बिजली के गिरने पर आप तब क्यों बच जाते हैं जब आप एक बंद चालक सतह जैसेकि गाड़ी के अंदर बैठे होते हैं? इस प्रश्न का उत्तर आपको इस इकाई में मिलेगा!

इकाई 7

गाउस नियम के अनुप्रयोग

इकाई की रूपरेखा

अध्ययन निर्देशिका

इकाई 6 में आपने वैद्युत अभिवाह की अवधारणा और गाउस नियम के बारे में पढ़ा है। आपने विविक्त बिंदु आवेशों और गोलीय सममिति वाले संतत आवेश वितरणों जैसेकि एकसमानतः आवेशित गोले और पतले गोलीय कोश पर गाउस नियम को लागू करना सीखा है। इस इकाई में, आप बेलनी और समतलीय सममिति वाले कुछ और संतत आवेश वितरणों जैसेकि अनंत एकसमान रेखा आवेश और आवेशित शीट पर गाउस नियम के अनुप्रयोगों के बारे में पढ़ेंगे। आप एकसमानतः आवेशित अनंत तार, एकसमान बेलनाकार आवेश वितरण और आवेशित अनंत शीट के कारण विद्युत्-क्षेत्रों को निर्धारित करना सीखेंगे। आप आवेशित विलगित चालक पर गाउस नियम के अनुप्रयोग के बारे में भी पढ़ेंगे। आप सीखेंगे कि इनमें से प्रत्येक स्थिति में आने वाले पृष्ठ समाकलों को हल करने के लिए समुचित गाउसीय पृष्ठों का चुनाव कैसे करना होता है। इकाई 4 में दी गई डाइवर्जेन्स प्रमेय को आप दोहरा लें। आपको इस इकाई की अवधारणाओं को अच्छी तरह समझने के लिए पृष्ठ और आयतन समाकलों को हल करने की विधियां भी दोहरा लेनी चाहिए। इस इकाई में दिए गए उदाहरणों, बोध प्रश्नों और अंत के प्रश्नों को आप अपने-आप हल करने की कोशिश करें।

"ज्ञान नहीं, बल्कि उसे सीखने की प्रक्रिया, ज्ञान का स्वामित्व नहीं, बल्कि उस तक पहुंचने की प्रक्रिया ही सर्वाधिक आनंद देती है।"	**कार्ल फ्रीड्रिख़ गाउस**

7.1 परिचय

इकाई 6 में आपने वैद्युत अभिवाह की अवधारणा और गाउस नियम के बारे में पढ़ा है। विविक्त आवेशों के वैद्युत अभिवाह और विद्युत्-क्षेत्र को ज्ञात करने के लिए आपने गाउस नियम को लागू करना सीखा है। आपने इस नियम को गोलीय सममिति वाले संतत आवेश वितरणों जैसेकि एकसमानतः आवेशित गोले और पतले गोलीय कोश पर लागू किया है। आपने सीखा है कि ऐसे आवेश वितरणों का गाउसीय पृष्ठ गोलीय होता है और उनके साथ संकेंद्री होता है। साथ ही, वह उस बिंदु से होकर गुज़रता है जिस पर विद्युत्-क्षेत्र ज्ञात किया जाना है।

इस इकाई में, आप पहले सीखेंगे कि बेलनाकार सममिति वाले आवेश वितरणों जैसेकि एकसमान रेखा आवेश और एकसमानतः आवेशित बेलन पर गाउस नियम को कैसे लागू किया जाता है (भाग 7.2)। इस भाग की शुरुआत में आप बेलनी सममिति की अवधारणा सीखेंगे। फिर हम समझाएंगे कि बेलनी सममिति वाले आवेश वितरणों के कारण विद्युत्-क्षेत्रों की गणना के लिए गाउस नियम इतना उपयोगी क्यों होता है। इस समझ के साथ आप अनंत एकसमान रेखा आवेश और अनंत एकसमानतः आवेशित बेलन के विद्युत्-क्षेत्र ज्ञात करने के लिए गाउस नियम को लागू करना सीख सकेंगे।

भाग 7.3 में आप समतलीय सममिति वाली अनंत एकसमानतः आवेशित शीट के कारण विद्युत्-क्षेत्र ज्ञात करने के लिए गाउस नियम को लागू करना सीखेंगे। एक बार फिर हम समझाएंगे कि समतलीय सममिति क्या होती है और समतलीय सममिति वाले आवेश वितरणों के कारण विद्युत्-क्षेत्रों को ज्ञात करने के लिए गाउस नियम कैसे उपयोगी होता है।

भाग 7.2 और भाग 7.3 में बताए गए गाउस नियम के अनुप्रयोगों का उपयोग समाक्ष संधारित्रों और समांतर प्लेट संधारित्रों की धारिता निकालने में किया जाता है। यह आप अगले खंड की इकाई 11 में जानेंगे। जैसाकि शायद आप जानते हों, इस तरह के संधारित्रों का हमारे आस-पास आम तौर पर उपयोग किया जाता है जैसेकि टी.वी. और कंप्यूटर जैसे इलेक्ट्रॉनिक यंत्रों, शक्ति भंडारण निकायों आदि में। अंत में, भाग 7.4 में हम एक विलगित आवेशित ठोस चालक और गुहिका वाले चालक पर गाउस नियम को लागू करेंगे। इसके भी वास्तविक जीवन में दिलचस्प अनुप्रयोग हैं। इनमें से एक को इस इकाई के पहले पृष्ठ पर दिखाया गया है।

अगली दो इकाइयों में, हम विद्युत्-विभव और विद्युत्-क्षेत्र से उसके संबंध पर चर्चा करेंगे। आप विद्युत्-विभव की अवधारणा का उपयोग करके विद्युत्-क्षेत्रों और स्थिर वैद्युत बल ज्ञात करने की एक और विधि सीखेंगे।

उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप :

- ❖ बेलनी सममिति वाले आवेश वितरणों जैसेकि अनंत एकसमान रेखा आवेश और अनंत एकसमानतः आवेशित बेलन के कारण विद्युत्-क्षेत्र ज्ञात करने के लिए गाउस नियम को लागू कर सकेंगे;

❖ गाउस नियम का उपयोग कर अनंत एकसमानतः आवेशित समतलीय शीट के कारण विद्युत्-क्षेत्र ज्ञात कर सकेंगे; और

❖ गाउस नियम का उपयोग कर समझा सकेंगे कि एक विलगित आवेशित चालक के अंदर विद्युत्-क्षेत्र शून्य क्यों होता है और उस पर मौजूद आवेश पूरी तरह उसकी सतह पर क्यों वितरित होता है।

7.2 बेलनी सममिति वाले आवेश वितरणों के कारण विद्युत्-क्षेत्र

हमने इस इकाई के परिचय में बताया है कि इस भाग में हम बेलनी सममिति वाले आवेश वितरणों जैसेकि रेखा आवेश और आवेशित बेलन के कारण विद्युत्-क्षेत्र ज्ञात करेंगे। आप पूछना चाहेंगे :

- **बेलनी सममिति क्या होती है?**
- **गाउस नियम बेलनी सममिति वाले आवेश वितरण के लिए कैसे उपयोगी होता है?**

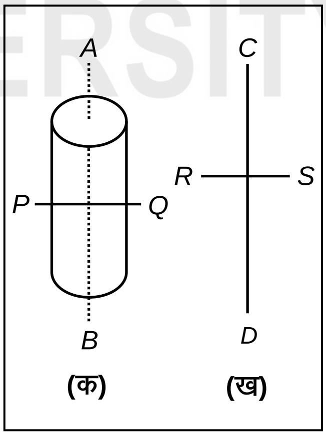
आइए, हम अपनी चर्चा इन दोनों सवालों के जवाबों से शुरू करें।

7.2.1 गाउस नियम और बेलनी सममिति वाले आवेश वितरण

आइए, हम पहले सवाल का जवाब दें और **बेलनी सममिति** की परिभाषा दें।

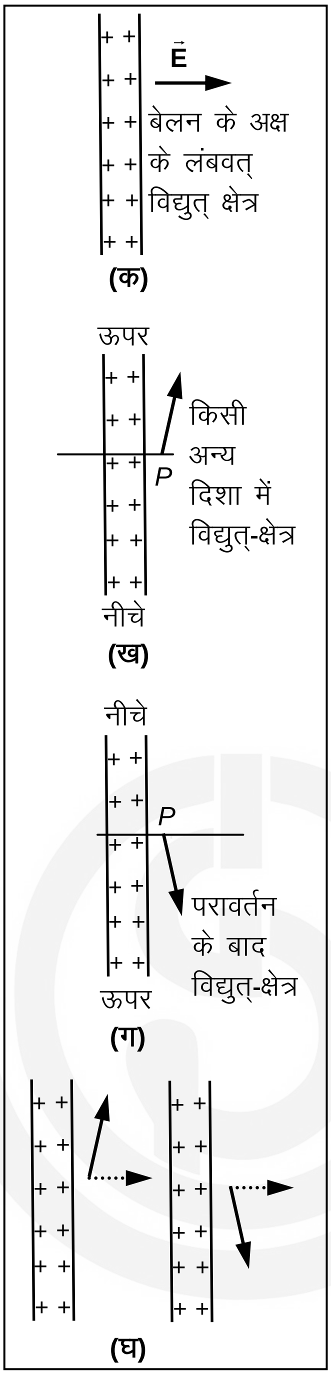
किसी आवेश वितरण (या किसी पिंड) में **बेलनी सममिति** होती है जब वह निम्न रूपांतरणों के अधीन **अपरिवर्तित** (या **निश्चर**) रहता है :

- जब वह अपने अक्ष (चित्र 7.1क में *AB* और चित्र 7.1ख में *CD*) यानी अपनी कोर से गुज़रने वाली रेखा के अनुदिश गतिमान होता है (स्थानांतरण सममिति);
- जब उसे उसके अक्ष के प्रति घूर्णित किया जाता है (घूर्णी सममिति);
- जब उसे उसके अक्ष के लंबवत् अक्ष (चित्र 7.1क में *PQ* और 7.1ख में *RS*) के प्रति 180° के कोण से घूर्णित किया जाता है (180° घूर्णी सममिति);
- जब उसे उसके अक्ष से गुज़रने वाले किसी भी समतल में परावर्तित किया जाता है (परावर्तन सममिति); और
- जब उसे अपने अक्ष के लंबवत् किसी भी समतल में परावर्तित किया जाता है (परावर्तन सममिति)।



चित्र 7.1: क) बेलन का अक्ष *AB* (बिंदुदार रेखा); ख) रेखा या तार के लिए अक्ष *CD* उसी (रेखा/तार) पर होता है।

ये सभी रूपांतरण आप अपने आस-पास की किसी बेलनाकार वस्तु पर लागू करें जैसेकि पानी के पाइप या बेलनाकार कैन पर। आगे पढ़ने से पहले यह परख लें कि उसमें बेलनी सममिति है। एक अनंत रेखा या तार में (जैसेकि अनंत बेलन के अक्ष में) भी बेलनी सममिति होती है (चित्र 7.1ख)।



चित्र 7.2: क) अनंत आवेशित बेलन के एक भाग के कारण विद्युत्-क्षेत्र $\vec{E}$ की दिशा उसके अक्ष के लंबवत् होती है; ख) किसी अन्य दिशा में विद्युत्-क्षेत्र; ग) परावर्तित विद्युत्-क्षेत्र; घ) एक ही आवेश वितरण के कारण एक ही बिंदु पर विद्युत्-क्षेत्र की दिशाएं अलग-अलग हैं, जो संभव नहीं है। अतः, $\vec{E}$ की दिशा वही है जो बिंदुदार तीरों द्वारा दिखाई गई है।

अब आइए, हम दूसरे सवाल का जवाब दें और समझाएं कि बेलनी सममिति वाले आवेश वितरण के कारण विद्युत्-क्षेत्र ज्ञात करने के लिए **गाउस नियम कैसे उपयोगी है**।

इकाई 6 के भाग 6.4 से भाग 6.6 तक पढ़ते हुए आपने ध्यान दिया होगा कि आवेश वितरण को परिबद्ध करने वाली गोलाकार गाउसीय सतह के चुनाव से गणनाएं काफी आसान हो गई थीं। इसके दो कारण थे :

- विद्युत्-क्षेत्र गाउसीय सतह पर पृष्ठ अवयव के क्षेत्रफल सदिश के समांतर था जिससे $\vec{\mathbf{E}}.d\vec{\mathbf{S}} = E\,dS$ था; और
- गाउसीय सतह के सभी बिंदुओं पर विद्युत्-क्षेत्र का परिमाण E समान था जिससे कि हम उसे अचर मान सके और पृष्ठ समाकल से बाहर निकाल सके।

आइए, अब हम पूछें : बेलनी आवेश वितरण के कारण किसी बिंदु पर **विद्युत्-क्षेत्र की दिशा** क्या होती है? चित्र 7.2क पर ध्यान दें। इसमें हमने धनात्मक आवेश वाले अनंत बेलन का एक छोटा भाग दिखाया है (यह एक आवेशित अनंत तार भी हो सकता है)। आवेश वितरण के विद्युत्-क्षेत्र की दिशा उसके अक्ष के लंबवत् है और धनात्मकतः आवेशित बेलन के लिए विद्युत्-क्षेत्र की दिशा अक्ष से त्रिज्यतः बहिर्मुखी है (चित्र 7.2क)। ऋणात्मक बेलनी आवेश वितरण के लिए, विद्युत्-क्षेत्र की दिशा त्रिज्यतः अंतर्मुखी और अक्ष के लंबवत् होगी। आप पूछ सकते हैं : **क्यों**?

