{D}} = \varepsilon_0 K\vec{\mathbf{E}}$ या $\vec{\mathbf{E}} = \dfrac{\vec{\mathbf{D}}}{\varepsilon_0 K}$

अतः

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 K r^2}\hat{\mathbf{r}} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}\hat{\mathbf{r}} \qquad a < r < b \text{ के लिए} \quad (10.43\text{क})$$

क्षेत्र $r > b$ में जहां डाइलेक्ट्रिक माध्यम मौजूद नहीं है, विद्युत्-क्षेत्र होता है :

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{\mathbf{r}} \qquad r > b \text{ के लिए} \quad (10.43\text{ख})$$

अतः गोले के केन्द्र पर विद्युत्-विभव है :

समीकरण (10.44) के समाकलों को हल करने के लिए हमने इस परिणाम का प्रयोग किया है :

$$\int \frac{1}{r^2}\,dr = -\frac{1}{r}$$

अतः

$$\int_b^a \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}\,dr = -\left.\frac{Q}{4\pi\varepsilon r}\right|_a^b$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

अन्य समाकल इस परिणाम की विशेष स्थितियां हैं।

$$V = -\int_{\infty}^{0} \vec{\mathbf{E}}.d\vec{\mathbf{l}} = -\int_{\infty}^{b} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr - \int_{b}^{a} \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2} dr - \int_{a}^{0} 0\, dr \qquad (10.44)$$

अतः

$$V = \frac{Q}{4\pi}\left(\frac{1}{\varepsilon_0 b} + \frac{1}{\varepsilon a} - \frac{1}{\varepsilon b}\right) \qquad (10.45)$$

अब आप स्वयं एक बोध प्रश्न हल करना चाहेंगे।

बोध प्रश्न 6 – डाइलेक्ट्रिक में विद्युत्-क्षेत्र

धातु की एक प्लेट जिसका क्षेत्रफल $1.0\ m^2$ है पर $4.4 \times 10^{-10}\,C$ आवेश है। प्लेट के निकट एक बिन्दु पर विद्युत्-क्षेत्र की गणना करें।

आपने इस इकाई में जो कुछ पढ़ा है, अब हम उसका सारांश दे रहे हैं।

10.6 सारांश

अवधारणा	विवरण
विद्युत्-क्षेत्र में डाइलेक्ट्रिक	■ जब एक विद्युत्-रोधी पदार्थ को जिसे **डाइलेक्ट्रिक** कहते हैं, एक बाह्य विद्युत्-क्षेत्र में रखा जाता है, तो उसका **ध्रुवण** हो जाता है।
डाइलेक्ट्रिक ध्रुवण	■ प्रति एकक आयतन विद्युत् द्विध्रुव आघूर्ण को **ध्रुवण** $\vec{\mathbf{P}}$ कहते हैं। परमाण्वीय स्तर पर डाइलेक्ट्रिक पदार्थ/या माध्यम का ध्रुवण दो तरीकों से होता है : i) यदि डाइलेक्ट्रिक पदार्थ उदासीन परमाणुओं/अणुओं का बना होता है जिनमें धनात्मक और ऋणात्मक आवेशों के केन्द्र संपाती होते हैं, तब उदासीन परमाणु/अणु (जिसे **अध्रुवीय अणु** कहते हैं) का विद्युत् द्विध्रुव आघूर्ण शून्य होता है। इन उदासीन परमाणुओं/अणुओं पर बाह्य विद्युत्-क्षेत्र का प्रभाव यह होता है कि उनके धनात्मक और ऋणात्मक आवेशों के केन्द्र एक-दूसरे के सापेक्ष विस्थापित हो जाते हैं और डाइलेक्ट्रिक पदार्थ में एक नेट विद्युत् द्विध्रुव आघूर्ण उत्पन्न हो जाता है। ii) यदि डाइलेक्ट्रिक पदार्थ **ध्रुवीय अणुओं** का बना होता है जिनमें विद्युत् द्विध्रुव आघूर्ण पहले से मौजूद होता है तो बाह्य विद्युत्-क्षेत्र की अनुपस्थिति में अणुओं की तापीय गति के कारण विद्युतीय द्विध्रुवों का वितरण यादृच्छिक होता है और कभी भी विद्युतीय द्विध्रुवों का पूरी तरह से संरेखण नहीं होता। बाह्य विद्युत्-क्षेत्र की उपस्थिति में उन विद्युत् द्विध्रुवों का विद्युत्-क्षेत्र की दिशा में संरेखण होता है, जिसके कारण डाइलेक्ट्रिक पदार्थ में नेट विद्युत द्विध्रुव आघूर्ण उत्पन्न होता है।
परमाण्वीय ध्रुवणता	■ **किसी परमाणु/अणु का विद्युत द्विध्रुव आघूर्ण उस पर आरोपित विद्युत्-क्षेत्र के समानुपाती होता है** : $\vec{\mathbf{p}} = \alpha \vec{\mathbf{E}}$ जहां α **परमाण्वीय/आणविक ध्रुवणता** है।

