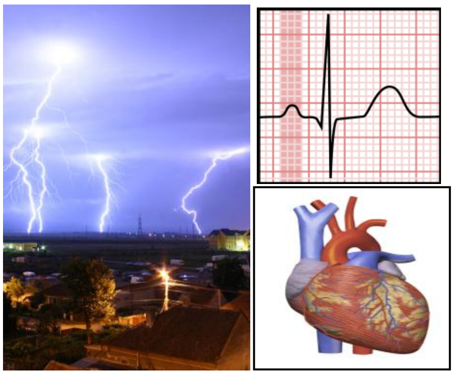


प्रकृति में विद्युत्-विभव और विद्युत्-विभवांतर के अनेक उदाहरण हैं। इनमें शामिल हैं प्रतिरूपी तड़ित में अरबों वोल्ट जैसे विशाल विभवांतरों से लेकर हृदय की कोशिकाओं की झिल्ली के लगभग 90 mV के अल्प विभवांतर। (चित्रों का स्रोत : विकिमीडिया कॉमन्स)

इकाई 8

विद्युत्-विभव

इकाई की रूपरेखा

अध्ययन निर्देशिका

इस इकाई में आप विद्युत्-विभव का अध्ययन करेंगे जो स्थिर वैद्युत बल और विद्युत्-क्षेत्र से संबद्ध संकल्पना है। यह संकल्पना विद्युत्-क्षेत्र में आवेशित पिंडों के व्यवहार के अध्ययन के लिए अत्यंत उपयोगी है। आप जानते हैं कि स्थिर वैद्युत-बल और विद्युत्-क्षेत्र सदिश राशियां है। परंतु, विद्युत्-विभव एक अदिश राशि है। इसलिए, एक आवेश या आवेशों के निकाय के कारण आकाश में किसी बिन्दु पर विद्युत्-विभव का परिकलन विद्युत्-क्षेत्र (जो कि एक सदिश राशि है) के परिकलन की अपेक्षा बहुत आसान होता है। इस इकाई की विषय वस्तु को बेहतर ढंग से समझने के लिए आपको यांत्रिकी नामक पाठ्यक्रम (BPHCT-131) के खंड 1 में दिए गए सदिश बीजगणित तथा खंड 2 में दी गई संरक्षी बल एवं स्थितिज ऊर्जा की संकल्पनाओं को दोहरा लेना चाहिए। आपको इस पाठ्यक्रम के खंड 1 में दी गई सदिश कलन की संकल्पनाओं को भी दोहरा लेना चाहिए। विशेषकर आपको खंड 1 से अदिश क्षेत्र के ग्रेडिएन्ट की संकल्पना, सदिश फलनों का समाकलन तथा अदिश एवं सदिश क्षेत्रों के रेखा समाकल फिर से पढ़ लेने चाहिए। हमारी सलाह है कि इस इकाई का अध्ययन करते समय गणितीय व्युत्पत्तियों को आप स्वयं करके देखिए। इकाई में जिन संकल्पनाओं की चर्चा की गई है उनके संबंध में अपनी समझ की जांच के लिए आपको बोध प्रश्नों और अंत के प्रश्नों को स्वयं हल करना चाहिए।

"आपको सबसे आकर्षक विचारों को भी छोड़ देना चाहिए अगर वे प्रयोगों द्वारा ग़लत साबित हो जाएं।"

अलेसांद्रो वोल्टा

8.1 परिचय

इस खंड की इकाई 5 में आपने कूलॉम नियम पढ़ा है जिसे लागू कर हम किन्हीं दो आवेशों के बीच स्थिर वैद्युत बल का परिकलन कर सकते हैं। आपने विद्युत्-क्षेत्र की संकल्पना का भी अध्ययन किया है जिसके आधार पर स्थिर वैद्युत बल का परिकलन, कूलॉम नियम की अपेक्षा में, काफी सरल हो जाता है। इकाई 6 और इकाई 7 में आपने गाउस नियम का उपयोग करके विद्युत्-क्षेत्रों को ज्ञात करना सीखा है।

स्थिर विद्युतिकी की अधिकांश प्रकरणों में हमारा लक्ष्य विद्युत्-क्षेत्र का परिकलन करना होता है। चूंकि विद्युत्-क्षेत्र एक सदिश राशि है, अतः, इसको निर्धारित करने के लिए इसके प्रत्येक अदिश घटक के परिकलन की आवश्यकता होती है। अनेक बार इस परिकलन को आसान बनाने के लिए पहले हम एक अदिश राशि, जिसे विद्युत्-विभव V कहा जाता है, का परिकलन करते हैं। फिर एक सरल संबंध का उपयोग करके हम विद्युत्-विभव से विद्युत्-क्षेत्र ज्ञात करते हैं। चूंकि विद्युत्-विभव एक अदिश राशि है, अतः, अधिकांश स्थितियों में इसका परिकलन विद्युत्-क्षेत्र के परिकलन जितना कठिन नहीं होता।

विद्युत्-विभव की संकल्पना इसलिए भी महत्वपूर्ण होती है क्योंकि यह आवेशित कणों पर स्थिर वैद्युत बल द्वारा किए गए कार्य और उनकी स्थितिज ऊर्जाओं से भी संबद्ध होती है। विद्युत्-विभव की संकल्पना को समझाने के लिए हम यांत्रिकी पाठ्यक्रम (BPHCT-131) की इकाई 10 में बताई गई गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा की संकल्पना से अनुरूपता स्थापित करते हैं। आप जानते हैं कि गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा का व्यंजक, गुरुत्वाकर्षण बल के विरुद्ध किसी पिंड को एक बिन्दु से दूसरे बिन्दु तक स्थानांतरित करने में किए गए कार्य से मिलता है। आप इस पाठ्यक्रम की इकाई 5 में पढ़ चुके हैं कि स्थिर वैद्युत बल की तुलना में दो आवेशों के बीच गुरुत्वाकर्षण बल नगण्य होता है। अतः, किसी आवेश की गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा नगण्य होती है। इसी प्रकार जब किसी आवेश को स्थिर वैद्युत बल (या विद्युत्-क्षेत्र) के विरुद्ध एक बिन्दु से दूसरे बिन्दु तक स्थानांतरित किया जाता है तो कार्य करने की आवश्यकता होती है जो आवेश की स्थितिज ऊर्जा के रूप में संचित हो जाती है। और, विद्युत्-क्षेत्र में किसी बिन्दु पर विद्युत्-विभव उस बिन्दु पर प्रति इकाई आवेश स्थिर वैद्युत स्थितिज ऊर्जा के रूप में परिभाषित किया जाता है।

इस इकाई की शुरुआत में, हम भाग 8.2 में, किसी विद्युत्-क्षेत्र में एक बिन्दु से दूसरे बिन्दु तक एक आवेश को स्थानांतरित करने में किए गए कार्य का व्यंजक प्राप्त करेंगे। ऐसा करने में आप सीखेंगे कि विद्युत्-क्षेत्र $\vec{\mathbf{E}}$ के रेखा समाकल का परिकलन कैसे किया जाता है। भाग 8.3 में हम एक अदिश राशि, **विद्युत्-विभव**, को विद्युत्-क्षेत्र के रेखा समाकल के रूप में परिभाषित करेंगे और किसी बिन्दु पर एक विविक्त आवेश तथा विविक्त आवेशों के किसी निकाय के कारण विद्युत्-विभव के मान का परिकलन करेंगे। भाग 8.4 में आप सीखेंगे कि यदि किसी बिन्दु पर विद्युत्-विभव का मान ज्ञात हो तो उस बिन्दु पर विद्युत्-क्षेत्र का परिकलन कैसे किया जाता है।

इकाई 5 में आप वैद्युत द्विध्रुव की संकल्पना सीख चुके हैं। आप जानते हैं कि यह दो आवेशों का एक अनन्य विन्यास होता है जिसकी भौतिकी में बहुत व्यावहारिक उपयोगिता है। इसलिए, इस इकाई के भाग 8.5 में हम यह समझाएंगे कि किसी दिए गए बिन्दु पर वैद्युत द्विध्रुव के कारण विद्युत्-विभव की गणना कैसे की जाती है। भाग

8.6 में हम वैद्युत द्विध्रुव पर विद्युत्-क्षेत्र के प्रभाव की चर्चा करेंगे और उन प्रतिबंधों की व्याख्या करेंगे जिनके अंतर्गत वैद्युत द्विध्रुव में स्थिर वैद्युत स्थितिज ऊर्जा संचित की जा सकती है।

अगली इकाई में आप पढ़ेंगे कि संतत आवेश वितरणों के कारण विद्युत्-विभव का परिकलन कैसे किया जाता है।

उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप :

- ❖ विद्युत्-क्षेत्र में किसी आवेश को एक बिन्दु से दूसरे बिन्दु तक स्थानांतरित करने में किए गए कार्य की गणना कर सकेंगे;
- ❖ विद्युत्-विभव को विद्युत्-क्षेत्र के रेखा समाकल के रूप में परिभाषित कर सकेंगे;
- ❖ किसी बिन्दु पर एकल आवेश तथा आवेशों के निकाय के कारण विद्युत्-विभव ज्ञात कर सकेंगे;
- ❖ विद्युत्-क्षेत्र और विद्युत्-विभव में संबंध स्थापित कर सकेंगे;
- ❖ किसी बिन्दु पर विद्युत्-विभव ज्ञात हो तो उस बिन्दु पर विद्युत्-क्षेत्र का परिकलन कर सकेंगे;
- ❖ दिए गए बिन्दु पर किसी वैद्युत द्विध्रुव के कारण विद्युत्-विभव का परिकलन कर सकेंगे; और
- ❖ एकसमान विद्युत्-क्षेत्र में वैद्युत द्विध्रुव द्वारा अनुभव किए गए बल आघूर्ण का निर्धारण कर सकेंगे।

8.2 किसी आवेश को स्थानांतरित करने में किया गया कार्य

विद्युत्-विभव की संकल्पना (क) विद्युत्-क्षेत्र में किसी आवेश को एक बिन्दु से दूसरे बिन्दु तक स्थानांतरित करने में स्थिर वैद्युत बल द्वारा किए गए कार्य से, और (ख) किए गए कार्य और स्थितिज ऊर्जा के संबंध से निकट रूप से संबद्ध है। गुरुत्वाकर्षण बल के संबंध में यांत्रिकी के पाठ्यक्रम (BPHCT-131) की इकाई 9 के उदाहरण 9.8 में आप पढ़ चुके हैं कि किसी पिंड को एक बिन्दु से दूसरे बिन्दु तक स्थानांतरित करने में किया गया कार्य कैसे ज्ञात किया जाता है। उसी पाठ्यक्रम की इकाई 10 में आप यह भी पढ़ चुके हैं कि गुरुत्वाकर्षण बल एक संरक्षी बल है जिसके आधार पर हम गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा को परिभाषित कर पाते हैं। इसी तरह हम विद्युत्-क्षेत्र में किसी आवेश को एक बिन्दु से दूसरे बिन्दु तक स्थानांतरित करने में किया गया कार्य ज्ञात कर सकते हैं। हम यह भी दिखाएंगे कि स्थिरवैद्युत बल संरक्षी होता है और इस तथ्य का उपयोग करके स्थिर वैद्युत स्थितिज ऊर्जा और विद्युत्-विभव परिभाषित करेंगे।

इकाई 5 के भाग 5.3 से आप जानते हैं कि कोई एकल आवेश, माना Q, अपने परिवेशी क्षेत्र में एक विद्युत्-क्षेत्र स्थापित करता है। परिभाषा से, किसी बिन्दु पर आवेश का विद्युत्-क्षेत्र उस बिन्दु पर रखे इकाई धन आवेश पर लगने वाले बल के बराबर होता

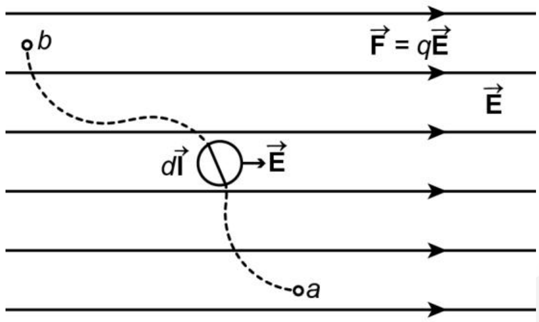
है। यदि इकाई धन आवेश के स्थान पर विद्युत्-क्षेत्र $\vec{\mathbf{E}}$ में उस बिन्दु पर हम आवेश q रखें तब इस आवेश पर लगने वाला बल $\vec{\mathbf{F}}$ निम्नलिखित संबंध द्वारा व्यक्त होता है :

$$\vec{\mathbf{F}} = q\vec{\mathbf{E}} \tag{8.1क}$$

जहां विद्युत्-क्षेत्र $\vec{\mathbf{E}}$ इकाई 5 के समीकरण (5.6क) के अनुसार होगा :

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\hat{\mathbf{r}} \tag{8.1ख}$$

जहां $\hat{\mathbf{r}}$, आवेश Q से त्रिज्य दिशा में एकक सदिश है। अब मान लेते हैं कि आवेश q चित्र 8.1 में दिखाए गए यादृच्छिक पथ के अनुदिश बिन्दु a से बिन्दु b की ओर गमन करता है।



चित्र 8.1: आवेश Q (जिसे चित्र 8.1 में नहीं दिखाया गया है) के कारण उत्पन्न विद्युत्-क्षेत्र $\vec{\mathbf{E}}$ में, आवेश q, बिन्दु a से बिन्दु b तक, किसी यादृच्छिक पथ के अनुदिश गमन करता है।

इकाई 3 के भाग 3.3 में आपने पढ़ा है कि आवेश q को बिन्दु a से बिन्दु b तक स्थानांतरित करने में किया गया कार्य W रेखा समाकल द्वारा परिभाषित होता है : [(समीकरण (3.18ख)]। अर्थात,

$$W = \int_a^b \vec{\mathbf{F}}.d\vec{\mathbf{l}} = q\int_a^b \vec{\mathbf{E}}.d\vec{\mathbf{l}} \tag{8.2}$$

अब विचार करें कि यदि हम q के स्थान पर केवल एक इकाई धन आवेश को बिन्दु a से बिन्दु b तक स्थानांतरित करें तो क्या होगा ? आप देख सकते हैं कि इस स्थिति में किया गया कार्य W', कार्य W को q से विभाजित करने से प्राप्त हो जाता है :

$$W' = \frac{W}{q} = \int_a^b \vec{\mathbf{E}}.d\vec{\mathbf{l}} \tag{8.3}$$

हम समीकरणों (8.2) और (8.3) में दिए गए रेखा समाकलों को हल कर कार्य W' प्राप्त करेंगे और उससे कुछ रोचक निष्कर्षों पर पहुंचेंगे। लेकिन, आगे बढ़ने से पहले हम चाहेंगे कि आप एक बोध प्रश्न हल करें।