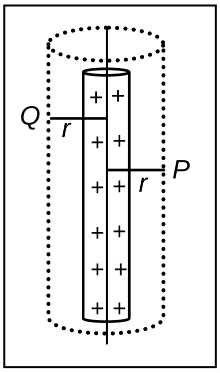
इस सवाल का जवाब पाने के लिए, मान लें कि बेलनी आवेश वितरण के कारण किसी बिंदु P पर विद्युत्-क्षेत्र किसी अन्य दिशा में है जैसाकि चित्र 7.2ख में दिखाया गया है। ध्यान दें कि हमने बेलन के एक सिरे पर स्वेच्छ रूप से 'ऊपर' लिख दिया है और दूसरे सिरे पर 'नीचे'। ऐसा हमने सिर्फ यह दिखाने के लिए किया है कि जब बेलन के इस भाग को परावर्तित किया जाता है तब क्या होता है। अब हम इस बेलनी आवेश वितरण को बिंदु P से गुज़रने वाले उसके अक्ष के लंबवत् एक क्षैतिज अक्ष के परितः परावर्तित करते हैं। इससे इस बेलन का 'ऊपर' अब 'नीचे' हो जाता है और 'नीचे', 'ऊपर' (चित्र 7.2ग)। बेलनी आवेश वितरण के परावर्तन के बाद विद्युत्-क्षेत्र की दिशा क्या है? परावर्तन के बाद विद्युत्-क्षेत्र की दिशा चित्र 7.2ग के अनुसार हो जाती है क्योंकि विद्युत्-क्षेत्र भी उसी तरह परावर्तित होता है।

अब आप (चित्र 7.2घ की तरह) चित्र 7.2ख और चित्र 7.2ग को एक-दूसरे के बराबर रखें और उनकी तुलना करें। आप क्या पाते हैं? आप देख सकते हैं कि परावर्तन के बाद आवेश वितरण तो वैसा का वैसा (बेलनाकार) है लेकिन विद्युत्-क्षेत्र अलग है। ('ऊपर' और 'नीचे' हमने समझने में आसानी के लिए लिखा था वरना हम इनमें अंतर नहीं कर सकते।)

यह तो विरोधाभास है : **एक ही आवेश वितरण के कारण एक ही बिंदु पर अलग-अलग विद्युत्-क्षेत्र कैसे हो सकते हैं?** यदि आवेश वितरण बदलता नहीं, तो उसके कारण विद्युत्-क्षेत्र को भी नहीं बदलना चाहिए। यदि ऐसा नहीं है, तो अवश्य कहीं ग़लती हो रही है। अब हम पूछते हैं : **विद्युत्-क्षेत्र की किस दिशा के लिए यह विरोधाभास नहीं होगा?** चित्र 7.2घ से आप देख सकते हैं कि यदि (चित्र में बिंदुदार तीरों से दिखाया गया) विद्युत्-क्षेत्र बेलन के अक्ष के लंबवत् होता तो वह इस सममिति संक्रिया के अधीन वैसा ही रहता (बदलता नहीं)। आप इस बात को बेलन पर अन्य सममिति संक्रियाओं के लिए भी जांच सकते हैं। इसी के कारण हम सममिति के आधार पर इस निष्कर्ष पर

पहुंचते हैं कि **बेलनाकार आवेश वितरण के कारण किसी बिंदु पर विद्युत्-क्षेत्र की दिशा उसके अक्ष के लंबवत् ही हो सकती है। विद्युत्-क्षेत्र की दिशा धनात्मक आवेश वितरण के लिए बेलन से त्रिज्यतः बहिर्मुखी और ऋणात्मक आवेश वितरण के लिए बेलन से त्रिज्यतः अंतर्मुखी होती है।**

अब आप जानना चाहेंगे : **बेलनाकार सममिति वाले आवेश वितरण के कारण किसी बिंदु पर विद्युत्-क्षेत्र का परिमाण किस पर निर्भर करता है**? इसका जवाब है : यह बिंदु की बेलन के अक्ष से केवल लांबिक दूरी, माना कि r, पर निर्भर करता है। **ऐसा क्यों है?**



चित्र 7.3: किसी बिंदु पर बेलनाकार आवेश वितरण के कारण विद्युत्-क्षेत्र का परिमाण केवल उस बिंदु की सममिति अक्ष से लांबिक दूरी r पर निर्भर करता है। यदि ऐसा न होता तो एक ही सतह और एक ही आवेश वितरण के लिए विद्युत्-क्षेत्र का परिमाण भिन्न बिंदुओं, जैसेकि P और Q पर, भिन्न होता जो ग़लत है।

मान लें कि **किसी बिंदु पर बेलनी आवेश वितरण के कारण विद्युत्-क्षेत्र का परिमाण, उस बिंदु के कोणीय निर्देशांकों पर निर्भर करता**। तब उसके अलग-अलग बिंदुओं, माना कि P और Q (जो अक्ष से **समान** लांबिक दूरी पर हैं), पर अलग-अलग मान होंगे (यानी चित्र 7.3 में दिखाई गई समान त्रिज्या r वाली बिंदुदार बेलनाकार सतह पर अलग-अलग मान होंगे)। लेकिन यह एक विरोधाभास है। ऐसा इसलिए है क्योंकि बेलनी सममिति के कारण, आवेशित बेलन, त्रिज्या r वाली बेलनाकार सतह पर स्थित सभी बिंदुओं के लिए एक-जैसा होगा (चित्र 7.3)। अतः, **एक ही बेलनी आवेश वितरण के लिए किसी दिए हुए बेलनाकार पृष्ठ के भिन्न बिंदुओं पर विद्युत्-क्षेत्र के परिमाण का मान भिन्न नहीं हो सकता।**

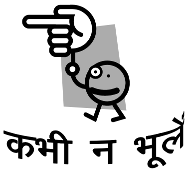
अतः, किसी दिए हुए बिंदु पर, बेलनी आवेश वितरण के कारण विद्युत्-क्षेत्र का परिमाण केवल बेलन के अक्ष से बिंदु की लांबिक दूरी पर निर्भर करेगा।

अतः, बेलनी सममिति के चलते, बेलनी आवेश वितरण के कारण किसी बिंदु पर विद्युत्-क्षेत्र का परिमाण केवल बेलन के अक्ष से उस बिंदु की लांबिक दूरी पर निर्भर करता है। अतः, जहां तक बेलनी आवेश वितरण के कारण विद्युत्-क्षेत्र के परिमाण का सवाल है, किसी दी गई त्रिज्या के बेलनी पृष्ठ पर स्थित सभी बिंदु समकक्ष होते हैं : वह बेलनी आवेश वितरण, रेखा आवेश, आवेशित तार या आवेशित ठोस बेलन/खोखले बेलन में से कोई भी आवेश वितरण हो सकता है।

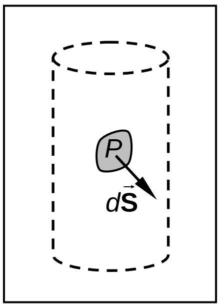
तब हम ऐसे निकायों के लिए किसी दी हुई बेलनी सतह पर विद्युत्-क्षेत्र के परिमाण को अचर मान सकते हैं और उसे पृष्ठ समाकल से बाहर कर सकते हैं। आप इस बात को अगले भाग में बेहतर समझ सकेंगे।

सार रूप में, आपको **बेलनी सममिति वाले किसी भी आवेश वितरण के लिए** निम्नलिखित बातें हमेशा याद रखनी चाहिए :

- **बेलनी सममिति वाले आवेश वितरण के कारण विद्युत्-क्षेत्र की दिशा उसके सममिति अक्ष के लंबवत् होती है।**
- **किसी बिंदु पर विद्युत्-क्षेत्र का परिमाण केवल सममिति अक्ष से उस बिंदु की लांबिक दूरी पर निर्भर करता है।**



तो अब क्या आप जल्दी से बता सकते हैं कि रेखा आवेश जैसे बेलनी सममिति वाले आवेश वितरण के लिए हमें कैसा गाउसीय पृष्ठ चुनना चाहिए? वस्तुतः इसके लिए गाउसीय पृष्ठ **बेलनाकार** होना चाहिए। ऐसा क्यों? जैसाकि आपने अभी-अभी सीखा है, बेलनाकार आवेश वितरण (आवेशित रेखा या बेलन) के समाक्ष बेलनाकार गाउसीय पृष्ठ



चित्र 7.4: बेलनाकार गाउसीय पृष्ठ के किसी बिंदु P पर केंद्रित अवयव का क्षेत्रफल सदिश $d\vec{\mathbf{S}}$ उस पृष्ठ के लंबवत् है।

के लिए विद्युत्-क्षेत्र, पृष्ठ पर स्थित सभी बिंदुओं पर, पृष्ठ के लंबवत् होता है। आप जानते हैं कि गाउसीय पृष्ठ के किसी बिंदु पर केंद्रित क्षेत्रफल अवयव के लिए क्षेत्रफल सदिश $d\vec{\mathbf{S}}$ की दिशा पृष्ठ के लंबवत् होती है (चित्र 7.4)। अतः, बेलनी सममिति वाले आवेश वितरण के कारण किसी बिंदु पर विद्युत्-क्षेत्र $\vec{\mathbf{E}}$, क्षेत्रफल सदिश $d\vec{\mathbf{S}}$ के समांतर होगा। अतः,

$$\vec{\mathbf{E}}.d\vec{\mathbf{S}} = E\,dS \qquad (7.1)$$

आपने यह भी सीखा है कि किसी बिंदु पर विद्युत्-क्षेत्र का परिमाण, उस बिंदु से गुज़रने वाले गाउसीय पृष्ठ के सभी बिंदुओं पर समान होता है। अतः, हम उस पृष्ठ के लिए विद्युत्-क्षेत्र के परिमाण को अचर मान सकते हैं और पृष्ठ समाकल से बाहर निकाल सकते हैं।

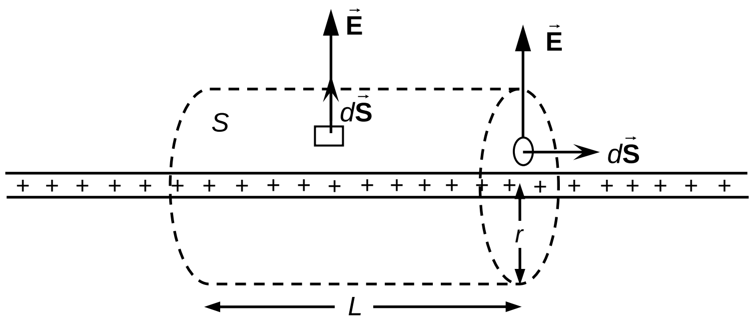
आवेश वितरणों की बेलनी सममिति की इस समझ के साथ, हम एकसमान अनंत रेखा आवेश पर गाउस नियम को लागू कर सकते हैं।

7.2.2 अनंत एकसमान रेखा आवेश

याद करें कि आपने इकाई 5 के उदाहरण 5.7 में कूलॉम नियम का उपयोग करके अनंत रेखा आवेश के कारण विद्युत्-क्षेत्र की गणना की है। आपने उस गणना में आने वाले लंबे समाकल को हल करना सीखा है। आइए, अब हम उसी समस्या पर गाउस नियम लागू करें।

मान लें कि एक अनंततः लंबे तार पर एकसमान रैखिक आवेश घनत्व λ वाला आवेश मौजूद है। आइए, गाउस नियम का उपयोग कर हम तार से दूरी r पर विद्युत्-क्षेत्र की गणना करें। आगे पढ़ने से पहले, आप जल्दी से यह जांच लें कि अनंत रेखा आवेश वितरण में बेलनी सममिति होती है। इसके लिए आप तार पर बेलनी सममिति की संक्रियाएं लागू करें।

आइए, अब हम एक गाउसीय पृष्ठ यानी त्रिज्या r और लंबाई L वाले एक लंबवृत्तीय बेलन का पृष्ठ, जो तार से समाक्ष है, खींचें (चित्र 7.5)।



चित्र 7.5: एक अनंत एकसमानतः आवेशित तार पर गाउस नियम लागू करना। गाउसीय पृष्ठ बेलनाकार है और उसकी त्रिज्या r और लंबाई L है। यह आवेशित तार के एक भाग को परिबद्ध करता है।

बेलनाकार गाउसीय पृष्ठ पर स्थित किसी बिंदु पर विद्युत्-क्षेत्र का **परिमाण** क्या है? आपने भाग 7.2.1 में सीखा है कि बेलनी सममिति के कारण, विद्युत्-क्षेत्र का परिमाण बेलन के पृष्ठ पर सभी बिंदुओं पर समान होगा क्योंकि यह तार के अक्ष से केवल बिंदु की लांबिक दूरी पर निर्भर करता है।

जैसाकि आप चित्र 7.5 में देख सकते हैं, यह दूरी बेलन की त्रिज्या (r) के बराबर है। अतः, यह त्रिज्या r वाले बेलनी पृष्ठ के सभी बिंदुओं पर समान होगा और उस पृष्ठ विशेष के लिए उसे अचर माना जा सकता है। बेलनी सतह के लिए, विद्युत्-क्षेत्र की दिशा सतह के सभी बिंदुओं पर उसके लंबवत् होती है जैसाकि चित्र 7.5 में दिखाया गया है। धनात्मकतः आवेशित तार के लिए, विद्युत्-क्षेत्र की दिशा तार के अक्ष से त्रिज्यतः बहिर्मुखी होगी। यदि तार पर आवेश ऋणात्मक होता तो विद्युत्-क्षेत्र की दिशा त्रिज्यतः अंतर्मुखी, तार के अक्ष की ओर, होती। इस तरह, बेलन के पृष्ठ के वक्राकार भाग पर स्थित प्रत्येक क्षेत्रफल अवयव के लिए $\vec{\mathbf{E}}$ और $d\vec{\mathbf{S}}$ एक-दूसरे के समांतर हैं :

$$\vec{\mathbf{E}}.d\vec{\mathbf{S}} = E\,dS \tag{7.2क}$$

बेलन के दोनों वृत्ताकार सिरों पर वैद्युत अभिवाह शून्य है क्योंकि इन सिरों पर $\vec{\mathbf{E}}$ और $d\vec{\mathbf{S}}$ एक-दूसरे के लंबवत् हैं (चित्र 7.5 देखें)। अतः, गुणनफल $\vec{\mathbf{E}}.d\vec{\mathbf{S}}$ केवल बेलन की वक्राकार सतह पर परिमित होता है और गाउस नियम से हमें मिलता है :

$$\oiint_S \vec{\mathbf{E}}.d\vec{\mathbf{S}} = \oiint_S E\,dS = E\oiint_S dS \quad dS = E\,2\pi rL = \frac{Q_{encl}}{\varepsilon_0} \tag{7.2ख}$$

जहां हमने E को समाकल के बाहर निकाल लिया है क्योंकि इस गाउसीय पृष्ठ S पर वह अचर है। सभीकरण (7.2ख) में हमने इस परिणाम का भी उपयोग किया है कि त्रिज्या r और लंबाई L वाले बेलन के वक्राकार पृष्ठ का क्षेत्रफल $2\pi rL$ है। अतः, समीकरण (7.2ख) से हमें मिलता है :

$$E\,2\pi rL = \frac{Q_{encl}}{\varepsilon_0} \quad \text{या} \quad E = \frac{Q_{encl}}{2\pi\varepsilon_0\, r\,L} \tag{7.2ग}$$

एकसमान रेखा आवेश घनत्व λ के लिए, लंबाई L के बेलन द्वारा परिबद्ध आवेश है :

$$Q_{encl} = \int_0^L \lambda\, dl' = \lambda\int_0^L dl' = \lambda L, \quad \text{चूंकि } \lambda \text{ अचर है} \tag{7.2घ}$$

समीकरण (7.2घ) को समीकरण (7.2ग) में रखने पर हमें मिलता है :

$$E = \frac{Q_{encl}}{2\pi\varepsilon_0\, r\,L} = \frac{\lambda L}{2\pi\varepsilon_0\, r\,L}$$

या

$$\boxed{E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\, r}} \tag{7.3}$$

ध्यान दें कि समीकरण (7.3) में विद्युत्-क्षेत्र बेलनाकार गाउसीय पृष्ठ की लंबाई पर निर्भर नहीं करता।

विद्युत्-क्षेत्र की दिशा रेखा आवेश या आवेशित तार के लंबवत् है। यही परिणाम हमें एक लंबी गणना के बाद उदाहरण 5.7 में मिला था। अतः, आप देख सकते हैं कि आवेशों के सममित वितरण के लिए, गाउस नियम का उपयोग करने से विद्युत्-क्षेत्र की गणना काफ़ी सरल हो जाती है। लेकिन आपको ध्यान देना चाहिए कि **गाउस नियम सभी आवेश वितरणों के लिए सदैव सत्य होता है। लेकिन यह नियम सममित आवेश वितरणों के लिए बहुत अधिक उपयोगी होता है** क्योंकि इसे लागू करने से गणनाएं काफ़ी सरल हो जाती हैं।

अब आप जानना चाहेंगे : **विद्युत्-क्षेत्रों की गणना के लिए गाउस नियम लागू करना हो तो आवेश वितरणों को सममित क्यों होना चाहिए**? अगर आप याद करें कि आपने अब तक क्या सीखा है तो आप इस सवाल का जवाब दे पाएंगे। वितरण की सममिति से