परिबद्ध आवेश

■ **ध्रुवित डाइलेक्ट्रिक पदार्थ के कारण उत्पन्न विद्युत्-क्षेत्र** एक **परिबद्ध पृष्ठ आवेश घनत्व** $\sigma_b = \vec{\mathbf{P}}.\hat{\mathbf{n}}$ और एक **परिबद्ध आयतन आवेश घनत्व** $\rho_b = -\vec{\nabla}.\vec{\mathbf{P}}$ द्वारा उत्पन्न विद्युत क्षेत्र के समतुल्य होता है।

डाइलेक्ट्रिक के लिए गाउस नियम

■ **स्थिरवैद्युतिकी का गाउस का नियम डाइलेक्ट्रिक माध्यम के लिए रूपांतरित हो जाता है** और डाइलेक्ट्रिक माध्यम के लिए विस्थापन सदिश $\vec{\mathbf{D}}$ के पदों में दिया जाता है :

$$\vec{\mathbf{D}} = \varepsilon_0 \vec{\mathbf{E}} + \vec{\mathbf{P}}$$

$\vec{\mathbf{D}}$ के पदों में गाउस का नियम बताता है कि एक संवृत पृष्ठ से होकर जाने वाला $\vec{\mathbf{D}}$ का अभिवाह उस पृष्ठ से परिबद्ध आयतन में मौजूद कुल मुक्त आवेश के बराबर होता है :

$$\oint_S \vec{\mathbf{D}}.d\vec{\mathbf{S}} = (Q_f)_{\text{परिबद्ध}} \quad \text{या} \quad \vec{\nabla}.\vec{\mathbf{D}} = \rho_f$$

विद्युत् प्रवृत्ति, विद्युत्शीलता और डाइलेक्ट्रिक नियतांक

■ एक आदर्श, समांग और समदैशिक डाइलेक्ट्रिक पदार्थ जिसे **रैखिक डाइलेक्ट्रिक** कहा जाता है,

$$\vec{\mathbf{P}} = \varepsilon_0 \chi \vec{\mathbf{E}}$$

जहां χ डाइलेक्ट्रिक माध्यम की **विद्युत प्रवृत्ति** है। रैखिक डाइलेक्ट्रिक पदार्थों के लिए विस्थापन सदिश $\vec{\mathbf{D}}$ होता है :

$$\vec{\mathbf{D}} = \varepsilon_0 (1+\chi) \vec{\mathbf{E}} = \varepsilon \vec{\mathbf{E}}$$

जहां ε माध्यम की **विद्युत्शीलता** है। हम एक विमाहीन राशि K परिभाषित करते हैं जिसे **डाइलेक्ट्रिक नियतांक** कहा जाता है :

$$K = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \quad \text{जिससे कि} \quad \vec{\mathbf{D}} = \varepsilon_0 K \vec{\mathbf{E}}$$

$\vec{\mathbf{D}}$ केवल मुक्त आवेशों पर निर्भर करता है और डाइलेक्ट्रिक पदार्थ में परिबद्ध आवेशों की जानकारी के बिना इसे प्राप्त किया जा सकता है।