बोध प्रश्न 1 – किसी आवेश को स्थानांतरित करने में किया गया कार्य

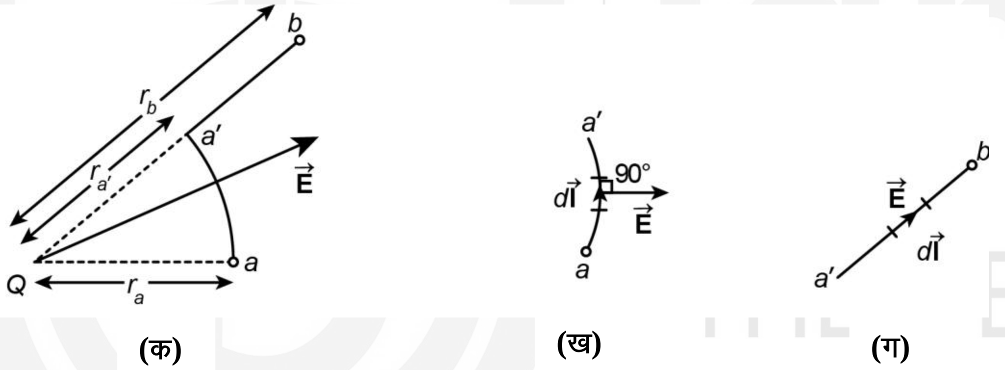
एकसमान विद्युत्-क्षेत्र में किसी इकाई धन आवेश को क्षेत्र की दिशा के समांतर दूरी l से स्थानांतरित करने में किया गया कार्य W परिकलित करें।

आइए, अब हम विद्युत्-क्षेत्र के रेखा समाकल का मान ज्ञात करें।

8.2.1 विद्युत्-क्षेत्र का रेखा समाकल

आवेश Q के कारण, चित्र 8.2क में दिखाए गए विद्युत्-क्षेत्र पर विचार करें। माना कि इस क्षेत्र में आवेश Q से r_a और r_b दूरियों पर स्थित दो बिन्दु a और b हैं जैसा चित्र 8.2क में दिखाया गया है। आइए, बिन्दु a और b के बीच किसी यादृच्छिक पथ के लिए समीकरण (8.3) में दिए गए रेखा समाकल का मान ज्ञात करें। ध्यान दें कि a से b तक का पथ एक संतत वक्र है। आइए, हम समीकरण (8.3) को हल करें अर्थात् a से b तक एकक धन आवेश को वक्र पथ के अनुदिश ले जाने में किए गए कार्य का मान ज्ञात करें। माना कि एकक आवेश को a से a' तक (जो कि वृत्त का एक चाप है) और फिर a' से b तक स्थानांतरित किया जाता है, जैसा चित्र 8.2क में दिखाया गया है। इस पाठ्यक्रम के खंड 1 की इकाई 3 के समीकरण (3.33) के आधार पर हम लिख सकते हैं :

$$W' = \int_a^b \vec{\mathbf{E}}.d\vec{\mathbf{l}} = \int_a^{a'} \vec{\mathbf{E}}.d\vec{\mathbf{l}} + \int_{a'}^{b} \vec{\mathbf{E}}.d\vec{\mathbf{l}} \qquad (8.4)$$



चित्र 8.2: संतत वक्र के रूप में दिखाए गए पथ के अनुदिश बिन्दु *a* से *b* तक एकक धन आवेश को स्थानांतरित करने में किया गया कार्य।

समीकरण (8.4) के दाहिनी ओर का पहला रेखा समाकल एक ऐसे वृत्त के चाप के अनुदिश a से a' तक एकक आवेश को स्थानांतरित करने में किया गया कार्य निरूपित करता है जिसकी त्रिज्या r_a (माना) है। दूसरा रेखा समाकल उसी आवेश को एक सरल रेखा के अनुदिश a' से b तक स्थानांतरित करने में किए गए कार्य को निरूपित करता है। समाकल्य $\vec{\mathbf{E}}.d\vec{\mathbf{l}}$ का मान पहले रेखा समाकल के लिए शून्य होता है क्योंकि $\vec{\mathbf{E}}$ और $d\vec{\mathbf{l}}$ एक दूसरे के लम्बवत् हैं (देखें चित्र 8.2ख)। समीकरण (8.4) के दाहिनी ओर के दूसरे रेखा समाकल के समाकल्य $\vec{\mathbf{E}}.d\vec{\mathbf{l}}$ का मान $|\vec{\mathbf{E}}||d\vec{\mathbf{l}}|$ के बराबर होता है क्योंकि $\vec{\mathbf{E}}$ और $d\vec{\mathbf{l}}$ पथ $a'b$ के अनुदिश एक दूसरे के समांतर हैं (देखें चित्र 8.2ग)। क्या आप बता सकते हैं कि ऐसा क्यों होता है? ऐसा इसलिए है क्योंकि पहले समाकल में $\theta = 90°$ है और $\cos 90°$ शून्य होता है जबकि दूसरे समाकल में θ का मान शून्य है जिसके कारण $\cos\theta = 1$ है (हाशिए में दी गई टिप्पणी देखें)।

दो सदिशों $\vec{\mathbf{a}}$ एवं $\vec{\mathbf{b}}$ का अदिश गुणनफल

$$\vec{\mathbf{a}}.\vec{\mathbf{b}} = |\vec{\mathbf{a}}||\vec{\mathbf{b}}|\cos\theta$$

द्वारा परिभाषित होता है जहां θ, सदिश $\vec{\mathbf{a}}$ तथा $\vec{\mathbf{b}}$ के बीच का कोण है।

आइए, अब हम समीकरण (8.4) का दूसरा समाकल ज्ञात करें। $\vec{\mathbf{E}}$ के लिए समीकरण (8.1ख) का उपयोग करके, $d\vec{\mathbf{l}}$ को $d\vec{\mathbf{r}}$ से प्रतिस्थापित करकें (क्योंकि a' से b का पथ त्रिज्य है) और $d\vec{\mathbf{r}}$ को $= \hat{\mathbf{r}}dr$ लिख कर (जहां $\hat{\mathbf{r}}$ आवेश Q से त्रिज्य दिशा में एकक सदिश है), हम समीकरण (8.4) को निम्नवत लिख सकते हैं :

ध्यान दें कि जब हम r पर समाकलित करते हैं तो समाकलन की सीमाएं $r_{a'}$ से r_b होती हैं।

$$W' = 0 + \int_{a'}^{b} \vec{\mathbf{E}}.d\vec{\mathbf{l}} = \int_{r_{a'}}^{r_b} \vec{\mathbf{E}}.d\vec{\mathbf{r}} = \int_{r_{a'}}^{r_b} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\hat{\mathbf{r}}.\hat{\mathbf{r}}}{r^2}(dr) = \int_{r_a}^{r_b} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b}\right]$$

चूंकि $r_{a'} = r_a$ ।

संरक्षी बल का एक गुणधर्म यह होता है कि किसी कण को एक बिन्दु से दूसरे बिन्दु तक ले जाने में इस बल द्वारा किया गया कार्य कण को एक बिन्दु से दूसरे बिन्दु तक ले जाने के पथ पर निर्भर नहीं करता। इस कथन का विलोम भी सही है : यदि एक कण को एक बिन्दु से दूसरे बिन्दु तक ले जाने में किया गया कार्य पथ पर निर्भर नहीं करता तो बल संरक्षी है। यह गुणधर्म कणों के लिए गुरुत्वीय बल द्वारा और आवेशित कणों के लिए स्थिर-वैद्युत बल में होता है।

अतः, बिन्दुओं a और b के बीच चित्र 8.2क में दिखाए गए पथ के लिए समीकरण (8.4) निम्न हो जाता है :

$$W' = \int_{a}^{b} \vec{\mathrm{E}}.d\vec{\mathbf{l}} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b}\right] \tag{8.5}$$

अब इस पाठ्यक्रम के खंड 1 की इकाई 3 के भाग 3.4.1 में आप पढ़ चुके हैं कि संरक्षी सदिश क्षेत्र के साथ एक अदिश विभव को संबद्ध किया जा सकता है। चूंकि यहां हमारा लक्ष्य विद्युत्-क्षेत्र से संबद्ध विद्युत्-विभव को परिभाषित करना है, अतः, हमें यह स्थापित करना होगा कि विद्युत्-क्षेत्र संरक्षी सदिश क्षेत्र है। ऐसा करने के लिए हम यह परीक्षण करते हैं कि क्या किसी आवेश का विद्युत्-क्षेत्र संरक्षी होता है।

समीकरण (8.5) से हम यह नोट करते हैं कि आवेश Q के विद्युत्-क्षेत्र में किन्हीं दो बिन्दुओं के बीच एकक धन आवेश को स्थानांतरित करने में किया गया कार्य केवल आवेश Q से इन बिन्दुओं की दूरियों पर निर्भर करता है, उस पथ पर निर्भर नहीं करता जिसका चयन हम बिन्दु a से बिन्दु b तक इकाई आवेश को ले जाने के लिए करते हैं। अतः, **विद्युत्-क्षेत्र का रेखा समाकल पथ पर निर्भर नहीं करता।** इसलिए विद्युत्-क्षेत्र एक संरक्षी सदिश क्षेत्र होता है।

कभी न भूलें

विरामावस्था में स्थित किसी आवेश का विद्युत्-क्षेत्र संरक्षी होता है।

8.2.2 स्थिर वैद्युत स्थितिज ऊर्जा

सेमेस्टर 1 के यांत्रिकी नामक पाठ्यक्रम (BPHCT-131) के खंड 2 की इकाई 10 (भाग 10.3) में आपने पढ़ा है कि गुरुत्वाकर्षण बल संरक्षी होता है। **आपने पढ़ा है कि संरक्षी बल के अधीन गतिमान पिंड की स्थितिज ऊर्जा को परिभाषित किया जा सकता है।** उदाहरण के लिए, आपने पढ़ा है कि किसी पिंड को बिन्दु a से बिन्दु b तक ले जाने में इसकी गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा में होने वाला परिवर्तन ΔU, गुरुत्वाकर्षण बल के विरुद्ध पिंड को बिन्दु a से बिन्दु b तक विस्थापित करने में किए जाने वाले कार्य के ऋृणात्मक मान के बराबर होता है :

$$(\Delta U)_{ba} = -W_{ab}$$

इकाई 8 के भाग 8.2.1 में आप पढ़ चुके हैं कि स्थिर वैद्युत बल संरक्षी होता है। अतः, हम स्थिर वैद्युत स्थितिज ऊर्जा को उसी प्रकार परिभाषित कर सकते हैं जैसे हमने गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा को परिभाषित किया था।

अतः, हम कह सकते हैं कि किसी आवेश Q के विद्युत्-क्षेत्र में आवेश q को बिन्दु a से बिन्दु b तक स्थानांतरित करने पर इसकी स्थिर वैद्युत स्थितिज ऊर्जा में होने वाला परिवर्तन, इस आवेश को बिन्दु a से बिन्दु b तक स्थानांतरित करने में किए गए कार्य के ऋृणात्मक मान के बराबर होता है। यदि U_a और U_b क्रमशः आवेश q की

प्रारंभिक और अंतिम स्थिर वैद्युत स्थितिज ऊर्जाएं हों, तो हम लिख सकते हैं :

$$\Delta U = (U_b - U_a) = -W_{ab} \tag{8.6}$$

जहां W_{ab} आवेश Q के विद्युत्-क्षेत्र $\vec{\mathbf{E}}$ में धन आवेश q को बिन्दु a से बिन्दु b तक ले जाने में स्थिर वैद्युत बल द्वारा किया गया कार्य है। अब समीकरण (8.3) और (8.5) से हम लिख सकते हैं :

$$W_{ab} = qW' = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b}\right] \tag{8.7}$$

जहां W' इकाई धन आवेश को बिन्दु a से बिन्दु b तक ले जाने में किया जाने वाला कार्य है। अतः, समीकरण (8.6) और (8.7) से हम लिख सकते हैं :

$$\Delta U = (U_b - U_a) = -\frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b}\right) = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_b} - \frac{1}{r_a}\right) \tag{8.8}$$

समीकरण (8.8) से हमें आवेश Q के विद्युत्-क्षेत्र में धन आवेश q को बिन्दु a से बिन्दु b तक स्थानांतरित करने में इसकी स्थिर वैद्युत स्थितिज ऊर्जा में होने वाले परिवर्तन का मान प्राप्त होता है। इन संकल्पनाओं को बेहतर समझने के लिए आप नीचे दिए गए उदाहरण का अध्ययन करें।

उदाहरण 8.1 : स्थिर वैद्युत स्थितिज ऊर्जा

धनात्मक x-अक्ष के अनुदिश किसी एकसमान विद्युत्-क्षेत्र $\vec{\mathbf{E}}$ का परिमाण 120 NC^{-1} है। $\vec{\mathbf{E}}$ के समांतर किन्तु विपरीत दिशा में गतिमान प्रोटॉन को 25 m की दूरी से स्थानांतरित करने पर इसके स्थिर वैद्युत स्थितिज ऊर्जा में परिवर्तन परिकलित करें।

हल ■ एक नियत बल $\vec{\mathbf{F}}$ द्वारा, किसी कण को विस्थापन $\vec{\mathbf{d}}$ दिए जाने में किया गया कार्य होता है :

$$W = \vec{\mathbf{F}}.\vec{\mathbf{d}}$$

प्रस्तुत प्रकरण में आवेश q पर विद्युत्-क्षेत्र $\vec{\mathbf{E}}$ के कारण लग रहा बल $\vec{\mathbf{F}} = q\vec{\mathbf{E}}$ है। अतः, प्रोटॉन पर किया गया कार्य है :

$$W = q\vec{\mathbf{E}}.\vec{\mathbf{d}} = qEd\cos\theta$$

जहां θ, $\vec{\mathbf{E}}$ और $\vec{\mathbf{d}}$ के बीच का कोण है। अब, चूंकि प्रोटॉन का विस्थापन $\vec{\mathbf{E}}$ की दिशा के समांतर और विपरीत है, इसलिए $\theta = 180°$। अतः,

$$W = qEd\cos 180° = (1.6\times 10^{-19}\,\text{C})\times(120\,\text{NC}^{-1})\times(25\,\text{m})\times\cos 180°$$
$$= -4.8\times 10^{-16}\,\text{J}$$

यदि U_i एवं U_f प्रोटॉन की प्रारंभिक और अंतिम स्थिर वैद्युत स्थितिज ऊर्जाओं के मान हों, तो हम लिख सकते हैं :

$$\Delta U = U_f - U_i = -W = 4.8\times 10^{-16}\,\text{J}$$

इसलिए, प्रोटॉन को विद्युत्-क्षेत्र के विपरीत स्थानांतरित करने पर इसकी स्थितिज ऊर्जा में वृद्धि होती है।