गाउस नियम लागू करने में गाउसीय पृष्ठ का चुनाव बहुत महत्वपूर्ण होता है ताकि गणना सरल हो जाए। यह बात सममित आवेश वितरणों के लिए विशेष रूप से सत्य है जैसाकि आपने इकाई 6 में सीखा है। इस बात का महत्व आप इस इकाई को पढ़ते हुए बार-बार समझेंगे।

हम उन पृष्ठों को ज्ञात कर सकते हैं जिन पर विद्युत्-क्षेत्र का परिमाण अचर होता है (यानी दूरी r अचर होती है)। साथ ही, हमें किसी दी हुई सममिति के लिए विद्युत्-क्षेत्र की दिशा भी मालूम होती है। तब करना यह होता है कि हम **उस पृष्ठ को जिस पर विद्युत्-क्षेत्र का परिमाण अचर हो, गाउसीय पृष्ठ के रूप में चुनें**। साथ ही, **गाउसीय पृष्ठ के सभी बिंदुओं पर विद्युत्-क्षेत्र की दिशा, क्षेत्रफल सदिश के समांतर या लंबवत् होनी चाहिए।**

आपको ध्यान देना चाहिए कि यह बात गाउस नियम के उन सभी अनुप्रयोगों पर लागू होती है जिनके बारे में आपने अभी तक पढ़ा है जैसेकि इकाई 6 में आवेशित गोला और गोलीय कोश और इस भाग में अनंत आवेशित तार। उदाहरण के लिए, इस इकाई में आपने अनंत रेखा आवेश के लिए देखा है कि चूंकि बेलन की त्रिज्या अचर होती है, अतः, बेलनी पृष्ठ के वक्राकार भाग पर विद्युत्-क्षेत्र का परिमाण अचर होता है। विद्युत्-क्षेत्र $\vec{\mathbf{E}}$ की दिशा पृष्ठ के वक्राकार भाग के लंबवत् है, यानी वह क्षेत्रफल अवयव $d\vec{\mathbf{S}}$ की दिशा में है। चूंकि बेलन के वृत्ताकार सिरों के सभी बिंदुओं पर विद्युत्-क्षेत्र $\vec{\mathbf{E}}$ क्षेत्रफल अवयव $d\vec{\mathbf{S}}$ के लंबवत् है, अतः, इन सभी बिंदुओं पर $\vec{\mathbf{E}}.d\vec{\mathbf{S}} = 0$ है। इसके कारण विद्युत्-क्षेत्र की गणना बहुत आसान हो गई है। हां, यह गणना इसलिए भी आसान है क्योंकि रेखा आवेश घनत्व एकसमान है यानी अचर है।

मान लें कि हमने बेलनाकार पृष्ठ के बजाय किसी और आकार का गाउसीय पृष्ठ चुना होता। गाउस नियम तो तब भी लागू होता लेकिन हो सकता था कि विद्युत्-क्षेत्र $\vec{\mathbf{E}}$ क्षेत्रफल अवयव $d\vec{\mathbf{S}}$ की दिशा में नहीं होता और पृष्ठ पर उसका परिमाण अचर नहीं होता। तब हम E को समाकल के बाहर नहीं निकाल पाते। इससे गणना कठिन हो जाती। अतः, **गाउस नियम लागू करने के लिए सममिति महत्वपूर्ण है।** अब जबकि आप गोलीय और बेलनी सममिति वाले आवेश वितरणों के बारे में पढ़ चुके हैं, तो आप इस बात को बेहतर समझ पाये होंगे। इस भाग के अंत में हम आपके लिए एक बोध प्रश्न दे रहे हैं।

बोध प्रश्न 1 – रेखा आवेश पर गाउस नियम लागू करना

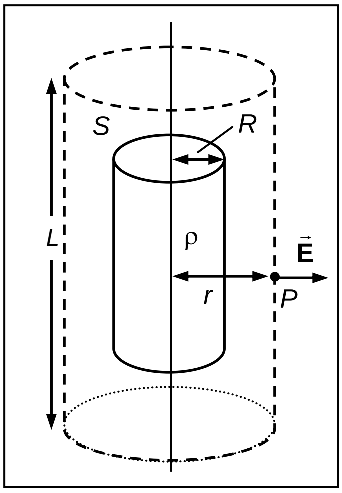
अनंत रेखा आवेश के कारण 1.0 m की दूरी पर विद्युत्-क्षेत्र का परिमाण 9.0×10^3 NC^{-1} है। रैखिक आवेश घनत्व की गणना करें।

आइए, अब हम तार की सममिति के लिए की गई चर्चा को एक आवेशित बेलन पर लागू करें, और एक अनंत एकसमानतः आवेशित बेलन का विद्युत्-क्षेत्र उसके बाहर और भीतर स्थित बिंदुओं पर ज्ञात करें। बेलनाकार आवेश वितरण के विद्युत्-क्षेत्रों की इन गणनाओं का उपयोग हम बेलनाकार संधारित्रों की धारिता ज्ञात करने के लिए करते हैं।

7.2.3 एकसमानतः आवेशित अनंत बेलन

आइए, त्रिज्या R और अनंत लंबाई वाले ठोस आवेशित बेलन पर गाउस नियम लागू करें जिस पर आयतन आवेश घनत्व ρ है। पहले हम इस आवेश वितरण के कारण बेलन के बाहर स्थित बिंदु पर विद्युत्-क्षेत्र ज्ञात करेंगे। हम एकसमानतः आवेशित अनंत बेलन का उसके अक्ष से दूरी r पर उसके बाहर स्थित बिंदु P पर विद्युत्-क्षेत्र ज्ञात करने के लिए गाउस नियम का उपयोग करेंगे।

चित्र 7.6 को ध्यान से समझें। इसमें हमने ठोस रेखा द्वारा अनंत बेलन का एक भाग दिखाया है। आप जांच सकते हैं कि यह आवेश वितरण बेलनी सममिति रखता है। बेलन के बाहर एक बिंदु P के लिए हम त्रिज्या r और लंबाई L का एक बेलनाकार गाउसीय पृष्ठ खींचते हैं जिस पर बिंदु P स्थित है। याद करें कि हमने अनंत लंबाई वाले तार के लिए भी चित्र 7.5 में ऐसा ही पृष्ठ खींचा था। अब हम उन्हीं चरणों और तर्क के अनुसार, जो हमने भाग 7.2.1 में दिए हैं, चलेंगे और $r \geq R$ के लिए एकसमानतः आवेशित अनंत बेलन के कारण विद्युत्-क्षेत्र ज्ञात करेंगे।



चित्र 7.6: एकसमानतः आवेशित अनंत बेलन के बाहर स्थित बिंदु P पर विद्युत्-क्षेत्र। बेलनाकार गाउसीय पृष्ठ की लंबाई L है और त्रिज्या $r > R$ है।

एक बार फिर हम गौर करते हैं कि बेलनी गाउसीय पृष्ठ के लिए, विद्युत्-क्षेत्र की दिशा पृष्ठ के वक्राकार भाग के सभी बिंदुओं पर उसके लंबवत् है। साथ ही, धनात्मक आवेश वाले बेलन के लिए विद्युत्-क्षेत्र की दिशा उसके अक्ष से त्रिज्यतः बहिर्मुखी है। अतः, गाउसीय पृष्ठ के वक्राकार भाग के प्रत्येक क्षेत्रफल अवयव के लिए $\vec{\mathbf{E}}$ और $d\vec{\mathbf{S}}$ एक-दूसरे के समांतर हैं और $\vec{\mathbf{E}}.d\vec{\mathbf{S}} = E\,dS$। जैसाकि आप भाग 7.2.2 में पढ़ चुके हैं, यहां आप देख सकते हैं कि बेलनाकार गाउसीय पृष्ठ के दोनों वृत्ताकार सिरों से होकर जाने वाला वैद्युत अभिवाह शून्य है क्योंकि इन सिरों के सभी बिंदुओं पर $\vec{\mathbf{E}}$ और $d\vec{\mathbf{S}}$ एक-दूसरे के लंबवत् हैं। अतः, गाउस नियम से हमें मिलता है :

$$\oint\!\!\oint_S \vec{\mathbf{E}}.d\vec{\mathbf{S}} = \oint\!\!\oint_S E\,dS = E\oint\!\!\oint_S dS \quad dS = E\,2\pi rL = \frac{Q_{encl}}{\varepsilon_0} \qquad (7.4\text{क})$$

यहां चूंकि E गाउसीय सतह S के सभी बिंदुओं पर समान है, हमने उसे सतह के लिए अचर मानकर समाकल से बाहर ले लिया है। समीकरण (7.4क) में हमने इस परिणाम का उपयोग भी किया है कि त्रिज्या r और लंबाई L वाले बेलन के पृष्ठ के वक्राकार भाग का क्षेत्रफल $2\pi rL$ है। अतः, समीकरण (7.4क) से हमें मिलता है :

$$E = \frac{Q_{encl}}{2\pi\varepsilon_0 r L} \quad r \geq R \text{ के लिए} \qquad (7.4\text{ख})$$

अब हमें समीकरण (7.4ख) में Q_{encl} का मान ज्ञात करना है, जो बेलनाकार गाउसीय सतह द्वारा परिबद्ध कुल आवेश है जबकि ρ अचर है। यह लंबाई L और त्रिज्या R वाले बेलन पर स्थित आवेश ही है (क्योंकि त्रिज्या R से अधिक दूरी पर अनंत बेलन का आवेश वितरण शून्य है)।

यह आवेश निम्नलिखित आयतन समाकल द्वारा परिभाषित होता है :

$$Q_{encl} = \iiint_V \rho\,dV \qquad (7.5\text{क})$$

चूंकि ρ एकसमान (यानी अचर) है, अतः, हम इसे समाकल से बाहर निकाल सकते हैं :

$$Q_{encl} = \rho\iiint_V dV = \rho\pi R^2 L \qquad (7.5\text{ख})$$

जहां आयतन समाकल लंबाई L और त्रिज्या R वाले बेलन के आयतन के बराबर है। अतः,

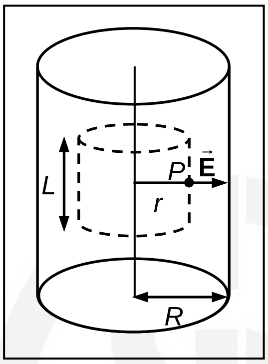
$$E = \frac{\rho\pi R^2 L}{2\pi\varepsilon_0 r L} \quad r \geq R \text{ के लिए} \qquad (7.5\text{ग})$$

या
$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r}\hat{\mathbf{r}} \qquad r \geq R \text{ के लिए} \tag{7.6}$$

जहां $\hat{\mathbf{r}}$ एकक सदिश है जिसकी दिशा बेलन के अक्ष से त्रिज्यतः बहिर्मुखी है। समीकरण (7.6) से ध्यान दें कि बेलनी आवेश वितरण का उसके बाहर स्थित बिंदुओं पर विद्युत्-क्षेत्र, उसके अक्ष से दूरी बढ़ने पर घटता है। अब हम पूछते हैं : **एक अनंत एकसमानतः आवेशित बेलन के भीतर स्थित बिंदु पर विद्युत्-क्षेत्र का मान क्या होगा**? इस सवाल का जवाब आपको उदाहरण 7.1 में मिलेगा।

उदाहरण 7.1 : बेलन के भीतर स्थित बिंदु पर विद्युत्-क्षेत्र

त्रिज्या R वाले एकसमानतः आवेशित अनंत बेलन का धनात्मक आयतन आवेश घनत्व ρ है। बेलन के भीतर स्थित बिंदु पर विद्युत्-क्षेत्र ज्ञात करें।



चित्र 7.7: एक अनंत एकसमानतः आवेशित बेलन के भीतर विद्युत्-क्षेत्र। गाउसीय पृष्ठ लंबाई L और त्रिज्या $r < R$ वाला एक बेलनाकार पृष्ठ है।

हल ■ हम बेलन के भीतर उसके अक्ष से दूरी r पर स्थित बिंदु पर विद्युत्-क्षेत्र ज्ञात करने के लिए गाउस नियम का उपयोग करते हैं।

चूंकि आवेश वितरण में बेलनी सममिति है, हम त्रिज्या r और लंबाई L वाला बेलनाकार गाउसीय पृष्ठ खींचते हैं जिस पर बिंदु P स्थित है (चित्र 7.7)। बेलन के भीतर किसी भी बिंदु के लिए $r < R$ होगा और गाउसीय पृष्ठ बेलन के अंदर होगा। बेलनी आवेश वितरण की सममिति के बारे में आपने भाग 7.2.1 में जो पढ़ा है, उससे आप जानते हैं कि वैद्युत अभिवाह में केवल गाउसीय बेलन के वक्राकार पृष्ठ से योगदान होगा, उसके दोनों वृत्ताकार सिरों से नहीं। अतः, गाउस नियम से हमें मिलता है :

$$\oiint_S \vec{\mathbf{E}}.d\vec{\mathbf{S}} = E\,2\pi r L = \frac{Q_{encl}}{\varepsilon_0} \qquad r < R \text{ के लिए} \tag{i}$$

इस गाउसीय पृष्ठ द्वारा परिबद्ध आवेश है :

$$Q_{encl} = \rho \iiint_V dV$$

जहां आयतन समाकल लंबाई L और त्रिज्या r वाले बेलन के आयतन के बराबर है।

अतः, $$Q_{encl} = \rho\pi r^2 L$$

और समीकरण (i) से $$E\,2\pi r L = \frac{Q_{encl}}{\varepsilon_0} = \frac{\rho\pi r^2 L}{\varepsilon_0}$$

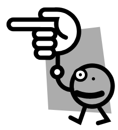
$$\therefore \qquad E = \frac{\rho r}{2\varepsilon_0} \qquad r < R \text{ के लिए}$$

और
$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{\rho r}{2\varepsilon_0}\hat{\mathbf{r}} \qquad r < R \text{ के लिए} \tag{7.7}$$

जहां $\hat{\mathbf{r}}$ बेलन के अक्ष से त्रिज्यतः बहिर्मुखी दिशा में एकक सदिश है। अतः, बेलनी आवेश वितरण के भीतर, अक्ष से दूरी बढ़ने के साथ-साथ विद्युत्-क्षेत्र रैखिकतः बढ़ता है।

एक अनंत एकसमानतः आवेशित बेलन के लिए निम्नलिखित बातें हमेशा याद रखें :

- **एक अनंत एकसमानतः आवेशित बेलन का विद्युत्-क्षेत्र उसके बाहर स्थित बिंदुओं पर उसके अक्ष से बिंदुओं की दूरी बढ़ने के साथ घटता है।**
- **एक अनंत एकसमानतः आवेशित बेलन का विद्युत्-क्षेत्र उसके भीतर स्थित बिंदुओं पर अक्ष से बिंदुओं की दूरी बढ़ने के साथ रैखिकतः बढ़ता है।**


कभी न भूलें

अगले भाग में हम समतलीय सममिति वाले आवेश वितरण पर गाउस नियम लागू करेंगे। इस तरह के आवेश वितरण के उदाहरण हैं, एकसमान आवेश वाली द्विविम शीट, पतली आवेशित प्लेट या एकसमानतः आवेशित स्लैब और साथ ही इनके संयोजन जैसेकि समांतर प्लेट संधारित्र। लेकिन आगे पढ़ने से पहले, आप इस भाग को दोहराने के लिए एक बोध प्रश्न करें।