धारिता पर डाइलेक्ट्रिक का प्रभाव

■ **डाइलेक्ट्रिक पदार्थ में मुक्त आवेशों के वितरण के कारण विद्युत्-क्षेत्र गुणक K से कम हो जाता है।** इसके परिणाम स्वरूप जिस संधारित्र में डाइलेक्ट्रिक पदार्थ भरा हो उसकी धारिता डाइलेक्ट्रिक पदार्थ के डाइलेक्ट्रिक नियतांक जितने गुणक से बढ़ जाती है।

10.7 अंत में कुछ प्रश्न

1. क्षेत्रफल $2.0\,\text{m}^2$ वाली दो समांतर चालक प्लेटों के बीच की दूरी $1.0 \times 10^{-2}\,\text{m}$ है। निर्वात में उनके बीच विभवांतर (V_0) 3000 V है। जब उनके बीच डाइलेक्ट्रिक की एक 1.0 cm मोटी शीट रखी जाती है, तो उनके बीच का विभवांतर घटकर 1000 V रह जाता है। निम्नलिखित गणनाएं करें :

   क) डाइलेक्ट्रिक पदार्थ का डाइलेक्ट्रिक नियतांक K, उसकी विद्युत्शीलता ε और उसकी विद्युत प्रवृत्ति χ,

ख) निर्वात में प्लेटों के बीच विद्युत्-क्षेत्र,

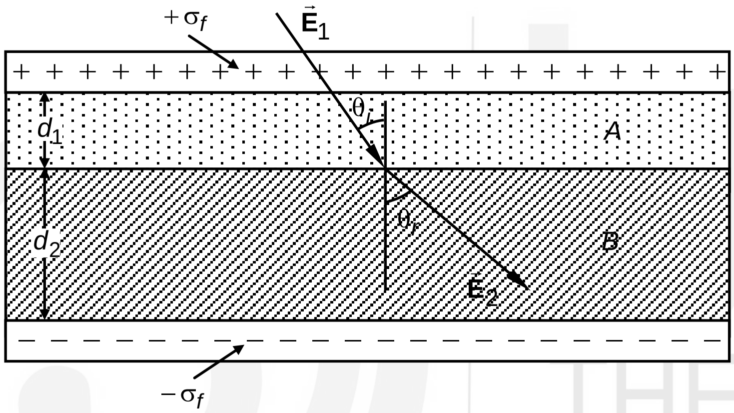
ग) डाइलेक्ट्रिक पदार्थ में विद्युत्-क्षेत्र, और

घ) परिबद्ध आवेशों द्वारा उत्पन्न विद्युत्-क्षेत्र।

2. दो समदैशिक डाइलेक्ट्रिक माध्यमों *A* और *B* की विद्युत्शीलताएं क्रमशः ε_1 और ε_2 हैं (देखें चित्र 10.15)। उनके बीच का अन्तरापृष्ठ आवेश मुक्त है। विद्युत्-क्षेत्र $\vec{\mathbf{E}}_1$ दोनों माध्यमों के अन्तरापृष्ठ पर θ_i के आपतन कोण पर आपतित होता है। विद्युत्-क्षेत्र $\vec{\mathbf{E}}_2$ माध्यम *B* में अपवर्तन कोण θ_r पर अपवर्तित होता है। सिद्ध करें कि

$$\frac{\tan\theta_i}{\tan\theta_r} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$$

मान लें कि दोनों डाइलेक्ट्रिक पदार्थों के अंतरापृष्ठ पर $\vec{\mathbf{D}}$ का अभिलंब घटक और $\vec{\mathbf{E}}$ का स्पर्शरेखीय घटक संतत हैं।



चित्र 10.15: अंत के प्रश्न 2 के लिए चित्र।

3. सिद्ध करें कि विद्युत्शीलता ε_1 और ε_2 वाले दो आवेश मुक्त डाइलेक्ट्रिक पदार्थों के अंतरापृष्ठ पर (परिबद्ध) ध्रुवण आवेश घनत्व का मान होता है :

$$\sigma_b = \varepsilon_0 \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_2} \vec{\mathbf{E}}_1 . \hat{\mathbf{n}}$$