आगे बढ़ने से पहले आप एक बोध प्रश्न का उत्तर दें।

बोध प्रश्न 2 – स्थिर वैद्युत स्थितिज ऊर्जा

किसी प्रदेश में $200\,\hat{\mathbf{i}}\,\text{NC}^{-1}$ का एकसमान विद्युत्-क्षेत्र विद्यमान है। क्षेत्र की दिशा में i) एक इलेक्ट्रॉन, तथा ii) एक प्रोटॉन को 30 m विस्थापित करने में किए गए कार्य का परिकलन करें। यह भी बताएं कि इससे इन आवेशित कणों की स्थिर वैद्युत स्थितिज ऊर्जा में कितना अंतर आएगा।

स्थिर वैद्युत बल द्वारा किसी आवेश को स्थानांतरित करने में किए गए कार्य तथा इससे संबंधित स्थितिज ऊर्जा की संकल्पना को समझ लेने के बाद अब आप विद्युत्-विभव की संकल्पना को समझ सकते हैं।

8.3 बिन्दु आवेशों के कारण विद्युत्-विभव

इस खंड की इकाई 5 में आपने पढ़ा है कि विद्युत्-क्षेत्र, जिसे हम स्थिर वैद्युत बल प्रति इकाई आवेश के रूप में परिभाषित करते हैं, किसी भी चिन्ह और परिमाण के आवेश या आवेशों के समूह पर लगने वाले बलों को ज्ञात करने हेतु एक अत्यंत उपयोगी संकल्पना है। अब हमें पूछना चाहिए : **क्या हम कोई ऐसी सरल संकल्पना परिभाषित कर सकते हैं जिसके द्वारा किसी आवेश या आवेशों के निकाय के कारण स्थिर वैद्युत बल और विद्युत्-क्षेत्र ज्ञात किए जा सकें**? इसका उत्तर है, हां, ऐसा किया जा सकता है। **विद्युत्-विभव** ऐसी ही संकल्पना है। आइए, इस संकल्पना को हम भाग 8.2.2 में वर्णित स्थिर वैद्युत स्थितिज ऊर्जा और किए गए कार्य के बीच संबंध की सहायता से विस्तार से समझें।

8.3.1 बिन्दु आवेश के कारण विद्युत्-विभव

आइए, पहले हम विद्युत्-विभव को परिभाषित करें। **विद्युत्-विभव को स्थिर वैद्युत स्थितिज ऊर्जा प्रति इकाई आवेश के रूप में परिभाषित किया जाता है**। अर्थात,

$$V = \frac{U}{q} \tag{8.9}$$

जहां V विद्युत्-क्षेत्र में किसी दिए गए बिन्दु पर विद्युत्-विभव है और U उस बिन्दु पर रखे आवेश q की स्थिर वैद्युत स्थितिज ऊर्जा है। आप जानते हैं कि जब किसी आवेश q को आवेश Q के विद्युत्-क्षेत्र में बिन्दु a से बिन्दु b तक स्थानांतरित किया जाता है तो हम इसकी स्थिर वैद्युत स्थितिज ऊर्जा में आए परिवर्तन को समीकरण (8.8) द्वारा व्यक्त करते हैं। अतः, विद्युत्-विभव की उपर्युक्त परिभाषा के आधार पर हम बिन्दु a और b के बीच विद्युत्-विभवांतर के लिए लिख सकते हैं :

$$\Delta V = \frac{\Delta U}{q}$$

या
$$V_b - V_a = \frac{U_b - U_a}{q} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r_b} - \frac{1}{r_a}\right] \tag{8.10}$$

आप जानते हैं कि किसी आवेश q को स्थिर वैद्युत बल द्वारा बिन्दु a से बिन्दु b तक स्थानांतरित करने में किया गया कार्य समीकरण (8.6) द्वारा ΔU से संबद्ध होता है।

साथ ही, प्रति इकाई आवेश किया गया कार्य, समीकरण (8.3) द्वारा विद्युत्-क्षेत्र से संबद्ध होता है। अतः, समीकरणों (8.6) और (8.3) के आधार पर हम समीकरण (8.10) को विद्युत्-क्षेत्र $\vec{\mathbf{E}}$ के रेखा समाकल के पदों में निम्नवत् लिख सकते हैं :

$$V_b - V_a = -\frac{W_{ab}}{q} = -\int_a^b \vec{\mathbf{E}}.d\vec{\mathbf{l}} \qquad (8.11)$$

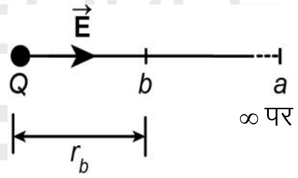
आगे बढ़ते हुए समीकरण (8.10) से हम नोट करते हैं कि विद्युत्-विभव का अंतर दो संख्याओं (या अदिशों) $\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_b}\right)$ और $\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_a}\right)$ का अंतर है। आइए, अब देखें कि यदि हम मान लें कि प्रारंभिक बिन्दु a अनंत पर है और अनंत पर विद्युत्-विभव का मान शून्य है, अर्थात $V_a = 0$ है तब क्या होता है। तब समीकरण (8.10) को हम निम्नवत् लिख सकते हैं :

$$V_b = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_b} \qquad (8.12)$$

समीकरण (8.12) बिन्दु आवेश Q से दूरी r_b पर स्थित बिन्दु पर **विद्युत्-विभव** का मान देता है। साथ ही, यदि बिन्दु a अनंत पर स्थित हो, अर्थात् $r_a = \infty$ और $V_a = 0$ के लिए समीकरण (8.11) जो दूरी r_b पर स्थित बिन्दु b पर विद्युत्-विभव को विद्युत्-क्षेत्र $\vec{\mathbf{E}}$ के रेखा समाकल के पदों में परिभाषित करता है, निम्नवत् समानीत हो जाता है :

$$V_b = -\int_\infty^{r_b} \vec{\mathbf{E}}.d\vec{\mathbf{l}} \qquad (8.13)$$

ध्यान दें कि समीकरण (8.12) और (8.13) विद्युत्-विभव की समतुल्य परिभाषा देते हैं। समीकरण (8.12) बताता है कि विद्युत्-विभव एक अदिश राशि है। समीकरण (8.13) हमें यह समझने में सहायता करता है कि जब हम कहते हैं कि विद्युत्-क्षेत्र में किसी बिन्दु पर विद्युत्-विभव का एक नियत मान होता है तो इससे हमारा क्या तात्पर्य होता है। समीकरण (8.13) का दाहिना पक्ष दिखाता है कि Q से दूरी r_b पर स्थित किसी बिन्दु b पर विद्युत्-विभव इकाई धन आवेश को अनंत से बिन्दु b तक लाने में किए गए कार्य के बराबर होता है (चित्र 8.3 देखें)। विद्युत्-विभव का SI मात्रक जूल प्रति कूलॉम (JC^{-1}) है। इस मात्रक का इतना अधिक उपयोग होता है कि इसे अलेसांद्रो वोल्टा के नाम पर एक विशिष्ट नाम वोल्ट (संक्षिप्त रूप V) दिया गया है और अब विद्युत्-विभव के मात्रक के रूप में इसका ही उपयोग किया जाता है।



चित्र 8.3: आवेश Q के विद्युत्-क्षेत्र में इकाई धन आवेश को बिन्दु a से बिन्दु b तक स्थानांतरित करने में किया गया कार्य।

एक बिन्दु आवेश के कारण विद्युत्-विभव

बिन्दु आवेश Q से दूरी r पर स्थित किसी बिन्दु पर उस आवेश के कारण विद्युत्-क्षेत्र $\vec{\mathbf{E}}$ से संबद्ध विद्युत्-विभव V होता है :

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} \qquad (8.14)$$

विद्युत्-क्षेत्र $\vec{\mathbf{E}}$ के पदों में दूरी r पर स्थित बिन्दु पर विद्युत्-विभव होता है :

$$V = -\int_\infty^{r} \vec{\mathbf{E}}.d\vec{\mathbf{l}} \qquad (8.15)$$

समीकरण (8.14) से हम नोट करते हैं कि धनात्मक आवेश Q के विद्युत्-क्षेत्र में इससे दूरी r पर स्थित बिन्दु पर विद्युत्-विभव धनात्मक होता है जबकि ऋणात्मक आवेश के लिए इसका मान ऋणात्मक होता है। अब क्षण भर के लिए रुक कर हमें अपने आपसे पूछना चाहिए : इस कथन का भौतिक अर्थ क्या है?

ध्यान दें कि धनात्मक आवेश के विद्युत्-क्षेत्र में इकाई धनात्मक परीक्षण आवेश को अनंत से दिए गए बिन्दु तक लाने में धनात्मक आवेश और परीक्षण आवेश के बीच लगने वाले **प्रतिकर्षी बल के विरुद्ध परीक्षण आवेश पर कार्य किया जाता है**। किसी **बाहरी एजेन्ट द्वारा किया गया यह कार्य** निकाय की स्थिर वैद्युत स्थितिज ऊर्जा में वृद्धि करता है। इसलिए, किसी परिमित दूरी पर धनात्मक आवेश के कारण विद्युत्-विभव धनात्मक होता है। दूसरी ओर ऋणात्मक आवेश के विद्युत्-क्षेत्र में इकाई धनात्मक आवेश पर इसे अनंत से उस बिन्दु तक लाने में **विद्युत्-क्षेत्र द्वारा कार्य किया जाता है** और निकाय की स्थिर वैद्युत स्थितिज ऊर्जा घट जाती है। अतः, ऋणात्मक आवेश के कारण परिमित दूरी पर विद्युत्-विभव ऋणात्मक होता है।

अतः, यह स्पष्ट है कि जब **बल क्षेत्र (इस स्थिति में विद्युत्-क्षेत्र) के विरुद्ध कार्य किया जाता है तो निकाय की स्थितिज ऊर्जा बढ़ती है।** इस बात को गुरुत्वीय क्षेत्र का उदाहरण लेकर आसानी से समझा जा सकता है। जब किसी परिमित द्रव्यमान वाले पिंड को नीचे की ओर लगने वाले गुरुत्वीय बल के विरुद्ध किसी ऊंचाई तक ऊपर उठाया जाता है तो पिंड की स्थितिज ऊर्जा में वृद्धि होती है। यहां गुरुत्व के विरुद्ध कार्य किया जाता है। और जब पिंड पर कार्य गुरुत्व बल द्वारा किया जाता है, जैसाकि मुक्त रूप से गिरते पिंड के लिए होता है, तो इसकी स्थितिज ऊर्जा कम हो जाती है। मुक्त रूप से गिरते पिंड की स्थितिज ऊर्जा में होने वाली यह कभी उसकी गतिज ऊर्जा में रुपांतरित हो जाती है।

कभी न भूलें

धनात्मक बिन्दु आवेश धनात्मक विद्युत्-विभव उत्पन्न करता है और ऋणात्मक बिन्दु आवेश ऋणात्मक विद्युत्-विभव उत्पन्न करता है।

अभी तक आपने विद्युत्-क्षेत्र में आवेश को स्थानांतरित करने पर होने वाले कार्य, स्थिर वैद्युत स्थितिज ऊर्जा तथा विद्युत्-विभव की संकल्पनाओं के बारे में पढ़ा है और यह जाना है कि ये परस्पर किस प्रकार संबंधित होती हैं। अब इन विचारों को मूर्त रूप देने के लिए आप निम्नलिखित उदाहरण का अध्ययन करें।

उदाहरण 8.2 : बिन्दु आवेश के कारण विद्युत्-विभव

5.0 μC आवेश वाला एक कण x-अक्ष के बिन्दु $x = 6.0$ cm पर स्थित है। मूल बिन्दु $x = 0$ पर इस आवेश के कारण विद्युत्-विभव का परिकलन करें। पहले आवेश को स्थिर रखते हुए एक अन्य आवेश, – 6.0 μC को, अनंत से मूल बिन्दु तक लाने में किए गए कार्य का परिकलन भी करें।

हल ■ समीकरण (8.14) से हम विद्युत्-विभव को निम्नवत लिखते हैं :

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r}$$

$Q = 5.0\times10^{-6}\,\text{C}$, $r = 6.0\times10^{-2}\,\text{m}$ और $(1/4\pi\varepsilon_0) = 9.0\times10^{9}\,\text{Nm}^2\text{C}^{-2}$ प्रतिस्थापित करने पर हमें मिलता है :

$$V = (9.0\times10^{9}\,\text{Nm}^2\text{C}^{-2})\times\frac{5.0\times10^{-6}\,\text{C}}{6.0\times10^{-2}\text{m}} = 7.48\times10^{5}\,\text{V}$$

$-6.0\,\mu\text{C}$ के आवेश को अनंत से मूल बिन्दु तक लाने में किए गए कार्य का परिकलन करने के लिए हम इस समझ के साथ कि अनंत पर विभव शून्य होता है, समीकरण (8.11) का उपयोग करते हैं :

$$V = W/q \Rightarrow W = qV = (-6.0\times10^{-6}\,\text{C})\times(7.48\times10^{5}\,\text{V}) = -4.48\,\text{J}$$

विभवांतर और शून्य विभव

जिस प्रकार हमने समीकरण (8.11) द्वारा किसी बिन्दु पर विद्युत्-विभव को परिभाषित किया है उससे आपको ऐसा लग सकता है कि यह एक निरपेक्ष राशि है। किन्तु वास्तव में ऐसा नहीं है क्योंकि **हमने यादृच्छिक रूप से अनंत पर एक संदर्भ बिन्दु का चयन कर लिया है और यह मान लिया है कि अनंत पर विद्युत्-विभव शून्य होता है।**

समीकरणों (8.10) और (8.11) द्वारा परिभाषित **विद्युत्-विभवांतर** अपेक्षाकृत अधिक आधारभूत राशि है। यह प्रति कूलॉम आवेश स्थिर वैद्युत स्थितिज ऊर्जा में परिवर्तन या इकाई धनात्मक आवेश को विद्युत्-क्षेत्र में एक बिन्दु से दूसरे बिन्दु तक स्थानांतरित करने में किए गए कार्य को निर्दिष्ट करता है। विद्युत्-क्षेत्र में किन्हीं दो बिन्दुओं के बीच विभवांतर ज्ञात करने के लिए हमें किसी संदर्भ बिन्दु की आवश्यकता नहीं होती।

स्थिर विद्युतिकी और धारा विद्युत् के अध्ययन में विभवांतर एक अत्यंत महत्वपूर्ण संकल्पना है। इसकी जानकारी से हम किसी विद्युत् परिपथ में किन्हीं दो बिन्दुओं के बीच प्रतिरोध का मान ज्ञात होने पर परिपथ में उन बिन्दुओं के बीच प्रवाहित होने वाली धारा का सही मान ज्ञात कर सकते हैं।