बोध प्रश्न 2 – ठोस बेलनी आवेश पर गाउस नियम लागू करना

त्रिज्या 0.60 m वाले एक लंबे अचालक ठोस बेलन पर एकसमान आयतन आवेश घनत्व $+4.8\,\mu\text{C}\,\text{m}^{-3}$ वाला धनात्मक आवेश मौजूद है। बेलन के अक्ष से (क) 0.40 m और (ख) 1.0 m की दूरी पर विद्युत्-क्षेत्रों के परिमाण ज्ञात करें।

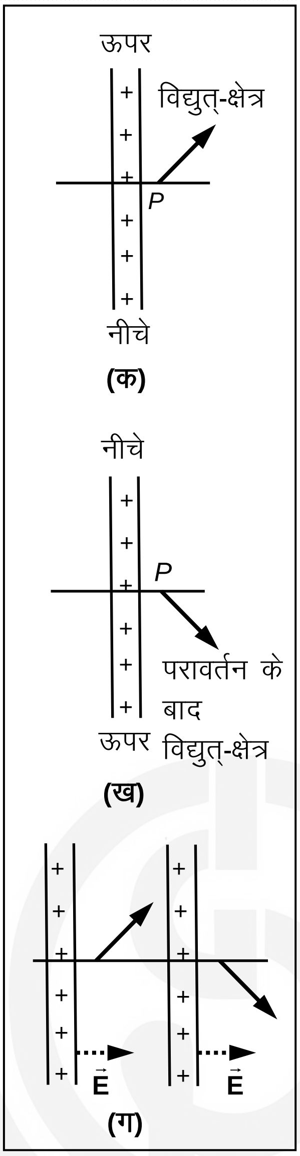
7.3 अनंत एकसमानतः आवेशित समतल शीट के कारण विद्युत्-क्षेत्र

इस भाग में, हम अचर पृष्ठ आवेश घनत्व σ वाली एक अनंत एकसमानतः आवेशित समतल शीट पर गाउस नियम लागू करेंगे। अचालक आवेशित शीट का उदाहरण है एक तरफ से आवेशित विशाल प्लास्टिक की शीट। एल्यूमिनियम की पतली पन्नी एक चालक समतल शीट का उदाहरण है। **एक अनंत शीट (समतलीय आवेश वितरण) में किस तरह की सममिति होती है?**

वह वैसी ही दिखती है या अपरिवर्तित रहती है जब उसे

- उसके समांतर स्थानांतरित किया जाता है,
- उसके तल के लंबवत् किसी भी अक्ष के प्रति घूर्णित किया जाता है, और
- उसके तल में स्थित किसी अक्ष या तल के लंबवत् किसी अक्ष के प्रति परावर्तित किया जाता है।

इस सममिति का परिणाम यह है कि किसी भी आवेशित शीट के कारण विद्युत्-क्षेत्र सभी बिंदुओं पर शीट के तल के लंबवत् होता है। इसकी दिशा धनात्मक आवेश के लिए बहिर्मुखी (शीट से परे) और ऋणात्मक आवेश के लिए अंतर्मुखी (शीट की ओर) होती है। आप जानना चाहेंगे : **विद्युत्-क्षेत्र सभी बिंदुओं पर शीट के लंबवत् क्यों होता है**? इस सवाल का जवाब देने के लिए हम उसी तर्क की मदद लेंगे जो हमने अभी तक के सभी सममित आवेश वितरणों के लिए दिया है।



चित्र 7.8: क) और ख) यदि आवेशित शीट के कारण किसी बिंदु पर विद्युत्-क्षेत्र की दिशा शीट के सभी बिंदुओं के लिए उसके तल के लंबवत् नहीं हो तो परावर्तन के बाद एक ही आवेश वितरण के लिए एक ही बिंदु पर विद्युत्-क्षेत्र के अलग-अलग मान होंगे, जो एक विरोधाभास है; ग) यह विरोधाभास नहीं होगा यदि किसी भी बिंदु पर आवेशित शीट के कारण विद्युत्-क्षेत्र की दिशा शीट के सभी बिंदुओं के लिए (बिंदुदार तीर की तरह) शीट के तल के लंबवत् हो।

चित्र 7.8क पर ध्यान दें जिसमें हमने अनंत आवेशित शीट के एक छोटे से भाग का पार्श्व दृश्य दिखाया है। मान लें कि किसी बिंदु P पर शीट का विद्युत्-क्षेत्र किसी अन्य दिशा में है जैसाकि चित्र 7.8क में दिखाया गया है। ध्यान दें कि हमने स्वेच्छतः अनंत शीट के इस भाग के एक सिरे को 'ऊपर' और दूसरे को 'नीचे' लिखा है। ऐसा हमने सिर्फ यह दिखाने के लिए किया है कि शीट को परावर्तित करने पर क्या होता है।

आइए, अब हम इस आवेशित शीट को शीट के तल के लंबवत् एक क्षैतिज रेखा के, जो बिंदु P से गुज़रती है, परितः परावर्तित करें। तो अब शीट का 'ऊपर', 'नीचे' है और 'नीचे' 'ऊपर' है (चित्र 7.8ख)। शीट के परावर्तन के बाद विद्युत्-क्षेत्र की दिशा क्या है? परावर्तन के बाद P पर विद्युत्-क्षेत्र की दिशा चित्र 7.8ख में दिखाई गई दिशा में है क्योंकि विद्युत्-क्षेत्र भी इसी तरह परावर्तित होता है।

लेकिन आप चित्र 7.8ग की तरह चित्रों 7.8क और ख को एक साथ रखकर उनकी तुलना करें। आप क्या पाते हैं? आप देख सकते हैं कि परावर्तन के बाद आवेश वितरण ज्यों का त्यों रहता है। पहले की तरह हमने अपनी सुविधा के लिए शीट के सिरों को 'ऊपर' और 'नीचे' कहा है वरना हम शीट की दोनों स्थितियों में कोई अंतर नहीं कर सकते। इस स्थिति में, हमें एक बार फिर यह परिणाम मिलता है कि परावर्तन के पहले और बाद एक ही बिंदु पर विद्युत्-क्षेत्र के मान अलग-अलग हैं। यह एक विरोधाभास है। भला, **एक ही आवेश वितरण के लिए एक ही बिंदु पर विद्युत्-क्षेत्र के मान अलग-अलग कैसे हो सकते हैं**? **यदि आवेश वितरण वही रहता है तो बिंदु P पर विद्युत्-क्षेत्र भिन्न नहीं हो सकता; उसका एक ही मान होना चाहिए**। चूंकि ऐसा नहीं है, अतः, चित्र 7.8क में विद्युत्-क्षेत्र की दिशा ग़लत है।

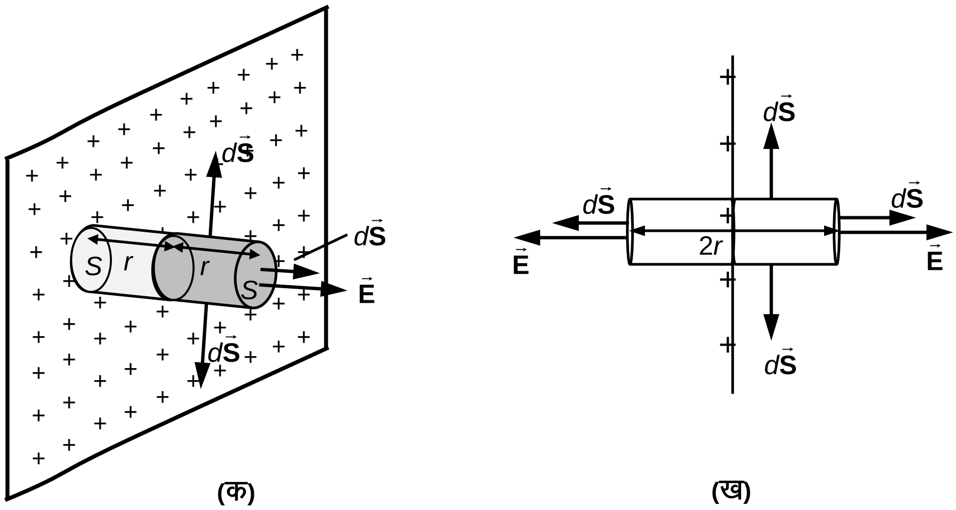
तो फिर हम पूछते हैं : **विद्युत्-क्षेत्र की वह कौन-सी दिशा है जिससे यह विरोधाभास नहीं होता**?

चित्र 7.8ग से आप देख सकते हैं कि परावर्तन के अधीन विद्युत्-क्षेत्र का मान तभी अपरिवर्तित रह सकता है जब उसकी दिशा शीट के तल के लंबवत् हो। चित्र 7.8ग में वह बिंदुदार तीरों से दिखाई गई है। आप यह जांच सकते हैं कि शीट की सभी सममिति संक्रियाओं के लिए विद्युत्-क्षेत्र की यही दिशा रहेगी। इस तरह, हम इस नतीजे पर पहुंचते हैं कि आवेशित शीट की सममिति के कारण विद्युत्-क्षेत्र की दिशा उसके तल के लंबवत् ही हो सकती है।

आइए, अब हम दूरी r पर एक अनंत एकसमानतः आवेशित शीट के कारण विद्युत्-क्षेत्र ज्ञात करें। माना कि उसका पृष्ठ आवेश घनत्व σ है। यहां हम यह मानते हैं कि शीट की मोटाई r से बहुत कम है। अब गाउस नियम को अर्थपूर्ण तरीके से इस्तेमाल करने के लिए हमें एक ऐसी गाउसीय सतह चुननी चाहिए जिससे हम इस बात का लाभ उठा सकें कि विद्युत्-क्षेत्र आवेशित शीट के लंबवत् है। **वह गाउसीय सतह कौन-सी है**? हम शीट के लंबवत् बंद बेलनी गाउसीय पृष्ठ चुनते हैं जिसका प्रत्येक सिरा शीट से बराबर दूरी (r) पर स्थित है। अतः, बेलनी गाउसीय पृष्ठ की लंबाई $2r$ है (चित्र 7.9क देखें)। ऐसे गाउसीय बेलनी पृष्ठ को **गाउसीय पिल बाक्स** (pillbox) कहते हैं।

चित्र 7.9ख में हमने शीट और पिल बॉक्स का पार्श्व दृश्य दिखाया है। मान लें कि गाउसीय पिल बाक्स के परिच्छेद का (यानी उसके सिरों का) क्षेत्रफल S है। चूंकि आवेश धनात्मक है, विद्युत्-क्षेत्र की दिशा शीट के लंबवत् बहिर्मुखी (शीट से परे) होती

है। इसका अर्थ है कि बेलनी सतह के वक्राकार भाग के सभी बिंदुओं पर विद्युत्-क्षेत्र सदिश, क्षेत्रफल सदिश के लंबवत् है (चित्र 7.9ख देखें)।



चित्र 7.9: क) धनात्मक आवेश वाली शीट और गाउसीय पिल बाक्स जिसके सिरों पर विद्युत्-क्षेत्र $\vec{\mathbf{E}}$ क्षेत्रफल सदिश $d\vec{\mathbf{S}}$ के समांतर है और जिसके वक्राकार भाग में वे एक-दूसरे के लंबवत् हैं; ख) शीट का पार्श्व दृश्य जिसमें पिल बाक्स के लिए विद्युत्-क्षेत्र सदिशों और क्षेत्रफल सदिशों को दिखाया गया है।

चूंकि आवेश धनात्मक है, विद्युत्-क्षेत्र की दिशा शीट के लंबवत् बहिर्मुखी (शीट से परे) होती है। इसका अर्थ है कि बेलनी सतह के वक्राकार भाग के सभी बिंदुओं पर विद्युत्-क्षेत्र सदिश, क्षेत्रफल सदिश के लंबवत् है (चित्र 7.9ख देखें)। अतः,

$$\vec{\mathbf{E}}.d\vec{\mathbf{S}} = 0 \quad \text{बेलनी सतह के वक्राकार भाग के सभी बिंदुओं पर}$$

गाउसीय पिल बाक्स के दोनों सिरों पर विद्युत्-क्षेत्र सदिशों की दिशा बहिर्मुखी है यानी सिरों पर वे क्षेत्रफल सदिशों के समांतर हैं। अतः, वैद्युत अभिवाह में केवल गाउसीय पिल बाक्स के सिरों का योगदान होगा और

$$\vec{\mathbf{E}}.d\vec{\mathbf{S}} = E\,dS \quad \text{बेलनी सतह के एक सिरे पर स्थित सब बिंदुओं के लिए}$$

चूंकि गाउसीय पिल बाक्स के दो सिरे हैं, हमें गाउस नियम लागू करते हुए दोनों सिरों के पृष्ठ लेने पड़ेंगे। हम पृष्ठ समाकल को तीन भागों में बांटते हैं जो पृष्ठ के दोनों सिरों और वक्राकार भाग के संगत हैं। तब गाउस नियम से

$$\oiint_S \vec{\mathbf{E}}.d\vec{\mathbf{S}} = \iint_{\text{वक्राकार भाग}} \vec{\mathbf{E}}.d\vec{\mathbf{S}} + \iint_{\text{दोनों सिरे}} \vec{\mathbf{E}}.d\vec{\mathbf{S}} = 0 + ES + ES = \frac{Q_{encl}}{\varepsilon_0} \qquad (7.8\text{क})$$

या
$$E = \frac{Q_{encl}}{2\varepsilon_0 S} \qquad (7.8\text{ख})$$

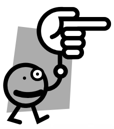
अब हमें गाउसीय बेलन द्वारा परिबद्ध आवेश को एकसमान पृष्ठ आवेश घनत्व σ के पदों में व्यक्त करना है। यह वह आवेश है जो बेलन के एक सिरे के बराबर क्षेत्रफल यानी शीट के क्षेत्रफल S वाले क्षेत्र द्वारा परिबद्ध है। चूंकि σ एकसमान है (यानी अचर है), वह किसी भी दी हुई सतह के आवेश और सतह के क्षेत्रफल के अनुपात के बराबर है। अतः, क्षेत्रफल S द्वारा परिबद्ध आवेश के लिए इसका मान है :

$$\sigma = \frac{Q_{encl}}{S} \quad \Rightarrow \quad Q_{encl} = \sigma S \tag{7.9}$$

समीकरण (7.9) से Q_{encl} का मान समीकरण (7.8ख) में रखने पर हमें मिलता है :

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \tag{7.10}$$

जहां विद्युत्-क्षेत्र की दिशा शीट के लंबवत् है। समीकरण (7.10) दोनों ही तरह की शीटों (अचालक और चालक) पर लागू होता है बशर्ते शीट पर आवेश की परत अत्यंत पतली हो (या उसकी मोटाई उस दूरी की तुलना में अत्यल्प हो जिस पर विद्युत्-क्षेत्र की गणना की जा रही है)। यह आवेशों की अत्यंत विशाल शीटों के लिए उन बिंदुओं पर भी लागू होता है जो शीट के किनारों से बहुत अधिक दूरी पर हों और ये दूरियां शीट की मोटाई या शीट पर आवेश की परत की मोटाई की तुलना में बहुत अधिक हों। समीकरण (7.10) हमें बताता है कि