जहां $\hat{\mathbf{n}}$ पृष्ठ के लंबवत एकक सदिश है। मान लें कि डाइलेक्ट्रिक पदार्थों के अंतरापृष्ठ पर $\vec{\mathbf{D}}$ का अभिलंब घटक और $\vec{\mathbf{E}}$ का स्पर्शरेखीय घटक संतत हैं।

4. एक पतली डाइलेक्ट्रिक पदार्थ की छड़ के अनुप्रस्थ परिच्छेद का क्षेत्रफल *A* है। छड़ *x*-अक्ष के अनुदिश $x = 0$ से $x = L$ तक रखी है। छड़ का ध्रुवण उसकी लंबाई के अनुदिश है और उसका मान $\vec{\mathbf{P}} = (ax^2 + b)\hat{\mathbf{i}}$ है। छड़ के प्रत्येक सिरे पर परिबद्ध आयतन आवेश घनत्व और परिबद्ध पृष्ठ आवेश घनत्व प्राप्त करें। सिद्ध करें कि कुल परिबद्ध आवेश शून्य होता है।

10.8 हल और उत्तर

बोध प्रश्न

1. $\vec{\mathbf{P}}$ प्रति एकक आयतन विद्युत् द्विध्रुव आघूर्ण है। अतः $\vec{\mathbf{P}}$ की इकाई है :

$$\frac{\text{कुलॉम} \times \text{मीटर}}{(\text{मीटर})^3} \quad \text{या} \quad \text{Cm}^{-2}$$

2. ग्रेडिएंट की परिभाषा से, $\vec{\nabla}'\left(\frac{1}{r_1}\right) = \left(\hat{\mathbf{i}}\frac{\partial}{\partial x'} + \hat{\mathbf{j}}\frac{\partial}{\partial y'} + \hat{\mathbf{k}}\frac{\partial}{\partial z'}\right)\left(\frac{1}{r_1}\right)$

जहां समीकरण (10.9) से, $r_1 = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$

अब

$$\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{1}{r_1}\right) = \frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}}\right) = \frac{(x-x')}{r_1^3},$$

$$\frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{1}{r_1}\right) = \frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}}\right) = \frac{(y-y')}{r_1^3}$$

और $$\frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{1}{r_1}\right) = \frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}}\right) = \frac{(z-z')}{r_1^3}$$

अतः

$$\left(\hat{\mathbf{i}}\frac{\partial}{\partial x'} + \hat{\mathbf{j}}\frac{\partial}{\partial y'} + \hat{\mathbf{k}}\frac{\partial}{\partial z'}\right)\left(\frac{1}{r_1}\right) = \frac{(x-x')\hat{\mathbf{i}} + (y-y')\hat{\mathbf{j}} + (z-z')\hat{\mathbf{k}}}{r_1^3}$$

$$= \frac{\vec{\mathbf{r}}_1}{r_1^3} = \frac{\hat{\mathbf{r}}_1}{r_1^2} \qquad (\because \vec{\mathbf{r}}_1 = r_1\hat{\mathbf{r}}_1)$$

जहां हमने $\vec{\mathbf{r}}_1$ के व्यंजक के लिए समीकरण (10.9) का प्रयोग किया है। अतः, हमें समीकरण (10.11) मिलता है :

$$\vec{\nabla}'\left(\frac{1}{r_1}\right) = \frac{\hat{\mathbf{r}}_1}{r_1^2}$$

3. क) समीकरण (10.25) से, आयतन आवेश घनत्व ρ_b है :

$$\rho_b = -\vec{\nabla}.\vec{\mathbf{P}} = -\left(\hat{\mathbf{i}}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}}\frac{\partial}{\partial z}\right).(2x\,\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}) \times 2.5 \times 10^{-7}\,\text{Cm}^{-3}$$

$$= -2 \times 2.5 \times 10^{-7}\,\text{Cm}^{-3} = -5.0 \times 10^{-7}\,\text{Cm}^{-3}$$