हालांकि विभवांतर निरपेक्ष विभव की अपेक्षा अधिक मूलभूत संकल्पना है, फिर भी एक ऐसा संदर्भ बिन्दु जिस पर विद्युत्-विभव का मान शून्य लिया जा सके परिभाषित करने का बड़ा व्यावहारिक महत्व है। शून्य विद्युत्-विभव का ऐसा संदर्भ बिन्दु हमें विद्युत्-क्षेत्र में किसी बिन्दु पर निरपेक्ष विद्युत्-विभव का मान निर्धारित करने देता है। अनंत पर शून्य विद्युत्-विभव का संदर्भ बिन्दु लेकर किसी बिन्दु पर समीकरण (8.14) द्वारा विद्युत्-विभव परिभाषित करने में हमने यही किया है।

फिर भी, आपको यह याद रखना चाहिए कि शून्य विभव के संदर्भ बिन्दु का चयन यादृच्छिक है और यह इस ढंग से किया जाता है जिससे प्रस्तुत प्रकरण का गणितीय हल सरल हो जाता है। उदाहरण के लिए, विद्युत् परिपथ संबंधी ऐसी अधिकांश समस्याओं में जहां विद्युत्-विभव शामिल होता है, पृथ्वी के विभव को शून्य विभव वाला संदर्भ बिन्दु ले लिया जाता है। संदर्भ बिन्दु का यह चयन इस तथ्य से निर्देशित होता है कि विद्युत् ग्रहण करने या खोने के बावजूद पृथ्वी का विभव अचर बना रहता है। विद्युत् संबंधी प्रकरणों में शून्य विभव वाले संदर्भ का यह चयन पृथ्वी पर किसी स्थान या पर्वत की ऊंचाई का वर्णन करने में समुद्र तल को संदर्भ बिन्दु लेने के जैसा ही है। अध्ययन हेतु आगे बढ़ने से पहले आप निम्नलिखित बोध प्रश्न का हल करें।

स्थिर विद्युतिकी में हम स्थिर विद्युत् आवेश के साथ तीन राशियों को संबद्ध करते हैं। बिन्दु आवेश Q से दूरी r पर स्थित बिन्दु पर रखे परीक्षण आवेश q पर लगने वाले स्थिर वैद्युत बल के परिमाण को हम निम्न समीकरण द्वारा व्यक्त करते हैं :

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{r^2}$$

दूरी r पर स्थित बिन्दु पर विद्युत्-क्षेत्र का परिमाण निम्न समीकरण द्वारा व्यक्त होता है :

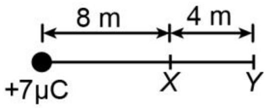
$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}$$

तथा, बिन्दु आवेश Q से दूरी r पर स्थित बिन्दु पर विद्युत्-विभव के लिए व्यंजक होता है :

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r}$$

इन तीनों ही राशियों की दूरी r, बिन्दु आवेश Q एवं परीक्षण आवेश q पर निर्भरता की प्रकृति पर ध्यान दें।

बोध प्रश्न 3 – विद्युत्-विभव, विभवांतर एवं किए गए कार्य का परिकलन



चित्र 8.4: बोध प्रश्न 3क के लिए आरेख।

क) चित्र 8.4 देखें जिसमें $+7\mu C$ के बिन्दु आवेश से क्रमशः 8 m एवं 12 m की दूरियों पर स्थित दो बिन्दु X एवं Y दर्शाए गए हैं। (i) बिन्दुओं X एवं Y पर विद्युत्-विभव और इनके बीच विभवांतर का परिकलन करें। (ii) मान लें कि $+7\mu C$ के बिन्दु आवेश को $-7\mu C$ के बिन्दु आवेश से प्रतिस्थापित कर दिया जाता है। तब बिन्दु X एवं Y पर विद्युत्-विभव तथा X और Y के बीच विभवांतर का परिकलन करें। (iii) यदि $+7\mu C$ आवेश अपनी स्थिति पर स्थिर रहे तो $+3\mu C$ आवेश को अनंत से बिन्दु X तक लाने में किए गए कार्य का परिकलन करें।

ख) स्वर्ण का परमाणु क्रमांक $Z = 79$, इसके नाभिक की त्रिज्या 6.6×10^{-15}m तथा इलेक्ट्रॉन का आवेश $e = 1.6 \times 10^{-19}$C हैं। स्वर्ण नाभिक के पृष्ठ पर विद्युत्-विभव का परिकलन करें।

समीकरण (8.14) से आप जानते हैं कि किसी विलगित आवेश के कारण इससे दूरी r पर स्थित बिन्दु पर विद्युत्-विभव कैसे ज्ञात किया जाता है। अब, मान लें कि हमारे पास आकाश में विभिन्न बिन्दुओं पर स्थित अनेक विविक्त आवेश हैं। इस विविक्त आवेशों के निकाय के कारण किसी दिए गए बिन्दु पर विद्युत्-विभव हम कैसे ज्ञात करेंगे? अब आप यही सीखेंगे।

8.3.2 विविक्त आवेशों के निकाय के कारण विद्युत्-विभव

इस पाठ्यक्रम की इकाई 5 में आपने पढ़ा है कि विद्युत्-क्षेत्र, अध्यारोपण सिद्धान्त का अनुपालन करते हैं जिसका उपयोग करके हम दिए गए बिन्दु पर आवेशों के किसी निकाय के कारण विद्युत्-क्षेत्र $\vec{\mathbf{E}}$ का परिकलन कर सकते हैं। विद्युत्-क्षेत्र संबंधी अध्यारोपण सिद्धांत यह बताता है कि (क) दिए गए बिन्दु पर निकाय के किसी एक आवेश के कारण विद्युत्-क्षेत्र शेष आवेशों की उपस्थिति से प्रभावित नहीं होता, और (ख) दिए गए बिन्दु पर नेट $\vec{\mathbf{E}}$ का मान निकाय के व्यष्टिगत आवेशों के कारण उस बिन्दु पर विद्युत्-क्षेत्रों के **सदिश योग** के बराबर होता है।

इसलिए, आप पूछ सकते हैं : **क्या हम आवेशों के एक निकाय के कारण विद्युत्-विभव का मान ज्ञात करने के लिए भी अध्यारोपण सिद्धांत का उपयोग कर सकते हैं**? इसका उत्तर है : हां, ऐसा किया जा सकता है। चूंकि विद्युत्-विभव एक अदिश राशि है, अतः, दिए गए बिन्दु पर इसका मान निकाय के अलग-अलग आवेशों के कारण विद्युत्-विभवों के **बीजगणितीय** योग के बराबर होगा। अतः, अध्यारोपण सिद्धांत का उपयोग करके विभव ज्ञात करना $\vec{\mathbf{E}}$ ज्ञात करने की अपेक्षा अधिक आसान है क्योंकि $\vec{\mathbf{E}}$ ज्ञात करने के लिए हमें अलग-अलग आवेशों के कारण उत्पन्न विद्युत्-क्षेत्रों का सदिश योग ज्ञात करना होता है।

माना कि बिन्दु P से क्रमशः दूरियों $r_1, r_2, ..., r_N$ पर स्थित आवेशों $q_1, q_2, ..., q_N$ का एक निकाय है। अध्यारोपण सिद्धांत के अनुसार, बिन्दु P पर निकाय के कारण कुल विद्युत्-विभव, आवेशों $q_1, q_2, ..., q_N$ के कारण P पर उत्पन्न विद्युत्-विभवों के

बीजगणितीय योग के बराबर होगा, अर्थात्

$$V_P = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_1} + \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_2} + \ldots + \frac{q_N}{4\pi\varepsilon_0 r_N}$$

ध्यान दें कि यहां प्रत्येक आवेश इस प्रकार व्यवहार कर रहा है मानों अन्य आवेश विद्यमान ही न हों। उपर्युक्त व्यंजक को योग के रूप में हम निम्नवत् लिख सकते हैं :

$$V_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{r_i} \tag{8.16}$$

आपको यह तथ्य सावधानी से अपने दिमाग में बिठाकर रखना चाहिए कि समीकरण (8.16) में दिया गया योग एक बीजगणितीय योग है, सदिश योग नहीं है क्योंकि किसी बिन्दु पर विद्युत्-विभव एक अदिश राशि होती है। अब आप विविक्त आवेशों के निकाय के कारण विद्युत्-विभव की गणना के लिए नीचे दिए उदाहरण का अध्ययन करें।

उदाहरण 8.3 : अनेक आवेशों के कारण विद्युत्-विभव

x-अक्ष पर तीन आवेश रखे गए हैं : $x = 20\,\text{cm}$ पर $2\mu\text{C}$, $x = 30\,\text{cm}$ पर $-3\mu\text{C}$, $x = 40\,\text{cm}$ पर $-4\mu\text{C}$। $x = 0$ पर विद्युत्-विभव का परिकलन करें।

हल ■ विद्युत्-विभव के परिकलन के लिए हम समीकरण (8.16) का उपयोग करते हैं :

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{3} \frac{q_i}{r_i}$$

q_i और r_i के मान प्रतिस्थापित करने पर हमें मिलता है :

$$V = 9\times10^9\,\text{Nm}^2\,\text{C}^{-2}\left[\frac{2\times10^{-6}\,\text{C}}{0.20\,\text{m}} - \frac{3\times10^{-6}\,\text{C}}{0.30\,\text{m}} - \frac{4\times10^{-6}\,\text{C}}{0.40\,\text{m}}\right]$$

$$= 9\times10^9\,\text{Nm}^2\text{C}^{-2}\,[10^{-5}\,\text{m}^{-1} - 10^{-5}\,\text{m}^{-1} - 10^{-5}\,\text{m}^{-1}]$$

या $$V = -9\times10^4\,\text{Nm C}^{-1} = -9\times10^4\,\text{V}$$

ध्यान दें कि तीनों आवेशों में से प्रत्येक, एक ही रेखा (x-अक्ष) पर भिन्न बिन्दुओं पर स्थित है। किन्तु उसी रेखा पर दिए गए बिन्दु $(x = 0)$ पर एक आवेश के कारण विद्युत्-विभव अन्य दो आवेशों की उपस्थिति से प्रभावित नहीं होता।

आगे बढ़ने से पहले एक बोध प्रश्न का उत्तर दें।

बोध प्रश्न 4 – अनेक आवेशों के कारण विद्युत्-विभव

दो बिन्दु आवेश $+q$ और $-2q$ एक सरल रेखा के अनुदिश एक दूसरे से 9 m की दूरी पर रखे हैं। इनके बीच $+q$ आवेश से उस बिन्दु की दूरी ज्ञात करें जिस पर विद्युत्-विभव शून्य है।

अभी तक हुई चर्चा के आधार पर आपने यह सीखा है कि आकाश में किसी बिन्दु पर विद्युत्-क्षेत्र $\vec{\mathbf{E}}$ उस बिन्दु पर रखे इकाई धन आवेश पर लगने वाले स्थिर वैद्युत बल का परिमाण और दिशा बताता है और विद्युत्-विभव इकाई धन आवेश को एक बिन्दु से दूसरे बिन्दु तक स्थानांतरित करने में स्थिर वैद्युत बल द्वारा किए गए कार्य को व्यक्त करता है। अतः, यदि हमें एक ऐसा संबंध ज्ञात हो जिससे किसी बिन्दु पर विद्युत्-विभव ज्ञात होने पर हम उसी बिन्दु पर विद्युत्-क्षेत्र ज्ञात कर सकें तो स्थिर विद्युतिकी की समस्याओं को हल करना बहुत आसान हो जाएगा। विद्युत्-विभव का मान ज्ञात करना आसान होता है क्योंकि यह एक अदिश राशि है। आप मानेंगे कि अदिशों की अपेक्षा सदिशों को लेकर की गई गणनाएं कठिन होती हैं। आइए, अब हम विद्युत्-क्षेत्र और विद्युत्-विभव के बीच का संबंध प्राप्त करें।

8.4 विद्युत्-क्षेत्र और विद्युत्-विभव के बीच संबंध

समीकरण (8.11) से आप जानते हैं कि किसी आवेश Q के विद्युत्-क्षेत्र $\vec{\mathbf{E}}$ में स्थित दो बिन्दुओं a और b के बीच विद्युत्-विभव $V_{ba}(=V_b - V_a)$ इन दो बिन्दुओं के बीच $\vec{\mathbf{E}}$ के रेखा समाकल के ऋणात्मक मान के बराबर होता है :

$$V_{ba} = V_b - V_a = -\int_a^b \vec{\mathbf{E}}.d\vec{\mathbf{l}}$$

यदि बिन्दुओं a और b के बीच की दूरी $d\vec{\mathbf{l}}$ अत्यल्प हो, तो हम किन्हीं दो बिन्दुओं के बीच विभवांतर dV के लिए लिख सकते हैं :

$$dV = -\vec{\mathbf{E}}.d\vec{\mathbf{l}} \tag{8.17}$$

या $$dV = -E\cos\theta\left|d\vec{\mathbf{l}}\right| \quad \text{या} \quad -E\cos\theta = \frac{dV}{\left|d\vec{\mathbf{l}}\right|} \tag{8.18}$$

समीकरण (8.18) में पद $\cos\theta$ की उपस्थिति इस बात की सूचक है कि विद्युत्-क्षेत्र विभव फलन V का साधारण अवकलज नहीं है वरन् यह विभव का विशेष प्रकार का अवकलज है। हम इसे दिक् अवकलज कहते हैं और इसके बारे में आप इस पाठ्यक्रम के खंड 1 की इकाई 1 में पढ़ चुके हैं।

जैसाकि आपने इस पाठ्यक्रम के खंड 1 की इकाई 1 के भाग 1.3 में पढ़ा है, तापमान और विभव जैसे अदिश क्षेत्रों की विभिन्न दिशाओं में परिवर्तन दरों को ग्रेडिएन्ट संकारक का उपयोग करके व्यक्त किया जा सकता है। समीकरण (1.8) से आप जानते हैं कि एक-दूसरे से दूरी $d\vec{\mathbf{r}}$ पर स्थित दो बिन्दुओं पर किसी अदिश फलन f के मानों के अन्तर df को निम्नवत् व्यक्त किया जा सकता है :

$$df = (\vec{\nabla}V).d\vec{\mathbf{r}}$$

चूंकि विद्युत्-विभव एक अदिश फलन है, अतः, हम उपर्युक्त व्यापक संबंध का उपयोग कर एक-दूसरे से दूरी $d\vec{\mathbf{l}}$ पर स्थित दो बिन्दुओं के बीच विद्युत्-विभवान्तर को लिख सकते हैं :

$$dV = (\vec{\nabla}V).d\vec{\mathbf{l}} \tag{8.19}$$

समीकरणों (8.17) और (8.19) की तुलना करने पर हम लिख सकते हैं :

$$\vec{\mathbf{E}} = -\vec{\nabla}V = -\left(\hat{\mathbf{i}}\frac{\partial V}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}}\frac{\partial V}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}}\frac{\partial V}{\partial z}\right) \tag{8.20}$$

x, y और z दिशाओं में $\vec{\mathbf{E}}$ के घटक हैं :