कभी न भूलें

एक अनंत (या विशाल) एकसमानतः आवेशित शीट के कारण विद्युत्-क्षेत्र का परिमाण उसके बाहर स्थित सभी बिंदुओं पर समान होता है और दिशा शीट के लंबवत् होती है।

आइए, अब हम एक उदाहरण में गाउस नियम को दो अनंत (या विशाल) आवेशित शीटों पर लागू करें।

उदाहरण 7.2 : दो अनंत आवेशित शीटें

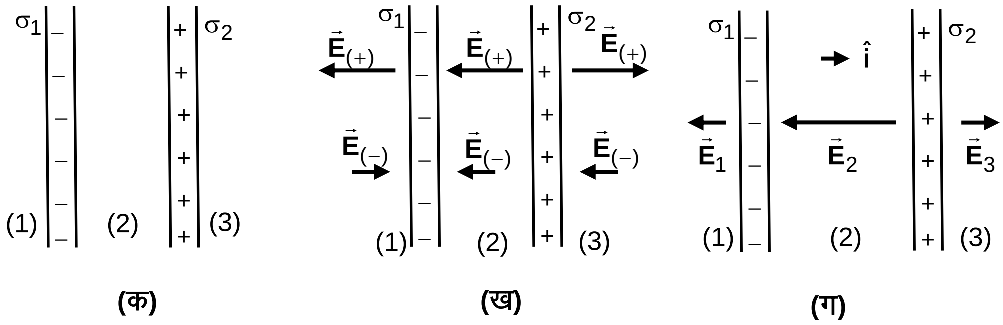
दो पतली अनंत अचालक आवेशित शीटें एक-दूसरे के समांतर रखी हैं जैसाकि चित्र 7.10क में दिखाया गया है। बायीं ओर रखी ऋणात्मक आवेश वाली शीट का पृष्ठ आवेश घनत्व σ_1 है और दायीं ओर रखी धनात्मक आवेश वाली शीट का पृष्ठ आवेश घनत्व σ_2 है। (1) शीटों के बायीं ओर, (2) शीटों के बीच, और (3) शीटों के दायीं ओर के प्रदेशों में नेट विद्युत्-क्षेत्र ज्ञात करें।

हल ■ हम दोनों शीटों पर गाउस नियम लागू करते हैं और अनंत एकसमानतः आवेशित शीट के लिए प्राप्त परिणाम का उपयोग करते हैं। हम इस तथ्य का भी उपयोग करते हैं कि आवेश स्थिर हैं और प्रत्येक शीट के कारण विद्युत्-क्षेत्र इस तरह ज्ञात करते हैं मानो वह विलगित हो। फिर हम नेट विद्युत्-क्षेत्र ज्ञात करने के लिए अध्यारोपण का सिद्धांत लागू करते हैं।

याद करें कि समीकरण (7.10) से, किसी बिंदु पर विद्युत्-क्षेत्र का परिमाण शीट से बिंदु की दूरी पर निर्भर नहीं करता। वह केवल पृष्ठ आवेश घनत्व पर निर्भर करता है। विद्युत्-क्षेत्रों की दिशाएं शीट पर आवेश के चिन्ह पर निर्भर करती हैं।

ऋणात्मक और धनात्मक आवेशों वाली शीटों के कारण, जिन पर पृष्ठ आवेश घनत्व क्रमशः σ_1 और σ_2 हैं, विद्युत्-क्षेत्रों के परिमाण हैं :

$$E_- = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} \quad \text{और} \quad E_+ = \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}$$



चित्र 7.10: उदाहरण 7.2 के लिए चित्र।

चित्र 7.10ख में तीनों प्रदेशों में विद्युत्-क्षेत्रों की दिशाएं दिखाई गई हैं। ध्यान दें कि प्रत्येक प्रदेश में धनात्मकतः आवेशित शीट के कारण विद्युत्-क्षेत्र की दिशा उसके बहिर्मुखी है। ऋणात्मकतः आवेशित शीट के कारण विद्युत्-क्षेत्र की दिशा उसके अंतर्मुखी है। मान लें कि शीटों के दायीं ओर की दिशा में एकक सदिश $\hat{\mathbf{i}}$ है (चित्र 7.10ग)। तब प्रत्येक प्रदेश में परिणामी विद्युत्-क्षेत्र है :

क) प्रदेश (1) : $\vec{\mathbf{E}}_1 = \vec{\mathbf{E}}_+ + \vec{\mathbf{E}}_- = (E_+)(-\hat{\mathbf{i}}) + (E_-)\hat{\mathbf{i}} = \dfrac{1}{2\varepsilon_0}(\sigma_1 - \sigma_2)\hat{\mathbf{i}}$

ख) प्रदेश (2) : $\vec{\mathbf{E}}_2 = \vec{\mathbf{E}}_+ + \vec{\mathbf{E}}_- = (E_+ + E_-)(-\hat{\mathbf{i}}) = -\dfrac{1}{2\varepsilon_0}(\sigma_1 + \sigma_2)\hat{\mathbf{i}}$

ग) प्रदेश (3) : $\vec{\mathbf{E}}_3 = \vec{\mathbf{E}}_+ + \vec{\mathbf{E}}_- = (E_+)\hat{\mathbf{i}} + (E_-)(-\hat{\mathbf{i}}) = \dfrac{1}{2\varepsilon_0}(\sigma_2 - \sigma_1)\hat{\mathbf{i}}$

आप इन गणनाओं का महत्व तब समझेंगे जब अगले खंड में समांतर प्लेट संधारित्र के विद्युत्-क्षेत्र की गणना करेंगे और जानेंगे कि संधारित्र हमारे जीवन में कितने उपयोगी हैं। अब आप एक बोध प्रश्न करें।

बोध प्रश्न 3 – एकसमानतः आवेशित पतली शीटें

मान लें कि उदाहरण 7.2 में ऋणात्मकतः आवेशित शीट का पृष्ठ आवेश घनत्व $\sigma_1 = 9.0 \times 10^{-9}\,\text{Cm}^{-2}$ है और धनात्मकतः आवेशित शीट का पृष्ठ आवेश घनत्व $\sigma_2 = 6.0 \times 10^{-9}\,\text{Cm}^{-2}$ है। तीनों प्रदेशों में विद्युत्-क्षेत्रों के परिमाण और दिशाएं ज्ञात करें। यदि दोनों शीटों की अदला-बदली कर दी जाए तो तीनों प्रदेशों में नेट विद्युत्-क्षेत्र क्या होगा?

इकाई 6 और अब तक इकाई 7 पढ़ते हुए आपको यह समझ आया होगा कि गाउस नियम के अनुप्रयोगों में आवेश वितरण की सममिति की महत्वपूर्ण भूमिका है। जैसाकि आपने सीखा है, गाउस नियम के पृष्ठ समाकल की गणना सममित आवेश वितरणों के लिए काफ़ी आसान हो जाती है। आपने तीन प्रकार की सममितियों के बारे में पढ़ा है जिनके लिए गाउस नियम का अनुप्रयोग विशेषतः उपयोगी है। ये हैं :

गोलीय सममिति, **बेलनी सममिति** और **समतलीय सममिति**।

आइए, हम इनमें से प्रत्येक सममिति के लिए गाउस नियम लागू करने की विधि दोहराएं।

दोहराएं

गाउस नियम के अनुप्रयोग

1. **गोलीय सममिति वाले आवेश वितरण** के लिए **आपको वितरण से संकेन्द्री गाउसीय गोला खींचना चाहिए**। इसका अर्थ है कि गाउसीय गोले का केंद्र बिंदु आवेश पर या आवेशित गोले/गोलीय कोश के केंद्र पर होना चाहिए। साथ ही, वह बिंदु जिस पर विद्युत्-क्षेत्र ज्ञात करना है, गाउसीय गोले की सतह पर होना चाहिए। तब, विद्युत्-क्षेत्र गाउसीय गोलाकार पृष्ठ के लंबवत् होता है, जिससे $\vec{\mathbf{E}} \| d\vec{\mathbf{S}}$, $\vec{\mathbf{E}}.d\vec{\mathbf{S}} = E\,dS$ और पृष्ठ पर E अचर होता है।

2. **बेलनी सममिति वाले आवेश वितरण** के लिए **आपको वितरण के समाक्ष बेलनी गाउसीय पृष्ठ खींचना चाहिए**। इसका अर्थ है कि गाउसीय बेलनी पृष्ठ का अक्ष वही होना चाहिए जो आवेश वितरण (आवेशित तार या आवेशित बेलन) का है। साथ ही, वह बिंदु जिस पर विद्युत्-क्षेत्र ज्ञात करना है, गाउसीय पृष्ठ पर स्थित होना चाहिए। तब विद्युत्-क्षेत्र, गाउसीय बेलनाकार पृष्ठ के वक्राकार भाग के लंबवत् होता है ($\vec{\mathbf{E}} \| d\vec{\mathbf{S}}$ जिससे कि $\vec{\mathbf{E}}.d\vec{\mathbf{S}} = E\,dS$) और उसके चपटे सिरों के समांतर होता है ($\vec{\mathbf{E}} \perp d\vec{\mathbf{S}}$ जिससे कि $\vec{\mathbf{E}}.d\vec{\mathbf{S}} = 0$)। साथ ही, गाउसीय पृष्ठ पर E अचर होता है।

3. **समतलीय आवेश वितरण** के लिए, **आपको एक गाउसीय पिल बाक्स खींचना है जिसका अक्ष आवेश वितरण के तल के लंबवत् हो**। तब विद्युत्-क्षेत्र गाउसीय बेलन के वक्राकार भाग के लंबवत् होता है ($\vec{\mathbf{E}} \perp d\vec{\mathbf{S}}$ जिससे कि $\vec{\mathbf{E}}.d\vec{\mathbf{S}} = 0$)। और पिल बाक्स के चपटे सिरों के समांतर होता है ($\vec{\mathbf{E}} \| d\vec{\mathbf{S}}$ जिससे कि $\vec{\mathbf{E}}.d\vec{\mathbf{S}} = E\,dS$)। साथ ही, गाउसीय पृष्ठ पर E अचर होता है।

अभी तक, हमने अचालक आवेश वितरणों पर गाउस नियम को लागू किया है। क्या आवेशित चालकों के लिए यह नियम हमें भिन्न परिणाम देता है? अब हम गाउस नियम को विलगित (isolated) आवेशित चालकों पर लागू करेंगे। गाउस नियम का यह अनुप्रयोग हमारे दैनिक जीवन में काफ़ी महत्वपूर्ण है। विशेषकर उन परिस्थितियों में जब हम तूफानों में फंस जाते हैं जहां बिजली कड़क रही होती है। इससे आप यह समझ पाएंगे कि जब आप किसी वाहन में चल रहे होते हैं और ऐसे तूफानों में फंस जाते हैं जिनमें बिजली के गिरने की काफ़ी संभावना होती है, तो आपको क्या करना चाहिए।

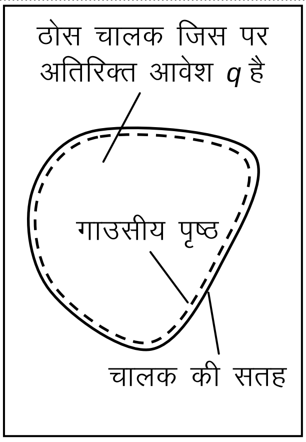
7.4 आवेशित विलगित चालक

हम गाउस नियम का उपयोग कर आवेशित विलगित चालकों के निम्नलिखित गुणधर्म को सत्यापित कर सकते हैं :

''यदि किसी चालक पर असंतुलित, स्थैतिक अतिरिक्त आवेश होते हैं, तो वे चालक के पृष्ठ पर ही स्थित होते हैं। अतिरिक्त आवेश चालक के पृष्ठ की ओर चले जाते हैं। जब आवेश रुक जाते हैं तो कोई भी आवेश चालक के भीतर नहीं रह जाता।''

आइए, गाउस नियम को लागू करके समझें कि यह कैसे संभव है। आइए, धातु के बने ठोस विद्युत्रोधी (insulated) गोले पर विचार करें जिस पर अतिरिक्त आवेश q है जैसाकि चित्र 7.11 में दिखाया गया है। हम गाउसीय पृष्ठ को चालक की वास्तविक

सतह के ठीक अंदर खींचते हैं। हमने चित्र 7.11 में डैशदार वक्र द्वारा गाउसीय पृष्ठ को दिखाया है।



चित्र 7.11: विलगित आवेशित ठोस धात्विक चालक जिस पर अतिरिक्त आवेश q है और चालक की सतह के ठीक अंदर गाउसीय पृष्ठ।

अतिरिक्त आवेशों की गति रुकने के बाद आवेशित चालक के अंदर विद्युत्-क्षेत्र शून्य होना चाहिए।

ऐसा क्यों है?

हम बिना किसी औपचारिक गणना के यह समझ सकते हैं कि ऐसा क्यों है। मान लें कि यह सत्य नहीं होता और चालक के अंदर विद्युत्-क्षेत्र मौजूद होता। तब विद्युत्-क्षेत्र के कारण आवेशों पर, जो उसमें हमेशा मौजूद रहते हैं और मुक्त रूप से घूम सकते हैं (जैसेकि इस स्थिति में इलेक्ट्रॉन), बल आरोपित होता।

इस तरह, चालक में आंतरिक धाराएं स्थापित हो जातीं और वे उसमें हमेशा बनी रहतीं क्योंकि इस बल के अधीन आवेश एक बिंदु से दूसरे बिंदु तक गति करते रहते। लेकिन किसी भी विलगित आवेशित चालक में ऐसी कोई निरंतर धाराएं नहीं देखी गई हैं। अतः, इससे केवल यह निष्कर्ष निकलता है कि एक विलगित आवेशित चालक में आंतरिक विद्युत्-क्षेत्र शून्य होता है। उसका आंतरिक भाग सदैव विद्युत्-क्षेत्रों से मुक्त रहता है।

जब तक चालक को आवेशित किया जा रहा होता है, तब तक उसमें आंतरिक विद्युत्-क्षेत्र मौजूद होता है। लेकिन जब उसे आवेशित करना रोक दिया जाता है और यदि चालक विलगित होता है, तो अतिरिक्त आवेश इस तरह वितरित हो जाता है कि **चालक के भीतर सभी बिंदुओं पर नेट विद्युत्-क्षेत्र शून्य होता है**।

अब चूंकि चालक के भीतर विद्युत्-क्षेत्र शून्य है, अतः, गाउसीय पृष्ठ के सभी बिंदुओं पर भी वह शून्य होगा क्योंकि वह पृष्ठ चालक के **भीतर** है, भले ही वह चालक की सतह के निकट है। इसका अर्थ है कि गाउसीय पृष्ठ से होकर जाने वाला वैद्युत अभिवाह भी शून्य है। तब गाउस नियम से गाउसीय पृष्ठ द्वारा परिबद्ध नेट आवेश भी शून्य होगा।

अतः, यदि अतिरिक्त आवेश गाउसीय पृष्ठ के भीतर नहीं है, तो वह उसके बाहर होगा। इसका अर्थ है कि वह विलगित चालक की वास्तविक सतह पर होगा। अतः, सदैव याद रखें कि

एक चालक के भीतर सर्वत्र नेट विद्युत्-क्षेत्र शून्य होता है। यदि एक विलगित चालक पर नेट आवेश हो भी तो वह केवल चालक की पृष्ठ पर ही वितरित होता है, उसके भीतर नहीं रहता।

अब आप जानना चाहेंगे : **एक चालक के, जिसकी बाहरी सतह पर नेट आवेश मौजूद हों, बाहर स्थित बिंदु पर विद्युत्-क्षेत्र क्या होता है**?