ख) पृष्ठ आवेश घनत्व $\sigma_b = \vec{\mathbf{P}}.\hat{\mathbf{n}}$, पृष्ठ के लंबवत् $\vec{\mathbf{P}}$ का घटक है। अब चित्र (10.12) देखें। पृष्ठों *AGHD* और *BFEC* के अभिलंब क्रमशः $\hat{\mathbf{j}}$ और $-\hat{\mathbf{j}}$ के अनुदिश हैं। इन पृष्ठों पर आवेश घनत्व शून्य हैं क्योंकि $\hat{\mathbf{j}}.\hat{\mathbf{k}} = 0$। अतः, $\vec{\mathbf{P}}.\hat{\mathbf{j}} = 0$ और $-\vec{\mathbf{P}}.\hat{\mathbf{j}} = 0$। पृष्ठों *ABCD* और *GFEH* के अभिलंब क्रमशः $\hat{\mathbf{i}}$ और $-\hat{\mathbf{i}}$ के अनुदिश हैं। इन पृष्ठों पर भी आवेश घनत्व शून्य हैं क्योंकि $\hat{\mathbf{i}}.\hat{\mathbf{k}} = 0$।

पृष्ठ *DCEH* पर आवेश घनत्व $= \sigma = \vec{\mathbf{P}}.\hat{\mathbf{k}} = 2.0 \times 10^{-6}\ \text{Cm}^{-2}$

पृष्ठ *ABFG* पर आवेश घनत्व $= \sigma = -\vec{\mathbf{P}}.\hat{\mathbf{k}} = -2.0 \times 10^{-6}\ \text{Cm}^{-2}$

4. प्लेटों पर पृष्ठीय आवेश घनत्व है :

$$\sigma = \frac{Q}{A} = \frac{1.0\times10^{-7}\,\text{C}}{100\times10^{-4}\,\text{m}^2} = 1.0\times10^{-5}\,\text{Cm}^{-2}$$

प्लेटों के बीच डाइलेक्ट्रिक पदार्थ न होने पर विद्युत्-क्षेत्र है :

$$E_0 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{1.0\times10^{-5}\,\text{Cm}^{-2}}{8.85\times10^{-12}\,\text{C}^2\text{N}^{-1}\text{m}^{-2}} = \frac{1.0\times10^{7}}{8.85}\,\text{Vm}^{-1}$$

प्लेटों के बीच के स्थान में डाइलेक्ट्रिक पदार्थ रखने पर विद्युत्-क्षेत्र डाइलेक्ट्रिक नियतांक के गुणक से घट जाता है। अतः, $E = \dfrac{E_0}{K}$

$$\therefore \quad K = \frac{E_0}{E} = \frac{1.0\times10^{7}}{8.85\times3.3\times10^{5}} \approx 3.4$$

5. क) समीकरण (10.39ग) से डाइलेक्ट्रिक नियतांक *K* वाले डाइलेक्ट्रिक पदार्थ से भरे समांतर प्लेट संधारित्र की धारिता *C* है :

$$C = K\frac{\varepsilon_0 A}{d} = \frac{6.0\times6.45\times10^{-4}\times8.85\times10^{-12}}{2.0\times10^{-3}}\,\text{F} = 1.7\times10^{-11}\,\text{F}$$

ख) लगाई गई वोल्टता 100 V है। अतः, संधारित्र की प्रत्येक प्लेट पर आवेश का मान $= CV = 1.7\times10^{-11}\times100\,\text{C} = 1.7\times10^{-9}\,\text{C}$