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \tag{8.21}$$

अतः, हम पाते हैं कि किसी बिन्दु पर विद्युत्-क्षेत्र $\vec{\mathbf{E}}$, उस बिन्दु पर विद्युत्-विभव V के ग्रेडिएन्ट के ऋणात्मक मान के बराबर होता है। यदि हमें किसी बिन्दु पर विद्युत्-विभव ज्ञात हो तो समीकरणों (8.20) या (8.21) से हम उसी बिन्दु पर विद्युत्-क्षेत्र ज्ञात कर सकते हैं। इस विधि को समझने के लिए नीचे दिए उदाहरण का अध्ययन करें।

उदाहरण 8.4 : विद्युत्-विभव से विद्युत्-क्षेत्र

किसी बिन्दु पर विद्युत्-विभव, संबंध $V = Ax + By - Cz$ द्वारा व्यक्त होता है, जहां A, B और C नियतांक हैं। उस बिन्दु पर विद्युत्-क्षेत्र $\vec{\mathbf{E}}$ ज्ञात करें।

हल ■ समीकरण (8.20) से

$$\vec{\mathbf{E}} = -\vec{\nabla} V = -\left(\hat{\mathbf{i}}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}}\frac{\partial}{\partial z}\right) V$$

V का मान प्रतिस्थापित करने पर

$$\vec{\mathbf{E}} = -\left(\hat{\mathbf{i}}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}}\frac{\partial}{\partial z}\right)(Ax + By - Cz)$$

$$\therefore \qquad \vec{\mathbf{E}} = -[A\hat{\mathbf{i}} + B\hat{\mathbf{j}} - C\hat{\mathbf{k}}]$$

अब बोध प्रश्न 5 हल करने के लिए आप इस विधि को लागू करें।

बोध प्रश्न 5 – विद्युत्-विभव से विद्युत्- क्षेत्र

किसी बिन्दु पर विद्युत्-विभव संबंध $V = x(y^2 - 4x^2)$ से प्राप्त होता है। इस बिन्दु पर विद्युत्-क्षेत्र $\vec{\mathbf{E}}$ का परिकलन करें।

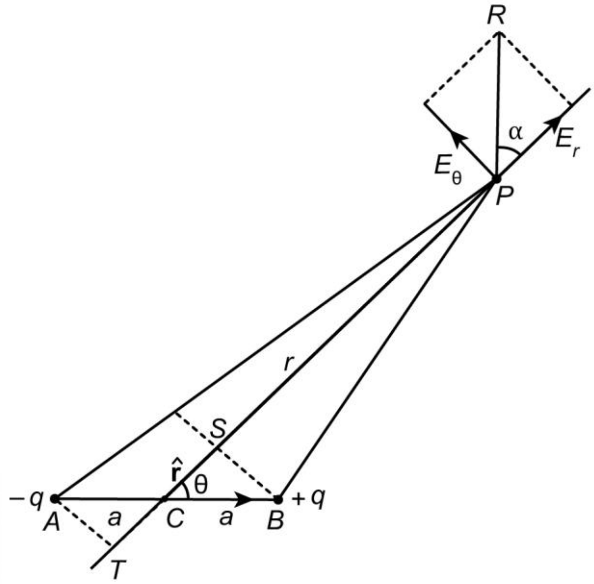
इकाई 5 में आपने भिन्न विगलित आवेशों, विशेष रूप से वैद्युत द्विध्रुव के कारण विद्युत्-क्षेत्र का परिकलन करना सीखा है। आगे आप वैद्युत द्विध्रुव के कारण विद्युत्-विभव परिकलित करना सीखेंगे।

8.5 वैद्युत द्विध्रुव के कारण विद्युत्-विभव

इस खंड की इकाई 5 में आपने वैद्युत द्विध्रुव के बारे में पढ़ा है। आप जानते हैं कि यह किसी दूरी $2a$ द्वारा प्रथक्कृत दो बराबर और विपरीत आवेशों $\pm q$ का युग्म होता है। **तब सदिश $2\vec{\mathbf{a}}$ द्विध्रुव के अक्ष के अनुदिश होता है जिसकी दिशा ऋणात्मक से धनात्मक आवेश की ओर होती है (चित्र 8.5)।**

आइए, अब द्विध्रुव के कारण विद्युत्-विभव ज्ञात करें। गणितीय सुविधा के लिए हम ध्रुवीय निर्देशांकों का उपयोग करेंगे। चित्र 8.5 देखें जो द्विध्रुव AB के मध्य बिन्दु C से दूरी r

पर एक बिन्दु P दिखाता है। P और C को मिलाने वाली रेखा द्विध्रुव अक्ष से कोण θ बनाती है। इसलिए यदि हम द्विध्रुव के मध्य बिन्दु C को मूल बिन्दु मान लें तो बिन्दु P के ध्रुवीय निर्देशांक r और θ होंगे। अब हम बिन्दु P पर द्विध्रुव के दो आवेशों $-q$ और $+q$ के कारण विद्युत्-विभव ज्ञात करते हैं।



चित्र 8.5: लम्बाई $2a$ का एक वैद्युत द्विध्रुव AB तथा इसके मध्यबिन्दु C से दूरी r पर स्थित बिन्दु P।

चित्र 8.5 से ध्यान दें कि $-q$ और $+q$ से बिन्दु P की दूरियां क्रमशः AP और BP हैं। चित्र की ज्यामिति का अध्ययन करें। ध्यान दें कि चित्र 8.5 में हमने B से S तक और A से T तक लम्ब खींचे हैं। अतः, उस स्थिति में जब बिन्दु P द्विध्रुव से बहुत अधिक दूरी पर है जिससे कि $r \gg a$, चित्र से आप देख सकते हैं कि

$$BP = SP = PC - CS = r - a\cos\theta$$

तथा $$AP = TP = TC + CP = r + a\cos\theta$$

इस प्रकार, अध्यारोपण सिद्धान्त [समीकरण (8.16)] का उपयोग करके हम द्विध्रुव के आवेशों $+q$ और $-q$ के कारण विद्युत्-विभवों का बीजगणितीय योग निम्नवत् लिखते हैं :

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{(r - a\cos\theta)} - \frac{1}{(r + a\cos\theta)}\right] = \frac{2qa\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0(r^2 - a^2\cos^2\theta)} \quad (8.22)$$

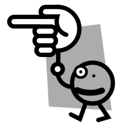
अब, मान लेते हैं कि $\vec{\mathbf{r}}$ बिन्दु C से P तक एक सदिश है तथा सदिश $\vec{\mathbf{r}}$ के अनुदिश इकाई सदिश $\hat{\mathbf{r}}$ है। आप यह भी जानते हैं कि द्विध्रुव आघूर्ण $\vec{\mathbf{p}} = 2q\vec{\mathbf{a}}$ [समीकरण (5.11)] होता है। चूंकि $\vec{\mathbf{p}}.\hat{\mathbf{r}} = 2q\vec{\mathbf{a}}.\hat{\mathbf{r}} = 2qa\cos\theta$, अतः, हम समीकरण (8.22) को निम्नवत लिख सकते हैं :

$$V = \frac{\vec{\mathbf{p}}.\hat{\mathbf{r}}}{4\pi\varepsilon_0(r^2 - a^2\cos^2\theta)} \quad (8.23)$$

जब बिन्दु P द्विध्रुव से बहुत अधिक दूरी पर होता है तो r^2 का मान $a^2\cos^2\theta$ की तुलना में बहुत अधिक हो जाता है। अतः, हम हर में $a^2\cos^2\theta$ को r^2 की तुलना में नगण्य मान सकते है और तब हम लिख सकते हैं :

$$V = \frac{\vec{\mathbf{p}}.\hat{\mathbf{r}}}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \qquad (8.24)$$

समीकरण (8.24), द्विध्रुव के मध्य बिन्दु से दूरी r पर स्थित किसी बिन्दु पर द्विध्रुव के कारण विद्युत्-विभव का व्यापक व्यंजक है। समीकरण (8.24) के आधार पर आप निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि :



कभी न भूलें

- **द्विध्रुव के विद्युत्-विभव में r के साथ परिवर्तन $1/r^2$ के अनुसार होता है जबकि बिन्दु आवेश के विद्युत्-विभव में यह परिवर्तन $1/r$ के अनुसार होता है। इन परिवर्तनों की तुलना दिखाती है कि बिन्दु आवेश की अपेक्षा द्विध्रुव का विद्युत्-विभव दूरी के साथ अधिक तेज़ी से घटता है।**
- **द्विध्रुव अक्ष के लम्ब समद्विभाजक पर स्थित प्रत्येक बिन्दु पर द्विध्रुव का विद्युत्-विभव शून्य होता है, क्योंकि ऐसे किसी भी बिन्दु के लिए $\theta = 90°$ और इसलिए $\cos\theta = 0$ होगा। अतः, किसी आवेश को लम्ब समद्विभाजक के अनुदिश स्थानांतरित करने पर कोई कार्य नहीं किया जाता।**

अब हम द्विध्रुव के विद्युत्-विभव से इसका विद्युत्-क्षेत्र ज्ञात करेंगे। लेकिन आगे बढ़ने से पहले आप एक बोध प्रश्न हल करें।

बोध प्रश्न 6 – वैद्युत द्विध्रुव के कारण विद्युत्-विभव

एक वैद्युत द्विध्रुव के केन्द्र से द्विध्रुव अक्ष के अनुदिश एक सरल रेखा पहले बिन्दु P_1 और फिर बिन्दु P_2 से गुज़रती है। द्विध्रुव के केन्द्र से बिन्दुओं P_1 और P_2 की दूरियां क्रमशः 40 cm और 60 cm हैं। द्विध्रुव की लम्बाई 40 cm से बहुत कम है। यदि P_1 पर विद्युत्-विभव 60 V हो तो P_2 पर विद्युत्-विभव परिकलित करें।

विद्युत्-विभव से विद्युत्-क्षेत्र का परिकलन करने के लिए हम समीकरण (8.20) में दिए गए संबंध का उपयोग करेंगे। लेकिन क्योंकि बिन्दु P की स्थिति निर्दिष्ट करने के लिए हमने ध्रुवीय निर्देशांकों का उपयोग किया है, अतः, हमें समीकरण (8.20) में डेल संकारक के व्यंजक का उपयोग भी ध्रुवीय निर्देशांकों में करना होगा। ध्रुवीय निर्देशांकों में डेल संकारक $\vec{\nabla}$ होता है :

$$\vec{\nabla} = \hat{\mathbf{r}}\frac{\partial}{\partial r} + \hat{\boldsymbol{\theta}}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}$$

ध्रुवीय निर्देशांकों में समीकरण (8.20) को निम्नवत् लिखा जा सकता है :

$$\vec{\mathbf{E}} = -\vec{\nabla}V = -\left[\hat{\mathbf{r}}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hat{\boldsymbol{\theta}}}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right]V$$

अब समीकरण (8.24) से V का मान प्रतिस्थापित करके, हम लिख सकते हैं :

$$\vec{\mathbf{E}} = -\left[\hat{\mathbf{r}}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hat{\boldsymbol{\theta}}}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right]\left[\frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right] = -\left[\hat{\mathbf{r}}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right) + \frac{\hat{\boldsymbol{\theta}}}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p}{r^3}\left[\hat{\mathbf{r}}(2\cos\theta) + \hat{\boldsymbol{\theta}}\sin\theta\right] \qquad (8.25)$$

समीकरण (8.25) से हम बिन्दु P पर विद्युत्-क्षेत्र $\vec{\mathbf{E}}$ के त्रिज्य घटक (E_r) और स्पर्शरेखीय घटक (E_θ) को निम्नवत् लिख सकते हैं (देखें चित्र 8.5) :

$$E_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2p\cos\theta}{r^3} \tag{8.26}$$

$$E_\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\sin\theta}{r^3} \tag{8.27}$$

बिन्दु P पर विद्युत्-क्षेत्र $\vec{\mathbf{E}}$ के त्रिज्य और स्पर्शरेखीय घटक चित्र 8.5 में दिखाए गए हैं। चित्र से ध्यान दें कि बिन्दु P पर परिणामी विद्युत्-क्षेत्र $\vec{\mathbf{E}}$, रेखा PR के अनुदिश है और यह (बढ़ाई गई) रेखा CP, अर्थात् त्रिज्य घटक E_r के साथ कोण α बनाता है।

अतः, विद्युत्-क्षेत्र का परिमाण है :

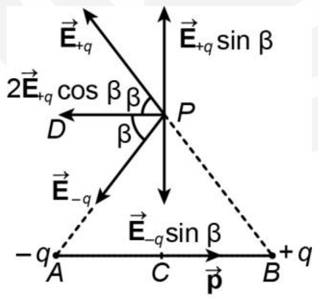
$$\left|\vec{\mathbf{E}}\right| = \sqrt{E_r^2 + E_\theta^2} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\sqrt{4\cos^2\theta + \sin^2\theta} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\sqrt{3\cos^2\theta + 1} \tag{8.28}$$

परिणामी क्षेत्र $\vec{\mathbf{E}}$ की दिशा ज्ञात करने के लिए चित्र 8.5 की ज्यामिति से हम नोट करते हैं कि

$$\tan\alpha = \frac{E_\theta}{E_r} = \frac{\sin\theta}{2\cos\theta} = \frac{1}{2}\tan\theta \tag{8.29}$$

द्विध्रुव के कारण किसी बिन्दु पर विद्युत्-विभव और उससे विद्युत्-क्षेत्र का व्यंजक प्राप्त करने के लिए ध्रुवीय निर्देशांकों का उपयोग करने से यह लाभ होता है कि इन राशियों को समीकरणों (8.26) और (8.27) के आधार पर समझा जा सकता है। चित्र 8.5 देखें। यदि हम $\theta = 0$ लें, तो बिन्दु P द्विध्रुव के अक्ष के अनुदिश होगा। ऐसे किसी बिन्दु के लिए समीकरण (8.26 और 8.27) बताते हैं कि पद $\sin\theta$ के कारण स्पर्शरेखीय घटक E_θ शून्य हो जाएगा और केवल त्रिज्य घटक ही बचेगा। अतः, द्विध्रुव के अक्ष के अनुदिश किसी बिन्दु पर इसके विद्युत्-क्षेत्र का परिमाण निम्नवत् लिखा जा सकता है :

$$\left|\vec{\mathbf{E}}\right| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2p}{r^3}$$



चित्र 8.6: द्विध्रुव के लम्ब समद्विभाजक पर स्थित किसी बिन्दु पर विद्युत्-क्षेत्र की दिशा।