<u>सममित</u> चालक आवेश वितरणों के लिए सभी चालकों के <u>बाहर</u> स्थित बिंदु पर विद्युत्-क्षेत्रों के मान वही होंगे जो संगत अचालक आवेश वितरणों के विद्युत्-क्षेत्रों के हैं। अतः, **विविध सममित चालक और अचालक आवेश वितरणों के कारण उनके <u>बाहर</u> स्थित किसी बिंदु पर विद्युत्-क्षेत्र** समान होते हैं और उनके मान तालिका 7.1 में दिए गए हैं।

तालिका 7.1 : चालक और अचालक आवेश वितरणों के कारण विद्युत्-क्षेत्र

चालक और अचालक आवेश वितरण	आवेश वितरण के कारण उसके बाहर स्थित बिंदु पर विद्युत्-क्षेत्र
त्रिज्या R वाला एकसमान गोलीय आवेश जिस पर नेट धनात्मक आवेश Q है।	$\vec{\mathbf{E}} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$ $r \geq R$ के लिए
त्रिज्या R वाला एकसमानतः आवेशित पतला गोलीय कोश जिस पर नेट धनात्मक आवेश Q है।	$\vec{\mathbf{E}} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$ $r \geq R$ के लिए
अनंत रेखा आवेश जिस पर एकसमान रेखा आवेश घनत्व λ है।	$E = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$ रेखा आवेश के लंबवत्
त्रिज्या R वाला अनंत बेलनी आवेश वितरण जिस पर एकसमान आयतन आवेश घनत्व ρ है।	$\vec{\mathbf{E}} = \dfrac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r}\hat{\mathbf{r}}$ $r \geq R$ के लिए
अनंत पतली आवेशित शीट जिस पर एकसमान पृष्ठ आवेश घनत्व σ है।	$E = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ शीट के लंबवत्

बोध प्रश्न 4 – आवेशित विलगित चालक

त्रिज्या 1.0 m वाले एक विलगित चालक गोले के पृष्ठ पर एकसमान पृष्ठ आवेश घनत्व $2.7\,\mu\text{Cm}^{-2}$ वाला आवेश मौजूद है। गोले पर नेट आवेश क्या है? गोले के पृष्ठ से बाहर जाने वाले नेट वैद्युत अभिवाह की गणना करें। चालक के कारण उसके केंद्र से 3.0 m की दूरी पर स्थित बिंदु पर विद्युत्-क्षेत्र क्या है?

अब हम दो संकेन्द्री चालकों के आस-पास के प्रदेशों में उनके कारण विद्युत्-क्षेत्र ज्ञात करने का उदाहरण लेंगे। ऐसी गणनाओं का उपयोग विभिन्न आकारों वाले संधारित्रों के कारण विद्युत्-क्षेत्र ज्ञात करने के लिए किया जाता है।

उदाहरण 7.3 : संकेन्द्री गोला और कोश

एक ठोस चालक गोला और पतला चालक गोलीय कोश संकेन्द्री हैं (चित्र 7.12क)। त्रिज्या r_1 वाले गोले पर आवेश Q_1 है और त्रिज्या r_2 वाले गोलीय कोश पर आवेश Q_2 है। दिया है कि $r_1 < r_2$ है। गोले के केंद्र से दूरी r पर (क) $r < r_1$, (ख) $r_1 < r < r_2$ और (ग) $r > r_2$ के लिए विद्युत्-क्षेत्रों की गणना करें, (घ) क्या होगा यदि गोले और गोलीय कोश को तार से जोड़ दिया जाए? (च) ऐसा करने के बाद $r < r_2$ और $r > r_2$ के लिए विद्युत्-क्षेत्रों के मान क्या होंगे?

हल ■ हम इस भाग के परिणामों का उपयोग कर, चालक गोले और चालक कोश पर गाउस नियम को लागू करेंगे।

याद रखें कि चालक के अंदर सभी बिंदुओं पर विद्युत्-क्षेत्र शून्य होता है।

क) वे बिंदु जिनके लिए $r < r_1$ है चालक गोले के **अंदर** स्थित हैं। अतः, ऐसे सभी बिंदुओं पर विद्युत्-क्षेत्र शून्य होगा।

ख) उन बिंदुओं के लिए, जो $r_1 < r < r_2$ के संगत हैं, हम त्रिज्या r का एक गोलाकार गाउसीय पृष्ठ खींचते हैं जो चालक गोले और चालक कोश के बीच में स्थित है (चित्र 7.12ख देखें)। उसके द्वारा परिबद्ध नेट आवेश चालक गोले पर मौजूद आवेश यानी Q_1 के बराबर है। अतः, समीकरण (6.22) से, विद्युत्-क्षेत्र का मान है :

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1}{r^2}\hat{\mathbf{r}} \qquad r_1 < r < r_2 \text{ के लिए}$$

ग) उन बिंदुओं के लिए, जो $r > r_2$ के संगत हैं, हम त्रिज्या $r\ (> r_2)$ का एक गोलाकार गाउसीय पृष्ठ खींचते हैं जो चालक कोश के बाहर है (चित्र 7.12ग)। यह पृष्ठ नेट आवेश $(Q_1 + Q_2)$ को परिबद्ध करता है। अतः, समीकरण (6.22) से विद्युत्-क्षेत्र है :

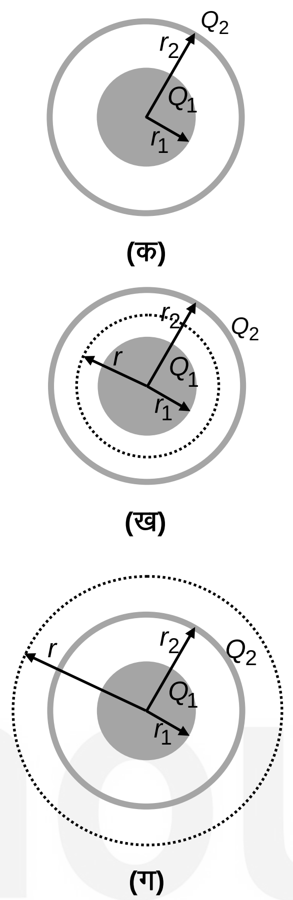
$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(Q_1 + Q_2)}{r^2}\hat{\mathbf{r}} \qquad r > r_2 \text{ के लिए}$$

घ) जब चालक गोले और चालक कोश को तार से जोड़ दिया जाता है तो निकाय में तब तक आवेश प्रवाहित होता है जब तक निकाय साम्यावस्था में नहीं पहुंच जाता। साम्यावस्था में, दोनों ही चालकों के भीतर आवेश नहीं होता और निकाय एकल चालक की भांति व्यवहार करता है। अतः, न तो अंदर के गोले पर और न ही कोश की अंदरूनी सतह पर कोई आवेश है। नेट आवेश $(Q_1 + Q_2)$ गोलीय कोश की बाहरी सतह पर है।

(च) चालक गोले और चालक कोश को तार से जोड़ने के बाद $r < r_2$ के लिए विद्युत्-क्षेत्र शून्य होगा क्योंकि यह बिंदु चालक के अंदर है। यदि हम $r > r_2$ के लिए गोलीय गाउसीय पृष्ठ खींचें तो वह नेट आवेश $(Q_1 + Q_2)$ को परिबद्ध करेगा। अतः,

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(Q_1 + Q_2)}{r^2}\hat{\mathbf{r}} \qquad r > r_2 \text{ के लिए}$$

अब आप उदाहरण 7.3 के परिणामों को लागू करें। इसके लिए बोध प्रश्न 5 करें।



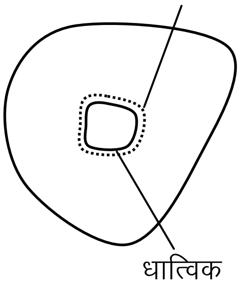
चित्र 7.12: उदाहरण 7.3 के लिए चित्र।

याद रखें कि नेट आवेश ज्ञात करने के लिए आपको आवेशों का बीजीय योग लेना होगा। अतः, ऐसे सवाल हल करते समय आपको आवेशों के चिन्हों का ध्यान रखना चाहिए।

बोध प्रश्न 5 – आवेशित चालक

मान लें कि उदाहरण 7.3 में $Q_1 = Q$ और $Q_2 = -2Q$ है। (क) $r < r_1$, (ख) $r_1 < r < r_2$ और (ग) $r > r_2$ के लिए विद्युत्-क्षेत्र के मान ज्ञात करें यदि बाकी सभी प्राचल समान हों।

अब मान लें कि हम चालक के अंदर एक गुहिका बना देते हैं। तो क्या तब भी विलगित आवेशित चालक के परिणाम उस पर लागू होंगे? आगे के उदाहरण में हम समझाएंगे कि इस स्थिति में क्या होता है।



चित्र 7.13: एक विलगित आवेशित चालक जिसके अंदर एक गुहिका है। गाउसीय पृष्ठ चालक के अंदर, गुहिका की सतह के ठीक बाहर उसके बहुत निकट स्थित है।

उदाहरण 7.4 : गुहिका वाला विलगित चालक

एक विलगित चालक में गुहिका बनाई जाती है। समझाएं कि चालक पर रखा गया कोई भी अतिरिक्त आवेश उसकी बाहरी सतह पर क्यों रहेगा।

हल ■ हम गाउस नियम का उपयोग करके यह बात समझाएंगे।

गुहिका वाले एक विलगित चालक का चित्र 7.13 देखें। अभी-अभी आपने सीखा है कि ठोस चालक के भीतर कोई असंतुलित आवेश नहीं होते।

अतः, हम यह मान सकते हैं कि जब हम उसमें से कुछ पदार्थ निकाल कर उसमें खोखली गुहिका बनाते हैं, तो हम ठोस चालक में मौजूद आवेश वितरणों या विद्युत् क्षेत्रों को बदलते नहीं।

एक बार फिर, हम गाउसीय पृष्ठ को इस तरह खींचते हैं कि वह **चालक के भीतर हो** और गुहिका के बाहर उसके चारों ओर हो जैसाकि चित्र 7.13 में दिखाया गया है। चूंकि चालक के अंदर नेट विद्युत्-क्षेत्र शून्य है $(\vec{\mathbf{E}}_{net} = \vec{\mathbf{0}})$, इस पृष्ठ से होकर जाने वाला अभिवाह भी शून्य होगा। अतः, गाउस नियम के अनुसार इस पृष्ठ द्वारा कोई नेट आवेश परिबद्ध नहीं होगा। अतः, हम कह सकते हैं कि गुहिका की सतह पर कोई नेट आवेश नहीं है। सारा अतिरिक्त आवेश विलगित चालक की बाहरी सतह पर रहता है।

इस भाग के परिणामों के अनेक व्यावहारिक अनुप्रयोग हैं। अब हम इस सवाल का जवाब दे सकते हैं : जब हम एक वाहन में सफर कर रहे हों और तूफान में फंस जाएं तब हमें क्या करना चाहिए? इस भाग में जो कुछ आपने पढ़ा है, उसके आधार पर आप इस सवाल का निम्नवत् जवाब दे सकते हैं :

हमें वाहन के सभी दरवाज़े और खिड़कियां बंद कर देने चाहिए और उसमें रखे किसी भी इलेक्ट्रॉनिक यंत्र से अपने को विद्युत्रोधी (insulate) कर लेना चाहिए। यदि वाहन पर बिजली गिरती है तो सारा का सारा आवेश उसकी बाहरी धात्विक सतह पर वितरित हो जाएगा। चालक (वाहन) के अंदर इसका प्रभाव बहुत कम होगा : यदि हम बंद वाहन या चालक पदार्थ से बनी किसी अन्य बंद जगह के अंदर बैठे होंगे, तो हम पर बिजली नहीं गिरेगी। दूसरी ओर, अगर हम किसी अचालक या कुचालक पदार्थ जैसेकि लकड़ी के कमरे के अंदर बैठे होंगे तो बिजली उससे होकर गुज़रेगी और हम पर गिर जाएगी। कमरे में आग भी लग सकती है।

इस तथ्य का कि एक गुहिका वाले विलगित चालक के भीतर विद्युत्-क्षेत्र शून्य होता है, प्रायोगिक भौतिकी में एक दिलचस्प अनुप्रयोग है जिसे **फैराडे पंजर** (Faraday cage) के नाम से जाना जाता है। इसका उन प्रयोगों में उपयोग होता है जिनमें अत्यधिक क्षीण शक्ति वाले विद्युत् सिग्नलों का, जैसेकि कंप्यूटर के चिप में या पशुओं के न्यूरॉनों में, मापन किया जाता है।

आप इसके बारे में https://en.wikipedia.org/wiki/Faraday_cage पर पढ़ सकते हैं। इसी कारण से आपके मोबाइल फोन, रेडियो आदि धात्विक पंजरों या धात्विक भवनों में काम नहीं करेंगे।

इसके साथ ही हम गाउस नियम और उसके अनुप्रयोगों पर चर्चा समाप्त करते हैं।
आइए, अब इस इकाई का सारांश दें।

7.5 सारांश

अवधारणा	विवरण

अनंत रेखा आवेश

- गाउस नियम से चालक और अचालक **अनंत रेखा आवेश या अनंत आवेशित तार** जिस पर **एकसमान रेखा आवेश घनत्व** λ है, के कारण विद्युत्-क्षेत्र रेखा आवेश के लंबवत् होता है और उसका परिमाण होता है :

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \quad \text{किसी बिंदु } r \text{ पर}$$

अनंत अचालक बेलनी आवेश वितरण

- **त्रिज्या R वाले अचालक अनंत ठोस बेलन** जिस पर **एकसमान आयतन आवेश घनत्व** ρ है, के कारण किसी बिंदु पर विद्युत्-क्षेत्र होता है :

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r}\hat{\mathbf{r}} \qquad r \geq R \quad \text{के लिए}$$

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{\rho r}{2\varepsilon_0}\hat{\mathbf{r}} \qquad r < R \quad \text{के लिए}$$

अनंत अचालक आवेशित समतल शीट

- **अनंत पतली अचालक आवेशित शीट** जिस पर **एकसमान पृष्ठ आवेश घनत्व** σ है, के कारण किसी बिंदु पर विद्युत्-क्षेत्र होता है :

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

उसकी दिशा शीट के लंबवत् होती है।

आवेशित विलगित चालक, गुहिका के बिना और गुहिका के साथ

- यदि किसी चालक पर असंतुलित, स्थैतिक अतिरिक्त आवेश होते हैं, तो वे चालक के पृष्ठ पर ही स्थित होते हैं। यदि **एक विलगित चालक पर नेट आवेश हो भी तो वह केवल चालक के पृष्ठ पर ही वितरित होगा, उसके भीतर नहीं रहेगा**। किसी विलगित चालक, जिसके अंदर एक गुहिका हो, पर रखा गया कोई भी अतिरिक्त आवेश उसकी बाहरी सतह पर ही रहेगा।

आवेशित विलगित चालक के कारण उसके अंदर और बाहर स्थित बिंदुओं पर विद्युत्-क्षेत्र

- एक विलगित आवेशित चालक के **अंदर स्थित बिंदुओं पर विद्युत्-क्षेत्र शून्य होता है**। एक विलगित आवेशित चालक के **बाहर स्थित बिंदुओं** पर विद्युत्-क्षेत्र का मान संगत अचालक आवेश वितरणों के विद्युत्-क्षेत्रों के मान के बराबर होता है। ये मान तालिका 7.1 में दिए गए हैं।