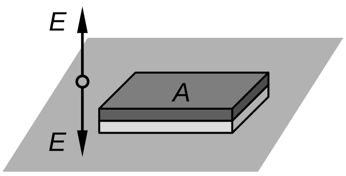
ग) डाइलेक्ट्रिक पदार्थ पर गाउस का नियम $\left[\oint_S \vec{\mathbf{D}}.d\vec{\mathbf{S}} = (Q_f)_{\text{परिबद्ध}}\right]$ लागू करने पर हमें मिलता है : $DA = Q$ या $D = \dfrac{Q}{A}$

$$D = \frac{Q}{A} = \frac{1.71\times10^{-9}}{6.45\times10^{-4}}\,\text{Cm}^{-2} = 2.66\times10^{-6}\,\text{Cm}^{-2}$$

घ) $\because D = \varepsilon_0 E + P$ और $E = \dfrac{V}{d}$, हमें मिलता है :

$$P = D - \varepsilon_0 E = \left[2.66\times10^{-6} - 8.85\times\frac{10^{-12}\times100}{2\times10^{-3}}\right]\text{Cm}^{-2}$$

या $$P = (2.66\times10^{-6} - 4.42\times10^{-7})\,\text{Cm}^{-2} = 2.22\times10^{-6}\,\text{Cm}^{-2}$$



चित्र 10.16: बोध प्रश्न 6 के लिए चित्र।

6. मान लें कि प्लेट की सतहों पर आवेश घनत्व σ है। अब प्लेट के तल से उपर और नीचे बराबर की दूरी पर विस्तारित गाउसीय पिल बाक्स लें (चित्र 10.16)। आइये, इस पिल बाक्स पर गाउस का नियम लागू करें :

$$\oint_S \vec{\mathbf{E}}.d\vec{\mathbf{S}} = \frac{(Q_f)_{\text{परिबद्ध}}}{\varepsilon_0} \qquad \text{(i)}$$

यदि गाउसीय पिल बाक्स की ऊपरी सतह का क्षेत्रफल A है, तब

$$(Q_f)_{\text{परिबद्ध}} = \sigma A \qquad \text{(ii)}$$

गाउसीय पिल बाक्स की केवल ऊपरी और निचली सतहें ही इस समाकल में योगदान करती हैं, क्योंकि बाकी सभी सतहों के लिए $\vec{\mathbf{E}}$ और $d\vec{\mathbf{S}}$ एक-दूसरे के लंबवत् हैं और उनका अदिश गुणनफल शून्य है। गाउसीय पिल बाक्स की ऊपरी और निचली सतहों के लिए विद्युत्-क्षेत्र की दिशा सदैव तल से परे होती है (चूंकि सदिश $d\vec{\mathbf{S}}$ इन सतहों के लंबवत् है)। तल से ऊपर के बिन्दुओं के लिए इसकी दिशा ऊपर की ओर है और तल से नीचे के बिन्दुओं के लिए इसकी दिशा नीचे की ओर है। इस तरह से हम विद्युत्-क्षेत्र में गाउसीय पिल बाक्स की केवल ऊपरी और निचली सतहों का योगदान लेते हैं, तब समीकरण (ii) का प्रयोग करने पर समीकरण (i) के समाकल का मान होता है

$$\oint_S \vec{\mathbf{E}}.d\vec{\mathbf{S}} = 2AE = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0} \quad \text{या} \quad E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

अब $\because \; A = 1.0\ \text{m}^2, \quad \therefore \; \sigma = \dfrac{Q}{A} = \dfrac{4.4\times10^{-10}\ \text{C}}{1.0\ \text{m}^2} = 4.4\times10^{-10}\ \text{C m}^{-2}$

$$\therefore \; E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{4.4\times10^{-10}\ \text{C m}^{-2}}{2\times8.85\times10^{-12}\ \text{C}^2\text{N}^{-1}\text{m}^{-2}} = 24.9\ \text{Vm}^{-1} \approx 25\ \text{Vm}^{-1}$$

अंत में कुछ प्रश्न

1. क) समीकरण (10.39क) से, डाइलेक्ट्रिक नियतांक

$$K = \frac{E_0}{E} = \frac{V_0}{V} = \frac{3000}{1000} = 3$$

समीकरण (10.36) से, $\varepsilon = K\varepsilon_0 = 3\varepsilon_0$ और $1+\chi = K \quad \Rightarrow \quad \chi = 2$