समीकरण (8.29) यह बताता है कि विद्युत्-क्षेत्र की दिशा द्विध्रुव अक्ष के अनुदिश होगी, क्योंकि $\theta = 0$ के लिए $\alpha = 0$ है और α परिणामी विद्युत्-क्षेत्र और द्विध्रुव अक्ष के बीच का कोण है। अतः, द्विध्रुव अक्ष के अनुदिश, उसके केन्द्र से दूरी r पर स्थित किसी बिन्दु पर द्विध्रुव के कारण विद्युत्-क्षेत्र, जबकि $r >> a$ हो, होता है :

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\vec{\mathbf{p}}}{r^3} \tag{8.30}$$

समीकरण (8.30) और इकाई 5 के उदाहरण 5.4 का समीकरण (i) जो द्विध्रुव अक्ष के अनुदिश, द्विध्रुव के कारण विद्युत्-क्षेत्र का मान देता है एक ही हैं।

$\theta = \pi/2$ के लिए, बिन्दु P द्विध्रुव अक्ष के लम्ब समद्विभाजक पर होगा (चित्र 8.6)। इस स्थिति में विद्युत्-क्षेत्र का त्रिज्य घटक शून्य होगा, क्योंकि समीकरण (8.26) में $\cos\theta = 0$ होगा। अतः, ऐसे किसी बिन्दु पर विद्युत्-क्षेत्र का परिमाण केवल स्पर्शरेखीय घटक E_θ के कारण होगा। अतः, समीकरण (8.28) को हम ऐसे लिख सकते हैं :

$$|\vec{\mathbf{E}}| = \sqrt{E_\theta^{\,2}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p}{r^3} \tag{8.31}$$

हम समीकरण (8.29) का उपयोग द्विध्रुव के लम्ब समद्विभाजक पर स्थित बिन्दु पर $\vec{\mathbf{E}}$ की दिशा ज्ञात करने के लिए नहीं कर सकते, क्योंकि $\tan\theta = \tan(\pi/2)$ परिभाषित नहीं होता। लेकिन हम इस तथ्य का उपयोग कर सकते हैं कि समद्विभाजक के प्रत्येक बिन्दु पर विद्युत्-विभव शून्य होता है [समीकरण (8.24) देखें]। इसका अर्थ यह है कि द्विध्रुव समद्विभाजक के अनुदिश किसी आवेश को स्थानांतरित करने में कोई कार्य नहीं किया जाता। और इकाई आवेश को स्थानांतरित करने में किया गया कार्य $\vec{\mathbf{E}}.d\vec{\mathbf{l}}$ होता है। इसलिए $\vec{\mathbf{E}}.d\vec{\mathbf{l}} = 0$ से यह परिणाम निकाला जा सकता है कि विद्युत्-क्षेत्र $\vec{\mathbf{E}}$, विस्थापन $d\vec{\mathbf{l}}$ अर्थात् लम्ब समद्विभाजक की दिशा के लम्बवत् है। अब यह निर्धारित करने के लिए कि $\vec{\mathbf{E}}$ द्विध्रुव आघूर्ण $\vec{\mathbf{p}}$ की दिशा के अनुदिश है या विपरीत, चित्र 8.6 देखिए जिसमें बिन्दु P पर द्विध्रुव के कारण विद्युत्-क्षेत्र दिखाया गया है। $\vec{\mathbf{E}}_{+q}$ का घटक $E_{+q}\sin\beta$ और $\vec{\mathbf{E}}_{-q}$ का घटक $E_{-q}\sin\beta$ एक दूसरे को निरस्त कर देंगे। लेकिन घटक $E_{+q}\cos\beta$ और $E_{-q}\cos\beta$ रेखा PD के अनुदिश जुड़ जाएंगे जो समद्विभाजक के लम्बवत् और द्विध्रुव आघूर्ण $\vec{\mathbf{p}}$ के विपरीत दिशा है। अतः, द्विध्रुव के कारण इसके लम्ब समद्विभाजक पर स्थित किसी बिन्दु पर विद्युत्-क्षेत्र की दिशा $\vec{\mathbf{p}}$ के समांतर और इसके विपरीत है। इस प्रकार, हम लिख सकते हैं :

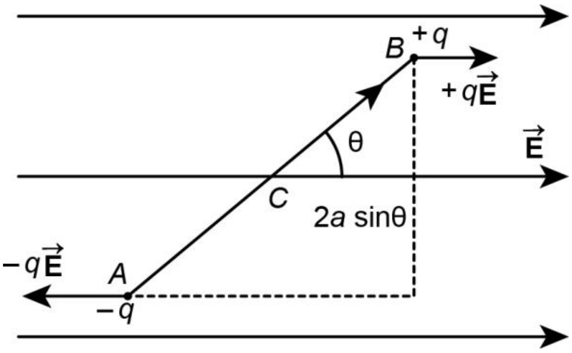
$$\vec{\mathbf{E}} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{\mathbf{p}}}{r^3} \tag{8.32}$$

समीकरण (8.32) और इकाई 5 के उदाहरण 5.5 का समीकरण (i) जो द्विध्रुव अक्ष के लम्ब समद्विभाजक पर स्थित बिन्दु पर द्विध्रुव के कारण विद्युत्-क्षेत्र का मान देता है, एक ही हैं।

इस भाग के प्रारंभ में हमने यह बताया था कि डाइलेक्ट्रिक पदार्थों पर विद्युत्-क्षेत्र के प्रभाव का विश्लेषण करने के लिए बाह्य विद्युत्-क्षेत्र के प्रभाव में वैद्युत द्विध्रुव के व्यवहार को समझना बहुत उपयोगी होता है। अतः, अब हम द्विध्रुव पर विद्युत्-क्षेत्र के प्रभाव का अध्ययन करेंगे।

8.6 विद्युत्-क्षेत्र में द्विध्रुव

किसी एकसमान बाह्य विद्युत्-क्षेत्र $\vec{\mathbf{E}}$ में रखे लम्बाई $2a$ के द्विध्रुव पर विचार करें, जैसाकि चित्र 8.7 में दिखाया गया है। एकसमान विद्युत्-क्षेत्र से तात्पर्य यह होता है कि इसका परिमाण और दिशा सब जगह समान रहते हैं। माना कि द्विध्रुव आघूर्ण सदिश $\vec{\mathbf{p}}(=2q\vec{\mathbf{a}})$ और विद्युत्-क्षेत्र $\vec{\mathbf{E}}$ के बीच का कोण θ है।



चित्र 8.7: एकसमान विद्युत्-क्षेत्र $\vec{\mathbf{E}}$ में रखे द्विध्रुव द्वारा अनुभव किया जाने वाला बल आघूर्ण।

बाह्य विद्युत्-क्षेत्र $\vec{\mathbf{E}}$ के कारण द्विध्रुव का आवेश $+q$, बल $\vec{\mathbf{F}}_+ = q\vec{\mathbf{E}}$ अनुभव करता है जबकि आवेश $-q$, बल $\vec{\mathbf{F}}_- = -q\vec{\mathbf{E}}$ अनुभव करता है जो परिमाण में $\vec{\mathbf{F}}_+$ के बराबर और दिशा में विपरीत है। चूंकि विद्युत्-क्षेत्र एकसमान है, अतः, द्विध्रुव पर लगने वाला कुल बल है :

$$\vec{\mathbf{F}}_{net} = \vec{\mathbf{F}}_+ + \vec{\mathbf{F}}_- = q\vec{\mathbf{E}} - q\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{0}} \qquad (8.33)$$

क्योंकि द्विध्रुव पर लगने वाला परिणामी बल शून्य है, अतः, इसका संहति केन्द्र त्वरित नहीं होता, अर्थात् इसकी स्थानांतरण-गति पर कोई प्रभाव नहीं पड़ता।

अतः, आप पूछ सकते हैं कि क्या इसका तात्पर्य यह है कि बाह्य विद्युत्-क्षेत्र का द्विध्रुव पर कोई प्रभाव नहीं होता। ऐसा नहीं है। द्विध्रुव अभी भी अपने संहति केन्द्र C के परितः एक बल आघूर्ण के कारण घूर्णनकारी प्रभाव का अनुभव करता है। यह घूर्णनकारी प्रभाव इसलिए उत्पन्न होता है क्योंकि वे दो बराबर और विपरीत बल जो मुक्त सदिशों के रूप में एक दूसरे को निरस्त कर देते हैं, दो भिन्न बिन्दुओं पर लगते हैं। अर्थात् द्विध्रुव के $+q$ और $-q$ आवेशों द्वारा अनुभव किए जाने वाले बलों की क्रिया रेखाएं समान नहीं होतीं और इसलिए वे एक घूर्णनकारी प्रभाव प्रदान करते हैं।

चित्र 8.7 से ध्यान दें कि द्विध्रुव का संहति केन्द्र इसके प्रत्येक आवेश से दूरी a पर है। इसलिए, परिणामी बल आघूर्ण $\vec{\boldsymbol{\tau}}$ का परिमाण होगा :

$$\tau = qEa \sin\theta + qEa \sin\theta = 2qaE \sin\theta = pE \sin\theta$$

सदिश रूप में यह व्यंजक होगा :

$$\vec{\boldsymbol{\tau}} = \vec{\mathbf{p}} \times \vec{\mathbf{E}} \qquad (8.34)$$

आप जानते हैं कि बल आघूर्ण का मात्रक न्यूटन मीटर (N m) होता है। बल आघूर्ण की दिशा दक्षिण-हस्त नियम से प्राप्त होती है (सेमेस्टर 1 के पाठ्यक्रम BPHCT-131 की इकाई 12 का भाग 12.3 देखें) और यह $-\hat{\mathbf{k}}$ के अनुदिश है यदि विद्युत्-क्षेत्र $\vec{\mathbf{E}}$ और द्विध्रुव xy-तल में हैं।

बल आघूर्ण के प्रभाव में द्विध्रुव, विद्युत्-क्षेत्र की दिशा के अनुदिश संरेखित होने के लिए प्रवृत्त होता है जिससे कि द्विध्रुव आघूर्ण सदिश $\vec{\mathbf{p}}$ सदिश $\vec{\mathbf{E}}$ के समांतर हो जाए। इसलिए जब सदिश $\vec{\mathbf{p}}$ विद्युत्-क्षेत्र $\vec{\mathbf{E}}$ के अनुदिश संरेखित हो जाता है तो द्विध्रुव पर बल आघूर्ण शून्य हो जाता है, क्योंकि $\theta = 0°$ के लिए $\sin\theta = 0$ होता है। **जब $\vec{\mathbf{p}}$ विद्युत्-क्षेत्र $\vec{\mathbf{E}}$ की दिशा में संरेखित हो जाता है तो निकाय (अर्थात् द्विध्रुव) स्थाई साम्यावस्था की स्थिति में होता है।**

चित्र 8.7 से हम देखते हैं कि द्विध्रुव पर लग रहे बल आघूर्ण के कारण, द्विध्रुव $\vec{\mathbf{E}}$ के अनुदिश संरेखित होने के लिए प्रवृत्त होता है। इसलिए द्विध्रुव का घूर्णन दक्षिणावर्त दिशा में होता है।

वैद्युत द्विध्रुव की स्थितिज ऊर्जा

आइए, अब हम पूछें : जब किसी द्विध्रुव को इसकी स्थाई साम्यावस्था स्थिति से घुमाया जाता है तो इसकी स्थितिज ऊर्जा का क्या होता है? जब भी द्विध्रुव को इसके स्थाई विन्यास ($\vec{\mathbf{p}}$, $\vec{\mathbf{E}}$ के समांतर) से घुमाया जाता है तो इसके लिए बाह्य बल द्वारा कार्य

करना होता है। यह कार्य, वैद्युत द्विध्रुव ऊर्जा की स्थितिज ऊर्जा के रूप में संचित हो जाता है। द्विध्रुव की स्थितिज ऊर्जा का व्यंजक प्राप्त करने के लिए हमें द्विध्रुव को θ के किसी प्रारंभिक मान से θ के अंतिम मान तक घुमाने के लिए विद्युत्-क्षेत्र द्वारा किए गए कार्य की गणना करनी होगी। बल आघूर्ण और कोणीय विस्थापन $d\theta$ के पदों में किया गया कार्य होता है :

$$dW = -\tau . d\theta$$

$$= -pE \sin\theta \, d\theta \qquad (8.35)$$

समीकरण (8.35) में ऋणात्मक चिन्ह बताता है कि बल आघूर्ण, θ के मान में वृद्धि का विरोध करता है। अतः, द्विध्रुव को कोण θ_0 से θ तक घुमाने के लिए विद्युत्-क्षेत्र $\vec{\mathbf{E}}$ द्वारा किया गया कार्य है :

$$W = \int_{\theta_0}^{\theta} dW$$

$$= \int_{\theta_0}^{\theta} (-pE \sin\theta) \, d\theta$$

$$= pE(\cos\theta - \cos\theta_0) \qquad (8.36)$$

द्विध्रुव की स्थितिज ऊर्जा में परिवर्तन ΔU विद्युत्-क्षेत्र द्वारा किए गए कार्य के ऋणात्मक मान के बराबर होता है। अतः,

$$\Delta U = U_f - U_i = -W = -pE(\cos\theta - \cos\theta_0) \qquad (8.37)$$

ध्यान दें कि $U_i = -pE\cos\theta_0$ द्विध्रुव के प्रारंभिक या संदर्भ विन्यास की स्थितिज ऊर्जा है। जिस तरह हमने बिन्दु आवेश के लिए स्थितिज ऊर्जा को अनंत पर शून्य लिया था, उसी तरह हमें $\vec{\mathbf{E}}$ के सापेक्ष द्विध्रुव का वह विन्यास परिभाषित करना होगा जिसके लिए हम स्थितिज ऊर्जा का मान शून्य ले सकें। हम पाते हैं कि जब द्विध्रुव, $\vec{\mathbf{E}}$ के लम्बवत् होता है, अर्थात् जब चित्र 8.7 में $\theta = \pi/2$ होता है तब इसकी स्थितिज ऊर्जा का मान शून्य लिया जा सकता है।

अतः, प्रारंभिक स्थितिज ऊर्जा $U_i = 0$ है। तब हम समीकरण (8.37) को इस तरह लिख सकते हैं :

$$U = -pE\cos\theta$$

या

$$U = -\vec{\mathbf{p}}.\vec{\mathbf{E}} \qquad (8.38)$$

समीकरण (8.38) एकसमान विद्युत्-क्षेत्र में द्विध्रुव की स्थितिज ऊर्जा बताता है। यह बताता है कि द्विध्रुव की स्थितिज ऊर्जा न्यूनतम (अर्थात् सर्वाधिक ऋणात्मक) तब होती है जब द्विध्रुव, विद्युत्-क्षेत्र के अनुदिश संरेखित होता है (अर्थात् $\theta = 0°$) और अधिकतम (सर्वाधिक धनात्मक) तब होती है जब यह विद्युत्-क्षेत्र की विपरीत दिशा ($\theta = 180°$) में संरेखित होता है।