  - त्रिज्या R वाले **एकसमानतः आवेशित चालक गोले**, जिस पर आवेश Q स्थित हो, **के कारण** उसके बाहर उसके केंद्र से दूरी r पर स्थित बिंदु पर विद्युत्-क्षेत्र है :

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\hat{\mathbf{r}} \qquad r \geq R \quad \text{के लिए}$$

  - त्रिज्या R वाले **एकसमानतः आवेशित पतले चालक गोलीय कोश**, जिस पर आवेश Q स्थित हो, **के कारण** उसके बाहर उसके केंद्र से दूरी r पर स्थित बिंदु पर

आवेशित विलगित चालक के कारण विद्युत्-क्षेत्र उसके बाहर और अंदर स्थित बिंदुओं पर

विद्युत्-क्षेत्र होता है : $\vec{\mathbf{E}} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$ $\quad r \geq R \quad$ के लिए

- **अनंत रेखा चालक** जिस पर एकसमान रेखा आवेश घनत्व λ है, के कारण दूरी r पर विद्युत्-क्षेत्र होता है :

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \quad \text{रेखा आवेश की लंबवत् दिशा में}$$

- त्रिज्या R वाले **अनंत ठोस चालक बेलन**, जिस पर एकसमान आयतन आवेश घनत्व ρ है, के कारण दूरी r पर विद्युत्-क्षेत्र होता है :

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r}\hat{\mathbf{r}} \quad \text{के लिए}$$

- **अनंत पतली चालक आवेशित शीट** जिस पर एकसमान पृष्ठ आवेश घनत्व σ है, के कारण विद्युत्-क्षेत्र होता है :

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \quad \text{शीट के लंबवत्}$$

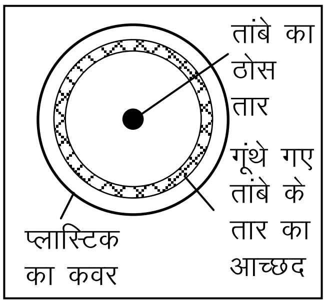
7.6 अंत में कुछ प्रश्न

1. एक अनंत आवेशित तार से 2.0 m की दूरी पर विद्युत्-क्षेत्र का परिमाण क्या है यदि दिया हो कि रेखा आवेश घनत्व $3.6\,\mu\text{Cm}^{-1}$ है?

2. लंबाई 1000 m और व्यास 1.0 cm वाले ठोस धात्विक तार में नेट आवेश $q = 5.0\,\mu\text{C}$ एकसमानतः वितरित है। तार के अक्ष से (क) 5.0 cm और (ख) 0.50 cm की दूरियों पर विद्युत्-क्षेत्र ज्ञात करें। मान लें कि जिन बिंदुओं पर विद्युत्-क्षेत्र ज्ञात करना है, वे तार के सिरों से बहुत दूर हैं।

3. लंबाई 30 m और व्यास 0.04 cm वाले एक पतले धात्विक तार पर नेट आवेश $6.0\,\mu\text{C}$ एकसमानतः वितरित है। उसके अक्ष से (क) 0.01 cm और (ख) 0.09 cm की दूरियों पर विद्युत्-क्षेत्र ज्ञात करें। मान लें कि ये बिंदु तार के सिरों से बहुत दूर हैं।

4. त्रिज्या 1.0 m और ऊंचाई 20 m वाले बेलनाकार गाउसीय पृष्ठ द्वारा कुछ धनात्मक आवेश परिबद्ध हैं। मान लें कि इन आवेशों के कारण विद्युत्-क्षेत्र गाउसीय पृष्ठ के लंबवत् है और उसका परिमाण $900\,\text{NC}^{-1}$ है। आवेश वितरण का आयतन आवेश घनत्व परिकलित करें।

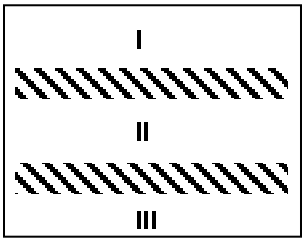


चित्र 7.14: अंत के प्रश्न 5 के लिए चित्र।

5. एक समाक्ष केबल में भीतर एक तांबे का ठोस तार है और ऊपर चोटीनुमा गूंथे गए तांबे के तार का आच्छद है (चित्र 7.14 देखें)। भीतरी तार का रेखा आवेश घनत्व $-\lambda$ है और बाहरी तार का λ। (क) भीतरी तार के अंदर के प्रदेश में, (ख) दोनों तारों के बीच के प्रदेश में, और (ग) समाक्ष केबल के बाहर के प्रदेश में किसी बिंदु पर विद्युत्-क्षेत्रों की गणना करें।

6. पृष्ठ क्षेत्रफल A वाली एक आवेशित सपाट शीट का एकसमान पृष्ठ आवेश घनत्व σ है। शीट के केंद्र से 0.03 m की लांबिक दूरी पर स्थित एक इलेक्ट्रॉन पर शीट के लंबवत् उससे बहिर्मुखी दिशा में, परिमाण $3.6\times10^{-12}\,\text{N}$ वाला स्थिर वैद्युत बल आरोपित होता है। $A = 2.56\,\text{m}^2$ के लिए शीट पर नेट आवेश की गणना करें।

7. दो अभिन्न अनंत अचालक शीट, जिन पर समान धनात्मक पृष्ठ आवेश घनत्व σ वाले आवेश हैं, एक-दूसरे के समांतर रखी हैं जैसाकि चित्र 7.15 में दिखाया गया है। (क) शीटों के ऊपर के प्रदेश I में, (ख) शीटों के बीच के प्रदेश II में और (ग) शीटों के नीचे के प्रदेश III में स्थित बिंदुओं पर विद्युत्-क्षेत्र ज्ञात करें।



चित्र 7.15: अंत के प्रश्न 7 के लिए चित्र।

8. लंबाई L वाले एक बहुत लंबे पतले ठोस चालक बेलन को, जिस पर नेट आवेश $+q$ है, उसी लंबाई की एक पतली खोखली चालक बेलनाकार नलिका में रखा जाता है। नलिका पर आवेश $+2q$ है। (क) चालक नलिका के बाहर स्थित बिंदु पर, और (ख) ठोस बेलन और नलिका के बीच के प्रदेश में स्थित बिंदु पर विद्युत्-क्षेत्र ज्ञात करें। दोनों ही स्थितियों में, ये बिंदु चालकों के सिरों से बहुत दूर हैं।

9. एक विलगित चालक पर नेट आवेश $q_1 = 15\mu C$ है। बाद में एक आवेश $q_2 = 5.0\mu C$ को चालक के अंदर एक गुहिका में रखा जाता है। गुहिका की सतह पर आवेश ज्ञात करें। q_2 को गुहिका में रखने के बाद चालक की बाहरी सतह पर आवेश क्या होगा?

10. त्रिज्या 6.0 m वाले एक चालक गोले के भीतर त्रिज्या 3.0 m की एक संकेन्द्री गोलाकार गुहिका बनाई जाती है। गोले/गुहिका के केंद्र पर बिंदु आवेश Q रखा जाता है। चालक गोले पर नेट आवेश $+9.0$nC है। गोले के केंद्र से 2.0 m की दूरी पर स्थित बिंदु पर विद्युत्-क्षेत्र का परिमाण $7.2\ NC^{-1}$ है और उसकी दिशा त्रिज्यतः केंद्र की ओर है। (क) आवेश Q का मान क्या है? (ख) गुहिका की दीवार पर यानी गोले की अंदरूनी सतह पर कितना आवेश है? (ग) गोले की बाहरी सतह पर आवेश का मान ज्ञात करें। (घ) गोले के केंद्र से 4.0 m की दूरी पर स्थित एक बिंदु पर विद्युत्-क्षेत्र ज्ञात करें।

7.7 हल और उत्तर

बोध प्रश्न

1. समीकरण (7.3) से रैखिक आवेश घनत्व $\lambda = 2\pi\varepsilon_0 r E$ है। सवाल में दिए गए r, E और अचरों के संख्यात्मक मानों को रखने पर हमें मिलता है :

$$\lambda = 2\pi \times 8.85 \times 10^{-12}\ C^2N^{-1}m^{-2} \times (1.0\,m) \times 9.0 \times 10^3\ NC^{-1} = 5.0 \times 10^{-7}\ Cm^{-1}$$

2. क) बेलन के अक्ष से 0.40 m की दूरी पर स्थित बिंदु बेलन के अंदर है। अतः, समीकरण (7.7) से विद्युत्-क्षेत्र का परिमाण है :

$$E = \frac{\rho r}{2\varepsilon_0} = \frac{4.8\mu Cm^{-3} \times 0.40\,m}{2 \times 8.85 \times 10^{-12}\ C^2N^{-1}m^{-2}} = 1.1 \times 10^5\ NC^{-1}$$

ख) बेलन के अक्ष से 1.0 m की दूरी पर स्थित बिंदु बेलन के बाहर है। अतः, समीकरण (7.6) से विद्युत्-क्षेत्र का परिमाण है :

$$E = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r} = \frac{4.8\mu Cm^{-3} \times (0.60\,m)^2}{2 \times 8.85 \times 10^{-12}\ C^2N^{-1}m^{-2} \times (1.0\,m)} = 9.8 \times 10^4\ NC^{-1}$$

3. जैसाकि हमने उदाहरण 7.2 में समझाया है, $\sigma_1 = 9.0 \times 10^{-9}\ Cm^{-2}$ और $\sigma_2 = 6.0 \times 10^{-9}\ Cm^{-2}$ के लिए तीनों प्रदेशों में विद्युत्-क्षेत्रों के परिमाण और दिशाएं हैं :

प्रदेश (1) : $\vec{\mathbf{E}}_1 = \dfrac{1}{2\varepsilon_0}(\sigma_1 - \sigma_2)\hat{\mathbf{i}} = \dfrac{(9.0 - 6.0)\times 10^{-9}\,\mathrm{Cm^{-2}}}{2\times 8.85\times 10^{-12}\,\mathrm{C^2N^{-1}m^{-2}}}\,\hat{\mathbf{i}}$

$= 1.7\times 10^2\,\mathrm{NC^{-1}}\hat{\mathbf{i}}$

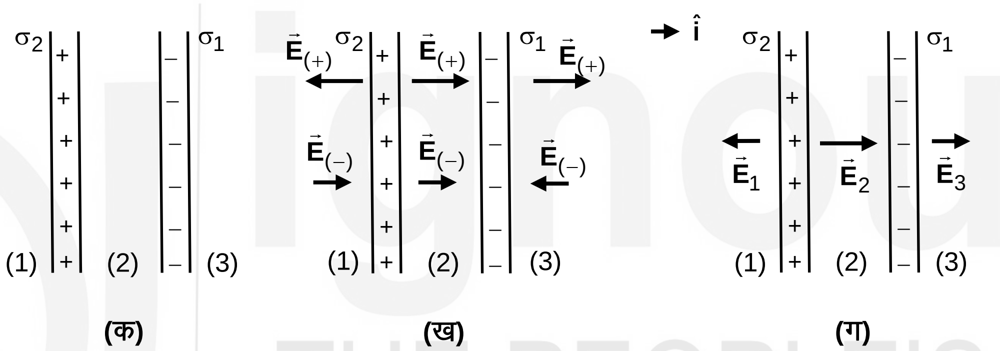
प्रदेश (2) : $\vec{\mathbf{E}}_2 = -\dfrac{1}{2\varepsilon_0}(\sigma_1 + \sigma_2)\hat{\mathbf{i}} = -\dfrac{(9.0 + 6.0)\times 10^{-9}\,\mathrm{Cm^{-2}}}{2\times 8.85\times 10^{-12}\,\mathrm{C^2N^{-1}m^{-2}}}\,\hat{\mathbf{i}}$

$= -\,8.5\times 10^2\,\mathrm{NC^{-1}}\hat{\mathbf{i}}$

प्रदेश (3) : $\vec{\mathbf{E}}_3 = \dfrac{1}{2\varepsilon_0}(\sigma_2 - \sigma_1)\hat{\mathbf{i}} = \dfrac{(6.0 - 9.0)\times 10^{-9}\,\mathrm{Cm^{-2}}}{2\times 8.85\times 10^{-12}\,\mathrm{C^2N^{-1}m^{-2}}}\,\hat{\mathbf{i}}$

$= -\,1.7\times 10^2\,\mathrm{NC^{-1}}\hat{\mathbf{i}}$

चित्र 7.16 देखें। यदि दोनों शीटों की अदला-बदली कर दी जाती है तो $\sigma_1 = 9.0\times 10^{-9}\,\mathrm{Cm^{-2}}$ ऋणात्मक और $\sigma_2 = 6.0\times 10^{-9}\,\mathrm{Cm^{-2}}$ धनात्मक होगा।



चित्र 7.16: बोध प्रश्न 3 के लिए चित्र। भाग (ग) पैमाने के अनुसार नहीं है।

चित्र 7.16ख से अब तीनों प्रदेशों में विद्युत्-क्षेत्रों के परिमाण और दिशाएं हैं :

$$\vec{\mathbf{E}}_1 = \vec{\mathbf{E}}_+ + \vec{\mathbf{E}}_- = (E_+)(-\hat{\mathbf{i}}) + (E_-)\hat{\mathbf{i}} = \frac{1}{2\varepsilon_0}[\sigma_2(-\hat{\mathbf{i}}) + \sigma_1\hat{\mathbf{i}}] = \frac{1}{2\varepsilon_0}(\sigma_1 - \sigma_2)\hat{\mathbf{i}}$$

$$= 1.7\times 10^2\,\mathrm{NC^{-1}}\hat{\mathbf{i}}$$

$$\vec{\mathbf{E}}_2 = \vec{\mathbf{E}}_+ + \vec{\mathbf{E}}_- = E_+\hat{\mathbf{i}} + E_-\hat{\mathbf{i}} = \frac{1}{2\varepsilon_0}(\sigma_1 + \sigma_2)\hat{\mathbf{i}} = 8.5\times 10^2\,\mathrm{NC^{-1}}\hat{\mathbf{i}}$$

$$\vec{\mathbf{E}}_3 = \vec{\mathbf{E}}_+ + \vec{\mathbf{E}}_- = (E_+)\hat{\mathbf{i}} + (E_-)(-\hat{\mathbf{i}}) = \frac{1}{2\varepsilon_0}(\sigma_2 - \sigma_1)\hat{\mathbf{i}} = -1.7\times 10^2\,\mathrm{NC^{-1}}\hat{\mathbf{i}}$$

आपको ये गणनाएं उदाहरण 7.2 की तरह, शुरू से करनी हैं।

4. गोले पर नेट आवेश $Q = \sigma S$ है $S = 4\pi R^2$ त्रिज्या R वाले गोले का पृष्ठ क्षेत्रफल है। अतः,

$$Q = \sigma 4\pi R^2 = 4\pi\times 2.7\,\mu\mathrm{Cm^{-2}}\,(1.0\,\mathrm{m})^2 = 34\,\mu\mathrm{C}$$

गाउस नियम [समीकरण (7.4क)] से, गोले के पृष्ठ से बाहर जाने वाला नेट वैद्युत अभिवाह है :

$$\Phi_E = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{34\,\mu\mathrm{C}}{8.85\times 10^{-12}\,\mathrm{C^2N^{-1}m^{-2}}} = 3.8\times 10^6\,\mathrm{Nm^2C^{-1}}$$