ख) $$E_0 = \frac{V_0}{d} = \frac{3000}{1.0\times10^{-2}}\ \text{V m}^{-1} = 3\times10^5\ \text{V m}^{-1}$$

ग) $$E = \frac{V}{d} = \frac{1000}{1.0\times10^{-2}}\ \text{V m}^{-1} = 1.0\times10^5\ \text{V m}^{-1}$$

घ) विद्युत्-क्षेत्र E, विद्युत्-क्षेत्र E_0 और परिबद्ध आवेशों के विद्युत्-क्षेत्र E_b का परिणामी है।

$$\therefore \; E_b = E_0 - E = 2\times10^5\ \text{V m}^{-1}$$

2. जैसा कि दिया गया है, दोनों डाइलेक्ट्रिक पदार्थों के अंतरापृष्ठ पर $\vec{\mathbf{D}}$ का अभिलंब घटक और $\vec{\mathbf{E}}$ का स्पर्शरेखीय घटक संतत हैं। अतः, हम लिख सकते हैं :

$$E_1 \sin\theta_i = E_2 \sin\theta_r \qquad \text{(i)}$$

और $D_1 \cos\theta_i = D_2 \cos\theta_r$ (ii)

लेकिन समीकरण (10.37) से $D = \varepsilon E$

अतः $D_1 = \varepsilon_1 E_1$ और $D_2 = \varepsilon_2 E_2$

अतः समीकरण (ii) निम्नवत परिवर्तित हो जाता है :

$$\varepsilon_1 E_1 \cos\theta_i = \varepsilon_2 E_2 \cos\theta_r \quad \text{(iii)}$$

समीकरण (i) को समीकरण (iii) से भाग देने पर हमें मिलता है :

$$\frac{1}{\varepsilon_1}\tan\theta_i = \frac{1}{\varepsilon_2}\tan\theta_r \quad \text{या} \quad \frac{\tan\theta_i}{\tan\theta_r} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$$

3. ध्रुवित माध्यम का पृष्ठ आवेश घनत्व होता है $\sigma_b = \vec{\mathbf{P}}.\hat{\mathbf{n}}$, जहां $\hat{\mathbf{n}}$ उस पृष्ठ के लंबवत् एकक सदिश है जिस पर ध्रुवित परिबद्ध आवेश होते हैं। मान लें कि दोनों डाइलेक्ट्रिक माध्यमों के ध्रुवण सदिश क्रमशः $\vec{\mathbf{P}}_1$ और $\vec{\mathbf{P}}_2$ हैं। अंतरापृष्ठ पर नेट पृष्ठ आवेश घनत्व σ_b होता है : $\sigma_b = \hat{\mathbf{n}}.(\vec{\mathbf{P}}_2 - \vec{\mathbf{P}}_1)$

अब $\vec{\mathbf{D}} = \varepsilon_0 \vec{\mathbf{E}} + \vec{\mathbf{P}} \Rightarrow \vec{\mathbf{P}} = \varepsilon_0 \vec{\mathbf{E}} - \vec{\mathbf{D}}$

और $\vec{\mathbf{P}}_2 - \vec{\mathbf{P}}_1 = \varepsilon_0 (\vec{\mathbf{E}}_2 - \vec{\mathbf{E}}_1) - (\vec{\mathbf{D}}_2 - \vec{\mathbf{D}}_1)$

$$\therefore \quad \sigma_b = \varepsilon_0 \hat{\mathbf{n}}.(\vec{\mathbf{E}}_2 - \vec{\mathbf{E}}_1) - \hat{\mathbf{n}}.(\vec{\mathbf{D}}_2 - \vec{\mathbf{D}}_1) \quad \text{(i)}$$