अब आइए, इस इकाई में जो भी आपने सीखा है उसे हम संक्षेप में दोहराएं।

8.7 सारांश

अवधारणा	विवरण
किया गया कार्य और रेखा समाकल	■ इकाई धनात्मक आवेश को बिन्दु a से बिन्दु b तक स्थानांतरित करने में विद्युत्-क्षेत्र $\vec{\mathbf{E}}$ द्वारा किया गया कार्य W', $\vec{\mathbf{E}}$ के रेखा समाकल के बराबर होता है : $$W' = \int_a^b \vec{\mathbf{E}}.d\vec{\mathbf{l}}$$
पथ पर निर्भरता न होना	■ इकाई धनात्मक आवेश को विद्युत्-क्षेत्र में एक बिन्दु से दूसरे बिन्दु तक स्थानांतरित करने में किया गया कार्य अर्थात् $\vec{\mathbf{E}}$ का रेखा समाकल इन दो बिन्दुओं के बीच के पथ पर निर्भर नहीं करता।
स्थिर वैद्युत स्थितिज ऊर्जा	■ विद्युत्-क्षेत्र में किन्हीं दो बिन्दुओं a और b के बीच किसी आवेश की स्थितिज ऊर्जा में अंतर इस आवेश को बिन्दु a से बिन्दु b तक स्थानांतरित करने में किए गए कार्य W' के ऋणात्मक मान के बराबर होता है : $$\Delta U_{ba} = U_b - U_a = -W'_{ab}$$
रेखा समाकल के रूप में विद्युत्-विभव	■ परिभाषा से, एक आवेश के कारण किसी बिन्दु पर विद्युत्-विभव, उस आवेश के विद्युत्-क्षेत्र में इकाई धनात्मक आवेश को अनंत से उस बिन्दु तक लाने में किए गए कार्य के ऋणात्मक मान के बराबर होता है : $$V = -W' = -\int_{\infty}^{r} \vec{\mathbf{E}}.d\vec{\mathbf{l}}$$
विद्युत्-विभव	■ किसी बिन्दु आवेश Q से दूरी r पर स्थित बिन्दु पर विद्युत्-विभव V का व्यंजक होता है : $$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$
V **और** $\vec{\mathbf{E}}$ **का संबंध**	■ किसी बिन्दु पर विद्युत्-क्षेत्र उस बिन्दु पर विद्युत्-विभव के ग्रेडिएन्ट के ऋणात्मक मान के बराबर होता है : $$\vec{\mathbf{E}} = -\vec{\nabla} V$$
वैद्युत द्विध्रुव का विद्युत्-विभव	■ वैद्युत द्विध्रुव के अक्ष से कोण θ बनाती हुई रेखा पर उसके केन्द्र से दूरी r पर स्थित बिन्दु P पर विद्युत्-विभव होता है : $$V = \frac{\vec{\mathbf{p}}.\hat{\mathbf{r}}}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$ जहां $\hat{\mathbf{r}}$ द्विध्रुव के केन्द्र से उस बिन्दु P की, जिस पर विभव ज्ञात करना है, दिशा में एकक सदिश है और $\vec{\mathbf{p}} (= 2q\vec{a})$ द्विध्रुव आघूर्ण सदिश है।
विद्युत्-क्षेत्र में द्विध्रुव पर बल आघूर्ण	■ एकसमान विद्युत्-क्षेत्र में द्विध्रुव एक घूर्णनकारी प्रभाव का अनुभव करता है। द्विध्रुव पर लगने वाला बल आघूर्ण होता है : $$\boldsymbol{\tau} = \vec{\mathbf{p}} \times \vec{\mathbf{E}}$$

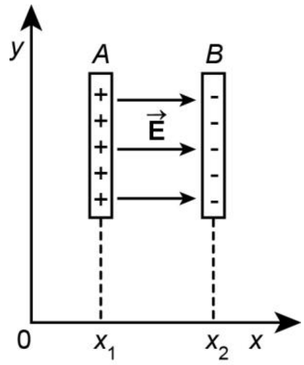
द्विध्रुव की स्थिर वैद्युत स्थितिज ऊर्जा

- विद्युत्-क्षेत्र में द्विध्रुव की स्थिर वैद्युत स्थितिज ऊर्जा होती है $U = -\vec{\mathbf{p}}.\vec{\mathbf{E}}$। इसका मान न्यूनतम होता है जब द्विध्रुव आघूर्ण सदिश $\vec{\mathbf{p}}$ विद्युत्-क्षेत्र $\vec{\mathbf{E}}$ के समांतर होता है और अधिकतम होता है जब यह विद्युत्-क्षेत्र $\vec{\mathbf{E}}$ के प्रतिसमांतर होता है।

8.8 अंत में कुछ प्रश्न

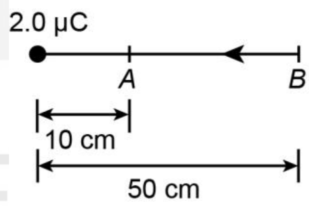
1. सिद्ध करें कि बन्द पथ पर विद्युत्-क्षेत्र $\vec{\mathbf{E}}$ के रेखा समाकल का मान शून्य होता है।

2. सिद्ध करें कि विपरीततः आवेशित 2 समांतर समतल प्लेटों के बीच विद्युत्-क्षेत्र $\vec{\mathbf{E}}$ प्लेटों के बीच विभवांतर को उनके बीच की दूरी से विभाजित करने पर प्राप्त होता है। आप यह मान सकते हैं कि विद्युत्-क्षेत्र प्लेटों के बीच चित्र 8.8 के अनुसार परिबद्ध होता है।



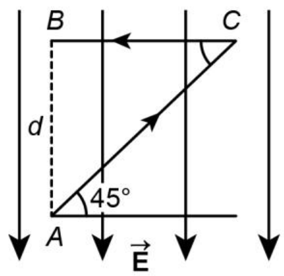
चित्र 8.8: अंत के प्रश्न 2 के लिए चित्र।

3. $2.0\,\mu C$ आवेश से क्रमशः 10 cm और 50 cm की दूरियों पर चित्र 8.9 के अनुसार स्थित दो बिन्दुओं *A* और *B* पर विद्युत्-विभव का परिकलन करें। $0.05\,\mu C$ आवेश को बिन्दु *B* से *A* तक लाने में किए जाने वाले कार्य का भी परिकलन करें।



चित्र 8.9: अंत के प्रश्न 3 के लिए चित्र।

4. कोई परीक्षण आवेश q_0, चित्र 8.10 में दिखाए गए पथ पर बिन्दु *A* और *B* तक बिना किसी त्वरण के गति करता है। बिन्दुओं *A* और *B* के बीच विद्युत्-विभवांतर का परिकलन करें।



चित्र 8.10: अंत के प्रश्न 4 के लिए चित्र।

5. बताएं कि निम्नलिखित कथन सत्य हैं या असत्य :

   क) यदि आकाश के किसी क्षेत्र में विद्युत्-क्षेत्र शून्य हो तो उस क्षेत्र में विद्युत्-विभव भी शून्य होना चाहिए।

   ख) यदि किसी बिन्दु पर विद्युत्-विभव शून्य हो तो उस बिन्दु पर विद्युत्-क्षेत्र भी शून्य होना चाहिए।

   ग) विद्युत्-विभव का शून्य मान किसी भी सुविधाजनक बिन्दु पर लिया जा सकता है।

   घ) किसी बिन्दु पर विद्युत्-क्षेत्र उस बिन्दु पर विद्युत्-विभव के ग्रेडिएन्ट के ऋणात्मक मान के बराबर होता है।

   च) बिन्दु आवेश की तुलना में द्विध्रुव के विद्युत्-क्षेत्र और विद्युत्-विभव अधिक तेज़ी से घटते हैं।

6. किसी स्थान पर *x*-दिशा में $3 \times 10^3\,\text{NC}^{-1}$ का एकसमान विद्युत्-क्षेत्र विद्यमान है। इस क्षेत्र में मूल बिन्दु पर एक $2\,\mu C$ का बिन्दु धनात्मक आवेश विरामावस्था से छोड़ा जाता है।

   क) विद्युत्-विभवांतर $V(5\text{ m}) - V(0)$ का परिकलन करें।

   ख) $x = 0$ से $x = 5\text{ m}$ तक ले जाने में किसी आवेश की स्थिर वैद्युत स्थितिज ऊर्जा में कितना परिवर्तन होता है?

   ग) $x = 5\text{ m}$ पर आवेश की गतिज ऊर्जा का परिकलन करें।

घ) i) $x = 0$ तथा ii) $x = 1\,\text{m}$ पर विद्युत्-विभव का मान शून्य मान कर किसी बिन्दु पर विद्युत्-विभव $V(x)$ का परिकलन करें।

7. ऋणात्मक x-दिशा में एकसमान विद्युत्-क्षेत्र विद्यमान है। इसमें क्रमशः $x = 3\,\text{m}$ और $x = 7\,\text{m}$ पर दो बिन्दु a और b हैं।

   क) विद्युत्-विभवांतर $V_b - V_a$ धनात्मक है या ऋणात्मक?

   ख) यदि $(V_b - V_a)$ का परिमाण $10^4\,\text{V}$ हो तो विद्युत्-क्षेत्र के परिमाण का मान परिकलित करें।

8. 12 V की बैटरी के धनात्मक टर्मिनल से ऋणात्मक टर्मिनल तक एक इलेक्ट्रॉन के अभिगमन में कितना कार्य करने की आवश्यकता होगी?

8.9 हल और उत्तर

बोध प्रश्न

1. माना कि विद्युत्-क्षेत्र $\vec{\mathbf{E}}$ और पथ का लम्बाई का अवयव $d\vec{\mathbf{l}}$ है। चूंकि $\vec{\mathbf{E}}$ और $d\vec{\mathbf{l}}$ एक-दूसरे के समांतर हैं, इन दो सदिशों के बीच θ का मान शून्य है। समीकरण (8.3) से इकाई धनात्मक आवेश को स्थानांतरित करने में किया गया कार्य है :

$$W' = \int \vec{\mathbf{E}}.d\vec{\mathbf{l}} = \int E(\cos\theta)dl = \int E(\cos 0^\circ)dl = \int Edl = El$$

2. किसी नियत बल $\vec{\mathbf{F}}$ द्वारा किसी कण को विस्थापन $\vec{\mathbf{l}}$ देने में किया गया कार्य है :

   $W = \vec{\mathbf{F}}.\vec{\mathbf{l}} = Fl\cos\theta$, जहां θ, $\vec{\mathbf{F}}$ और $\vec{\mathbf{l}}$ के बीच का कोण है।

   i) प्रश्नानुसार इलेक्ट्रॉन $\vec{\mathbf{E}}$ के अनुदिश गति कर रहा है, इसलिए $\theta = 0°$ है और किया गया कार्य है :

$$W = (qE)l\cos 0^\circ = (-1.6\times10^{-19}\text{C})\times(200\,\text{NC}^{-1})\times(30\,\text{m})$$
$$= -9.6\times10^{-16}\,\text{J}$$

   इलेक्ट्रॉन की स्थिर वैद्युत स्थितिज ऊर्जा में परिवर्तन है :

$$\Delta U = U_f - U_i = -W = 9.6\times10^{-16}\,\text{J}$$

   अतः, इलेक्ट्रॉन की स्थिर वैद्युत स्थितिज ऊर्जा U का मान इसके विद्युत्-क्षेत्र की दिशा में गति करने पर बढ़ता है।

   ii) प्रश्नानुसार प्रोटॉन $\vec{\mathbf{E}}$ के अनुदिश गति कर रहा है, इसलिए $\theta = 0°$ । अतः,

$$W = qEl\cos 0^\circ = (1.6\times10^{-19}\text{C})\times(200\,\text{NC}^{-1})\times(30\,\text{m}) = 9.6\times10^{-16}\,\text{J}$$

   अतः, प्रोटॉन की स्थिर वैद्युत स्थितिज ऊर्जा में परिवर्तन होगा :

$$\Delta U = U_f - U_i = -W = -9.6\times10^{-16}\,\text{J}$$

   इस प्रकार हम पाते हैं कि प्रोटॉन की स्थिर वैद्युत स्थितिज ऊर्जा U का मान इसके विद्युत्-क्षेत्र की दिशा में गति करने पर घटता है।

3. क) समीकरण (8.14) से, किसी बिन्दु आवेश के विद्युत्-विभव का व्यंजक है :

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r}$$

i) अतः, बिन्दु X पर विद्युत्-विभव है :

$$V_X = [(9\times10^9\ \text{Nm}^2\text{C}^{-2})\times(7\times10^{-6}\ \text{C})]/(8\ \text{m})$$
$$= 7.87\times10^3\ \text{V} = 8\times10^3\ \text{V}$$

एक सार्थक अंक तक। बिन्दु Y पर विद्युत्-विभव का मान है :

$$V_Y = [(9\times10^9\ \text{Nm}^2\text{C}^{-2})\times(7\times10^{-6}\ \text{C})]/(12\ \text{m})$$
$$= 5.25\times10^3\ \text{V} = 5\times10^3\ \text{V}$$

X और Y के बीच विभवांतर है :

$$V_X - V_Y = (7.87\times10^3\ \text{V} - 5.25\times10^3\ \text{V}) = 2.62\times10^3\ \text{V} = 3\times10^3\ \text{V}$$

ii) जब बिन्दु आवेश $+7\,\mu\text{C}$ की जगह $-7\,\mu\text{C}$ का बिन्दु आवेश रखा जाता है तो बिन्दु X पर विद्युत्-विभव होता है :

$$V_X = [(9\times10^9\ \text{Nm}^2\text{C}^{-2})\times(-7\times10^{-6}\ \text{C})]/(8\ \text{m}) = -7.87\times10^3\ \text{V}$$

बिन्दु Y पर विद्युत्-विभव होता है :

$$V_Y = [(9\times10^9\ \text{Nm}^2\text{C}^{-2})\times(-7\times10^{-6}\ \text{C})]/(12\ \text{m}) = -5.25\times10^3\ \text{V}$$

अतः, विभवांतर होता है :

$$V_X - V_Y = -7.87\times10^3\ \text{V} - (-5.25\times10^3\ \text{V}) = -2.62\times10^3\ \text{V} = -3\times10^3\ \text{V}$$

iii) $+3\,\mu\text{C}$ आवेश को अनंत से बिन्दु X पर तक लाने में किया गया कार्य है :

$$W = qV_X = (3\times10^{-6}\ \text{C})\times(7.87\times10^3\ \text{V}) = 2.36\times10^{-2}\ \text{J} = 2\times10^{-2}\ \text{J}$$