जैसा कि दिया गया है, $\vec{\mathbf{D}}$ के अभिलम्ब घटक अंतरापृष्ठ पर संतत हैं। अतः, हमें मिलता है :

$$\hat{\mathbf{n}}.(\vec{\mathbf{D}}_2 - \vec{\mathbf{D}}_1) = 0$$

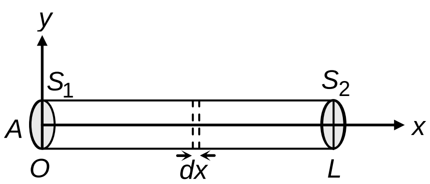
अतः समीकरण (i) से $\sigma_b = \varepsilon_0 \hat{\mathbf{n}}.(\vec{\mathbf{E}}_2 - \vec{\mathbf{E}}_1)$ । लेकिन $\vec{\mathbf{D}} = \varepsilon \vec{\mathbf{E}}$ ।

अतः $\hat{\mathbf{n}}.(\vec{\mathbf{D}}_2 - \vec{\mathbf{D}}_1) = 0 \Rightarrow \hat{\mathbf{n}}.(\varepsilon_2 \vec{\mathbf{E}}_2 - \varepsilon_1 \vec{\mathbf{E}}_1) = 0$

या $$\hat{\mathbf{n}}.\vec{\mathbf{E}}_2 = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\hat{\mathbf{n}}.\vec{\mathbf{E}}_1$$

$$\therefore \quad \sigma_b = \varepsilon_0 \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} - 1\right)\hat{\mathbf{n}}.\vec{\mathbf{E}}_1 = \varepsilon_0 \left(\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_2}\right)\hat{\mathbf{n}}.\vec{\mathbf{E}}_1$$

4. दिया है कि $\vec{\mathbf{P}} = (ax^2 + b)\hat{\mathbf{i}}$ । चित्र (10.17) देखें।



चित्र 10.17: अंत के प्रश्न 4 के उत्तर के लिए चित्र।

आयतन आवेश घनत्व है :

$$\rho_b = -\vec{\nabla}\,.\,\vec{\mathbf{P}} = -\left(\hat{\mathbf{i}}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}}\frac{\partial}{\partial z}\right).\,(ax^2 + b)\,\hat{\mathbf{i}} = -\,2ax \qquad \text{(i)}$$

चूंकि छड़ के सिरे $x = 0$ की सतह पर $\hat{\mathbf{n}} = -\hat{\mathbf{i}}$ अतः $x = 0$ पर पृष्ठ आवेश घनत्व है :

$$\sigma_b\big|_{x=0} = \vec{\mathbf{P}}.\hat{\mathbf{n}}\big|_{x=0} = -\ \vec{\mathbf{P}}.\hat{\mathbf{i}} = -(ax^2 + b)\big|_{x=0} = -\,b \qquad \text{(ii)}$$

चूंकि छड़ के सिरे $x = L$ की सतह पर $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{i}}$ अतः $x = L$ पर पृष्ठ आवेश घनत्व है :

$$\sigma_b\big|_{x=L} = \vec{\mathbf{P}}.\hat{\mathbf{n}}\big|_{x=L} = \vec{\mathbf{P}}.\hat{\mathbf{i}} = (ax^2 + b)\Big|_{x=L} = (aL^2 + b) \qquad \text{(iii)}$$

चूंकि $dV = A dx$, अतः समीकरण (i) का प्रयोग करने पर कुल परिबद्ध आयतन आवेश है :

$$Q_b^V = \int_V \rho_b\, dV = \int_0^L (-2ax)\, A dx = -aAL^2$$

समीकरण (ii) का प्रयोग करने पर $x = 0$ पर पृष्ठ S_1 पर परिबद्ध पृष्ठ आवेश है :

$$Q_b^{S_1} = \sigma_b\big|_{x=0} A = -\,bA$$

समीकरण (iii) का प्रयोग करने पर $x = L$ पर पृष्ठ S_2 पर परिबद्ध पृष्ठ आवेश है :

$$Q_b^{S_2} = \sigma_b\big|_{x=L} A = (aL^2 + b)A$$

अतः छड़ पर कुल परिबद्ध आवेश है :

$$Q_b^{total} = Q_b^V + Q_b^{S_1} + Q_b^{S_2} = -aAL^2 - bA + (aL^2 + b)A = 0$$

जैसा कि अपेक्षित था।