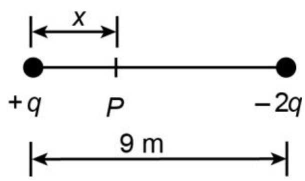
ख) नाभिक पर आवेश $Q = Ze = 79\times1.6\times10^{-19}\text{C}$ तथा $r = 6.6\times10^{-15}$ m हैं।

अतः समीकरण (8.14) से हमें मिलता है :

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r} = \frac{(9\times10^7\ \text{Nm}^2\text{C}^{-2})\times(79\times1.6\times10^{-19}\ \text{C})}{6.6\times10^{-15}\ \text{m}}$$

$$= 1.7\times10^7\ \text{NmC}^{-1} = 1.7\times10^7\ \text{V} \qquad (\because \text{NmC}^{-1} = \text{JC}^{-1})$$

4. मान लें कि वह बिन्दु जिस पर दोनों आवेशों के कारण विद्युत्-विभव शून्य है, P है और P की $+q$ आवेश से दूरी x है (चित्र 8.11)।



चित्र 8.11: बोध प्रश्न 4 के उत्तर के लिए चित्र।

बिन्दु P पर विद्युत्-विभव है :

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r}\left[\frac{q}{x} + \frac{(-2q)}{(9-x)}\right]$$

चूंकि बिन्दु P पर $V = 0$, अतः, हमें मिलता है :

$$\frac{q}{x} = \frac{2q}{(9-x)} \Rightarrow q(9-x) = 2qx \Rightarrow 9q = 3qx \Rightarrow x = 3\,\text{m}$$

5. $\vec{\mathbf{E}}$ और V का संबंध है :

$$\vec{\mathbf{E}} = -\left[\hat{\mathbf{i}}\frac{\partial V}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}}\frac{\partial V}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}}\frac{\partial V}{\partial z}\right]$$

प्रश्नानुसार : $V = x(y^2 - 4x^2)$

इस प्रकार,

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial x}[xy^2 - 4x^3] = y^2 - 12x^2; \qquad \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial y}[xy^2 - 4x^3] = 2xy$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\partial V}{\partial z}[xy^2 - 4x^3] = 0$$

अतः, $\vec{\mathbf{E}} = -[\hat{\mathbf{i}}(y^2 - 12x^2) + \hat{\mathbf{j}}(2xy) + \hat{\mathbf{k}}(0)] = (12x^2 - y^2)\hat{\mathbf{i}} - 2xy\,\hat{\mathbf{j}}$

6. द्विध्रुव के विद्युत्-विभव के लिए हम समीकरण (8.24) का उपयोग करते हैं :

$$V = \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

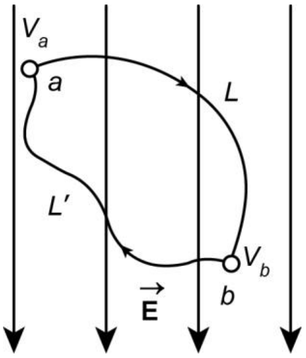
अतः, बिन्दु P_1 पर विद्युत्-विभव है :

$$(V)_{P_1} = \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0(0.40\,\text{m})^2} \Rightarrow \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0} = (60\,\text{V})\times(0.40\,\text{m})^2$$

अतः, बिन्दु P_2 पर विद्युत्-विभव है :

$$(V)_{P_2} = \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0\times(0.60\,\text{m})^2} = \frac{(60\,\text{V})\times(0.40\,\text{m})^2}{(0.60\,\text{m})^2} = 26.7\,\text{V} = 27\,\text{V}$$

अंत में कुछ प्रश्न



चित्र 8.12: अंत के प्रश्न 1 के उत्तर के लिए चित्र।

1. आइए, एक संवृत पथ पर विचार करते हैं जो a से शुरु होकर a पर ही समाप्त होता है, जैसाकि चित्र 8.12 में दिखाया गया है। माना कि इस संवृत्त पथ पर b कोई बिन्दु है। यदि V_a और V_b क्रमशः बिन्दु a और बिन्दु b पर विद्युत्-विभव हों तो

$$-\underset{L \text{ के अनुदिश}}{\int_a^b} \vec{\mathbf{E}}.d\vec{\mathbf{l}} = V_b - V_a \qquad \text{(i)}$$

तथा

$$-\underset{L' \text{ के अनुदिश}}{\int_a^b} \vec{\mathbf{E}}.d\vec{\mathbf{l}} = V_b - V_a \qquad \text{(ii)}$$

समाकलन की सीमाएं बदल कर हम समीकरण (ii) को ऐसे लिख सकते हैं :

$$-\underset{L' \text{ के अनुदिश}}{\int_a^b} \vec{\mathbf{E}}.d\vec{\mathbf{l}} = \underset{L' \text{ के अनुदिश}}{\int_b^a} \vec{\mathbf{E}}.d\vec{\mathbf{l}} = V_a - V_b \qquad \text{(iii)}$$

समीकरण (iii) का उपयोग करते हुए समीकरणों (i) और (ii) का योग करने पर :

$$-\underset{L \text{ के अनुदिश}}{\int_a^b} \vec{\mathbf{E}}.d\vec{\mathbf{l}} - \underset{L' \text{ के अनुदिश}}{\int_a^b} \vec{\mathbf{E}}.d\vec{\mathbf{l}} = -\underset{L \text{ के अनुदिश}}{\int_a^b} \vec{\mathbf{E}}.d\vec{\mathbf{l}} + \underset{L' \text{ के अनुदिश}}{\int_b^a} \vec{\mathbf{E}}.d\vec{\mathbf{l}} = V_b - V_a + V_a - V_b = 0$$

अर्थात् संवृत पथ के अनुदिश विद्युत्-क्षेत्र का रेखा समाकल शून्य होता है।

वैकल्पिक विधि : हम इस तथ्य का भी उपयोग कर सकते हैं कि विद्युत्-क्षेत्र का रेखा समाकल पथ पर निर्भर नहीं करता। अर्थात्

$$\underset{L \text{ के अनुदिश}}{\int_a^b} \vec{\mathbf{E}}.d\vec{\mathbf{l}} = \underset{L' \text{ के अनुदिश}}{\int_a^b} \vec{\mathbf{E}}.d\vec{\mathbf{l}}$$

या

$$\underset{L \text{ के अनुदिश}}{\int_a^b} \vec{\mathbf{E}}.d\vec{\mathbf{l}} - \underset{L' \text{ के अनुदिश}}{\int_a^b} \vec{\mathbf{E}}.d\vec{\mathbf{l}} = 0 \Rightarrow \underset{L \text{ के अनुदिश}}{\int_a^b} \vec{\mathbf{E}}.d\vec{\mathbf{l}} + \underset{L' \text{ के अनुदिश}}{\int_b^a} \vec{\mathbf{E}}.d\vec{\mathbf{l}} = 0$$

ध्यान दें कि चित्र 8.12 में, $(L + L')$ बिन्दुओं a और b के बीच संवृत पथ है।

2. माना कि A और B दो विपरीततः आवेशित प्लेटें हैं जो एक दूसरे से दूरी d पर हैं। माना कि इन प्लेटों के बीच एकसमान विद्युत्-क्षेत्र $\vec{\mathbf{E}}$ विद्यमान है। तब समीकरण (8.11) से हम लिख सकते हैं :

$$-\int_A^B \vec{\mathbf{E}}.d\vec{\mathbf{l}} = (V_B - V_A)$$

जहां V_A और V_B क्रमशः प्लेट A और B पर विद्युत्-विभव हैं। अब हम $\int_A^B \vec{\mathbf{E}}.d\vec{\mathbf{l}} = \int_{x_1}^{x_2} \vec{\mathbf{E}}.\hat{\mathbf{i}}\,dx$ लिखते हैं और ध्यान देते हैं कि $\vec{\mathbf{E}}$ और $\hat{\mathbf{i}}\,dx$ एक-दूसरे के समांतर हैं। तब हम लिख सकते हैं :

$$V_B - V_A = -\int_{x_1}^{x_2} \vec{\mathrm{E}}.\hat{\mathbf{i}}\,dx = -E\,[x]_{x_1}^{x_2} = -E\,(x_2 - x_1) = -E\,d$$

अर्थात् दो विपरीततः आवेशित समांतर प्लेटों के बीच विद्युत्-क्षेत्र का परिमाण उन प्लेटों के बीच विभवांतर को उनके बीच की दूरी से विभाजित करने पर प्राप्त होता है।

3. आवेश Q से दूरी r पर स्थित बिन्दु पर विभव V_r समीकरण (8.14) के अनुसार होता है :

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

प्रश्नानुसार, $Q = 2.0\,\mu C = 2.0 \times 10^{-6} C, 1/(4\pi\,\varepsilon_0) = 9 \times 10^9\, Nm^2 C^{-2}$
$r = 0.10\,m$ तथा $0.50\,m$ ।

ये मान प्रतिस्थापित करने पर हमें मिलता है :

$$V_A = (9 \times 10^9\, Nm^2\, C^{-2})\, \frac{2.0 \times 10^{-6}\, C}{0.10\ m} = 1.8 \times 10^5\, V$$

$$V_B = (9 \times 10^9\, Nm^2\, C^{-2})\, \frac{2.0 \times 10^{-6}\, C}{0.50\ m} = 0.36 \times 10^5\, V$$

बिन्दु B से बिन्दु A तक आवेश $0.5\,\mu C$ को स्थानांतरित करने में किया गया कार्य $W = q\,(V_A - V_B)$ है जहां $q = 0.05 \times 10^{-6} C$ है।

$$\therefore \qquad W = (0.05 \times 10^{-6}\, C)\,(1.8 \times 10^5 - 0.36 \times 10^5)\,V$$

$$= 7.2 \times 10^{-3}\, J$$

4. हम लिख सकते हैं :

$$V_B - V_A = (V_B - V_C) + (V_C - V_A)$$

$$= -\int_C^B \vec{\mathbf{E}}.d\vec{\mathbf{l}} - \int_A^C \vec{\mathbf{E}}.d\vec{\mathbf{l}}$$

पथ C से B के लिए $\vec{\mathbf{E}}$ और $d\vec{\mathbf{l}}$ परस्पर लम्बवत् हैं।

$$\therefore \qquad \int_C^B \vec{\mathbf{E}}.d\vec{\mathbf{l}} = \left|\vec{\mathbf{E}}\right|\, d\vec{\mathbf{l}}\cos 90^\circ = 0$$

पथ A से C के लिए, $\vec{\mathbf{E}}$ और $d\vec{\mathbf{l}}$ के बीच कोण 135° है। अतः,

$$\int_A^C \vec{\mathbf{E}}.d\vec{\mathbf{l}} = \int_A^C Edl\,\cos 135^\circ$$

$$= -\frac{E}{\sqrt{2}}\int_A^C dl = -\frac{E}{\sqrt{2}}(AC) = -\frac{E}{\sqrt{2}}\sqrt{2}\,d = -Ed$$

चूंकि $AC = d/\cos 45^\circ = \sqrt{2}\,d$ । अतः, हमें मिलता है :

$$V_B - V_A = -\int_A^C \vec{\mathbf{E}}.d\vec{\mathbf{l}} = Ed$$

आप नोट कर सकते हैं कि यही मान सीधे A से B पथ के लिए भी प्राप्त होगा जिसे चित्र 8.10 में, बिन्दुदार रेखा द्वारा दिखाया गया है।

5. क) असत्य ख) असत्य (वैद्युत द्विध्रुव अक्ष के लम्ब समद्विभाजक पर स्थित किसी बिन्दु के लिए समीकरण (8.24) और समीकरण (8.32) देखें।)

ग) सत्य घ) सत्य च) सत्य

6. क) $V(5\,\text{m}) - V(0) = -\int_A^B \vec{\mathbf{E}}.d\vec{\mathbf{l}} = -\int_0^{5\text{m}} Edl = -(3\times10^3\,\text{NC}^{-1})\times(5\,\text{m}) = -15\times10^3\,\text{V}$

ख) स्थिर वैद्युत स्थितिज ऊर्जाओं में अंतर तथा विभवांतर के बीच संबंध है :

$$\Delta U = q\Delta V = (2\times10^{-6}\,\text{C})\times(-15\times10^3\,\text{V}) = -3.0\times10^{-2}\,\text{J}$$

ग) ऊर्जा संरक्षण के आधार पर हम जानते हैं कि

$$\Delta U + \Delta K = 0$$

जहां ΔU स्थितिज ऊर्जा में तथा ΔK गतिज ऊर्जा में परिवर्तन हैं।

अतः, $[K(5\,\text{m}) - K(0)] + \Delta U = 0 \Rightarrow K(5\,\text{m}) = -\Delta U = 3.0\times10^{-2}\,\text{J}$

घ) हम जानते हैं कि एकसमान विद्युत्-क्षेत्र के लिए $V = Ed$ । अतः,

$$V(x) - V(0) = -E_x(x - x_0) = -(3\times10^3\,\text{NC}^{-1})(x - x_0)$$

i) $V(0) = 0$ के लिए

$$V(x) = -(3\times10^3\,\text{NC}^{-1})\,x$$

ii) $V(1\text{m}) = 0$ के लिए

$$V(x) - 0 = -(3\times10^3\,\text{NC}^{-1})\times(x-1)$$

या $$V(x) = 3\times10^3\,\text{V} - (3\times10^3\,\text{Vm}^{-1})\,x$$

7. ध्यान दें कि विद्युत्-क्षेत्र ऋणात्मक x-दिशा के अनुदिश है। अतः, विद्युत्-विभव और विद्युत्-क्षेत्र के संबंध को इस प्रकार लिखा जा सकता है :

$$E_x = \frac{dV}{dx}$$

इसलिए विद्युत्-विभव का मान x के अधिक मान के लिए अधिक होगा। इसलिए $(V_B - V_A)$ धनात्मक होगा।

अब $V_B - V_A = 10^4\,\text{V}$ के संगत E_x का परिमाण ज्ञात करने के लिए हम लिख सकते हैं :

$$E_x = \frac{\Delta V}{\Delta x} = \frac{V_B - V_A}{(7\,\text{m} - 4\,\text{m})} = \frac{10^4\,\text{V}}{4\,\text{m}} = 2.5\times10^3\,\text{Vm}^{-1}$$

8. बैटरी के धनात्मक टर्मिनल से ऋणात्मक टर्मिनल तक जाने में इलेक्ट्रॉन (जो एक ऋणात्मकतः आवेशित कण है) को उच्चतर विभव से निम्नतर विभव की ओर गति करनी है। इसलिए यदि A और B क्रमशः बैटरी के धनात्मक और ऋणात्मक टर्मिनल हों तो

$$V_B - V_A = -12\,\text{V}$$

अतः, किया गया कार्य है :

$$W = q(V_B - V_A) = (-1.6 \times 10^{-19}\ \text{C}) \times (-12\ \text{V}) = 1.92 \times 10^{-18}\ \text{J}$$