चूंकि बिंदु गोले के बाहर स्थित है, उसके केंद्र से 3.0 m की दूरी पर चालक के कारण विद्युत्-क्षेत्र है :

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\hat{\mathbf{r}} = (8.99\times10^9\,\mathrm{C^{-2}Nm^2})\times\frac{34\,\mu\mathrm{C}}{(3.0\,\mathrm{m})^2}\hat{\mathbf{r}} = 3.4\times10^4\,\mathrm{NC^{-1}}\hat{\mathbf{r}}$$

5. उदाहरण 7.3 के परिणामों में $Q_1 = Q$ और $Q_2 = -2Q$ रखने पर

क) $r < r_1$ के लिए $\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{0}}$,

ख) $r_1 < r < r_2$ के लिए $\vec{\mathbf{E}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1}{r^2}\hat{\mathbf{r}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$, और

ग) $r > r_2$ के लिए

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(Q_1+Q_2)}{r^2}\hat{\mathbf{r}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(Q-2Q)}{r^2}\hat{\mathbf{r}} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$$

अंत में कुछ प्रश्न

1. समीकरण (7.3) से विद्युत्-क्षेत्र का परिमाण है :

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} = 2\times(8.99\times10^9\,\mathrm{C^{-2}Nm^2})\times\frac{3.6\,\mu\mathrm{Cm^{-1}}}{2.0\,\mathrm{m}} = 3.2\times10^4\,\mathrm{NC^{-1}}$$

2. हालांकि तार अनंत नहीं है, तार के काफ़ी निकट और उसके सिरों से बहुत दूर के बिंदुओं पर, हम उसे अनंत मान सकते हैं क्योंकि उन बिंदुओं पर, हम उससे बहुत दूर स्थित आवेशों के कारण विद्युत्-क्षेत्रों के योगदान को छोड़ सकते हैं।

क) हम तार के अक्ष से 5.0 cm की दूरी पर विद्युत्-क्षेत्र की गणना समीकरण (7.4ख) से करेंगे क्योंकि वह बिंदु तार के बाहर स्थित है। अतः,

$$E = \frac{Q_{encl}}{2\pi\varepsilon_0 r\,L} = 2\times(8.99\times10^9\,\mathrm{C^{-2}Nm^2})\times\frac{5.0\,\mu\mathrm{C}}{5.0\times10^{-3}\,\mathrm{m}\times1000\,\mathrm{m}} = 1.8\times10^4\,\mathrm{NC^{-1}}$$

ख) धात्विक तार चालक है। अतः, तार के अक्ष से 0.50 cm की दूरी पर विद्युत् क्षेत्र $\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{0}}$ है क्योंकि वह बिंदु चालक के अंदर स्थित है।

3. हम पतले धात्विक तार को अनंत नहीं मान सकते। लेकिन हम तार के काफ़ी निकट के और उसके सिरों से बहुत दूर के बिंदुओं पर, हम उससे बहुत दूर स्थित आवेशों के कारण विद्युत्-क्षेत्रों के योगदान को छोड़ सकते हैं। अतः, हम पतले धात्विक तार के विद्युत्-क्षेत्र का अनंत रेखा आवेश से सन्निकटन कर सकते हैं। (क) क्योंकि धात्विक तार चालक है, अतः, उसके अक्ष से 0.01 cm की दूरी पर स्थित बिंदु पर जो उसके अंदर स्थित है, विद्युत्-क्षेत्र $\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{0}}$ है। (ख) तार के अक्ष से 0.09 cm की दूरी पर स्थित बिंदु पर जो उसके बाहर स्थित है, समीकरण (7.2ग) से विद्युत्-क्षेत्र है :

$$E = \frac{Q_{encl}}{2\pi\varepsilon_0 r\,L} = 2\times(8.99\times10^9\,\mathrm{C^{-2}Nm^2})\times\frac{6.0\,\mu\mathrm{C}}{0.09\times10^{-2}\,\mathrm{m}\times30\,\mathrm{m}} = 4.0\times10^6\,\mathrm{NC^{-1}}$$

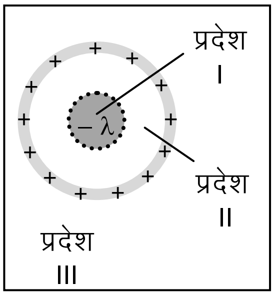
4. हमें विद्युत्-क्षेत्र और बेलनाकार गाउसीय पृष्ठ के त्रिज्या और ऊंचाई ज्ञात हैं। हमें उसके द्वारा परिबद्ध आवेश वितरण का आयतन आवेश घनत्व परिकलित करना है। चूंकि बेलन का पृष्ठ क्षेत्रफल $2\pi r\,h$ है, अतः, गाउसीय पृष्ठ से होकर जाने वाला वैद्युत अभिवाह है :

$$\Phi_E = ES = E\times(2\pi r\,h) = \frac{Q_{encl}}{\varepsilon_0} \quad \text{या} \quad Q_{encl} = 2\pi\varepsilon_0 r\,hE$$

आवेश वितरण का आयतन आवेश घनत्व ρ प्रति एकक आयतन द्वारा परिबद्ध आवेश है।

$$\therefore \rho = \frac{Q_{encl}}{V} = \frac{2\pi\varepsilon_0 r\, h\, E}{\pi r^2 h} = \frac{2\varepsilon_0 E}{r} = \frac{2\times 8.85\times 10^{-12}\,\mathrm{C^2N^{-1}m^{-2}}\times 900\,\mathrm{NC^{-1}}}{1.0\,\mathrm{m}}$$

$$= 1.6\times 10^{-8}\,\mathrm{C\,m^{-3}}$$



चित्र 7.17: अंत के प्रश्न 5 के लिए चित्र।

5. क) तांबे के तार अंदर के प्रदेश I में स्थित बिंदु पर विद्युत्-क्षेत्र $\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{0}}$ है क्योंकि तार चालक है।

   ख) चित्र 7.17 देखें। हम प्रदेश II में त्रिज्या r और लंबाई L वाले एक लंबवृत्तीय बेलन, जो तार से समाक्ष है, के पृष्ठ को गाउसीय पृष्ठ के तौर पर चुनते हैं। ध्यान दें कि गाउसीय पृष्ठ द्वारा परिबद्ध नेट आवेश $Q_{encl} = -\lambda L$ है, जहां λ भीतरी तार का रेखा आवेश घनत्व है। गाउस नियम [समीकरण (7.4क)] से

$$\oiint_S \vec{\mathbf{E}}.d\vec{\mathbf{S}} = \oiint_S E\,dS = E\oiint_S dS = E\,2\pi r\,L = \frac{Q_{encl}}{\varepsilon_0} = -\frac{\lambda L}{\varepsilon_0}$$

   दोनों तारों के बीच के प्रदेश II में स्थित बिंदु पर विद्युत्-क्षेत्र है :

$$\vec{\mathbf{E}} = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\hat{\mathbf{r}}$$

   जहां $\hat{\mathbf{r}}$ बेलनी अक्ष के लंबवत् एकक सदिश है जिसकी दिशा अक्ष से परे है। अतः, प्रदेश II में विद्युत्-क्षेत्र की दिशा त्रिज्य दिशा में अक्ष की ओर है।

   ग) समाक्ष केबल के बाहर के प्रदेश में किसी बिंदु पर विद्युत्-क्षेत्र शून्य है क्योंकि दोनों तारों के रेखा आवेश घनत्व समान लेकिन विपरीत चिन्ह के हैं और दोनों तारों के बाहर स्थित गाउसीय पृष्ठ द्वारा परिबद्ध नेट आवेश शून्य है : $\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{0}}$

6. सपाट शीट के केन्द्र से 0.03 m की दूरी पर स्थित बिंदु के लिए हम शीट को अनंत मान सकते हैं अगर हम मान लें कि बिंदु शीट के सिरों से बहुत दूर है। माना कि शीट पर नेट आवेश q है। समीकरण (7.10) से विद्युत्-क्षेत्र है :

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \quad \text{शीट के लंबवत् दिशा में जहां} \quad \sigma = \frac{q}{A}$$

   इलेक्ट्रॉन पर आरोपित स्थिर वैद्युत बल का परिमाण है

$$F = -eE \quad \text{या} \quad F = -e\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{-eq}{2\varepsilon_0 A}$$

   क्योंकि पृष्ठ आवेश घनत्व प्रति एकक क्षेत्रफल आवेश है और A शीट का क्षेत्रफल है। अतः, शीट पर नेट आवेश है :

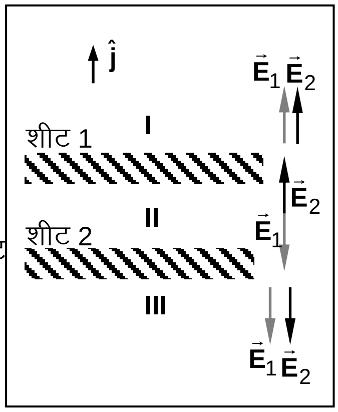
$$q = \frac{2\varepsilon_0 AF}{-e} = \frac{2\times 8.85\times 10^{-12}\,\mathrm{C^2N^{-1}m^{-2}}\times 2.56\,\mathrm{m^2}\times 3.6\times 10^{-12}\,\mathrm{N}}{-1.6\times 10^{-19}\,\mathrm{C}} = -1.0\,\mathrm{mC}$$

   ऋणात्मक चिन्ह बताता है कि शीट पर आवेश ऋणात्मक है। यह परिणाम अपेक्षित है क्योंकि शीट और इलेक्ट्रॉन के बीच स्थिर वैद्युत बल ऋणात्मक है यानी इलेक्ट्रॉन शीट द्वारा प्रतिकर्षित होता है।

7. मान लें कि तीनों प्रदेशों में से प्रत्येक प्रदेश में स्थित किसी बिंदु पर $\vec{\mathbf{E}}_1$, शीट 1 के कारण विद्युत्-क्षेत्र है और $\vec{\mathbf{E}}_2$, शीट 2 के कारण विद्युत्-क्षेत्र है। शीटों के कारण

विद्युत्-क्षेत्रों के परिमाण समान हैं क्योंकि उनके पृष्ठ आवेश घनत्व समान हैं। मान लें कि विद्युत्-क्षेत्रों का परिमाण E है। तब समीकरण (7.10) से, $E = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ ।

क्योंकि दोनों शीटों पर धनात्मक आवेश है, प्रत्येक प्रदेश में शीटों के कारण विद्युत्-क्षेत्रों की दिशा उनसे बहिर्मुखी होगी। तीनों प्रदेशों में शीटों के कारण विद्युत्-क्षेत्र चित्र 7.18 में दिखाए गए हैं। तब हम प्रत्येक प्रदेश में स्थित किसी बिंदु पर नेट विद्युत्-क्षेत्र इस तरह ज्ञात करेंगे :



चित्र 7.18: अंत के प्रश्न 7 के लिए चित्र।

क) शीटों के ऊपर के प्रदेश I में : क्योंकि दोनों शीटों पर धनात्मक आवेश है, अतः, शीटों के कारण विद्युत्-क्षेत्र समान दिशा में हैं। मान लें कि वे $\hat{\mathbf{j}}$ के अनुदिश हैं। अतः, प्रदेश I में स्थित किसी बिंदु पर नेट विद्युत्-क्षेत्र है :

$$\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{E}}_1 + \vec{\mathbf{E}}_2 = 2\times\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{\mathbf{j}} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{\mathbf{j}}$$

ख) शीटों के बीच के प्रदेश II में : शीट 1 के कारण विद्युत्-क्षेत्र, शीट 2 के कारण विद्युत्-क्षेत्र की विपरीत दिशा में है। अतः, प्रदेश II में स्थित किसी बिंदु पर नेट विद्युत्-क्षेत्र है :

$$\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{E}}_1 + \vec{\mathbf{E}}_2 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(-\hat{\mathbf{j}}) + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{\mathbf{j}} = \vec{\mathbf{0}}$$

ग) शीटों के नीचे के प्रदेश III में : शीटों के कारण विद्युत्-क्षेत्र समान दिशा में हैं लेकिन $\hat{\mathbf{j}}$ के विपरीत। अतः, प्रदेश III में स्थित किसी बिंदु पर नेट विद्युत्-क्षेत्र है : $\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{E}}_1 + \vec{\mathbf{E}}_2 = 2\times\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}(-\hat{\mathbf{j}}) = -\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{\mathbf{j}}$

8. हम समीकरण (7.4क) द्वारा दिए गए गाउस नियम का उपयोग कर चालक बेलनी आवेश वितरणों के लिए दोनों प्रदेशों में विद्युत्-क्षेत्रों की गणना करेंगे।

क) चालक नलिका के बाहर स्थित एक बिंदु के लिए, बिंदु से होकर जाने वाले त्रिज्या r और लंबाई L गाउसीय बेलनी पृष्ठ द्वारा परिबद्ध नेट आवेश ठोस बेलन और बेलनाकार नलिका पर मौजूद कुल आवेश का बीजीय योग है यानी कुल आवेश $+3q$ है। अतः, समीकरण (7.4क) से हमें मिलता है :

$$\oiint_S \vec{\mathbf{E}}.d\vec{\mathbf{S}} = \oiint_S E\,dS = E\oiint_S dS = E\,2\pi r\,L = \frac{Q_{encl}}{\varepsilon_0} = \frac{+3q}{\varepsilon_0}$$

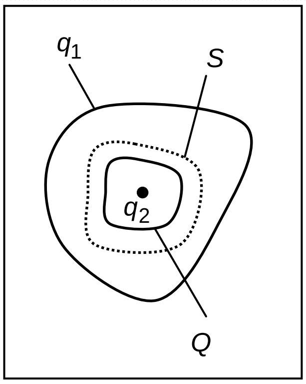
या $E = \dfrac{3q}{2\pi\varepsilon_0 r\,L}$ त्रिज्यतः बहिर्मुखी दिशा में

ख) ठोस बेलन और नलिका के बीच के प्रदेश में स्थित बिंदु के लिए, बिंदु से होकर जाने वाले त्रिज्या r और लंबाई L वाले गाउसीय बेलनी पृष्ठ द्वारा परिबद्ध आवेश, ठोस बेलन पर मौजूद आवेश के बराबर है यानी उसका मान $+q$ है। अतः, समीकरण (7.4क) से हमें मिलता है :

$$\oiint_S \vec{\mathbf{E}}.d\vec{\mathbf{S}} = \oiint_S E\,dS = E\oiint_S dS = E\,2\pi r\,L = \frac{Q_{encl}}{\varepsilon_0} = \frac{+q}{\varepsilon_0}$$

या $E = \dfrac{q}{2\pi\varepsilon_0 r\,L}$ त्रिज्यतः बहिर्मुखी दिशा में

9. चित्र 7.19 को ध्यान से देखें। चालक पर नेट आवेश $q_1 = 15\,\mu C$ है। मान लें कि गुहिका की दीवार पर आवेश Q मौजूद है। मान लें कि गुहिका को गाउसीय पृष्ठ S



चित्र 7.19: अंत के प्रश्न 9 के लिए चित्र।

परिबद्ध करता है। पृष्ठ S से होकर जाने वाला वैद्युत अभिवाह Φ_S शून्य है क्योंकि चालक के भीतर विद्युत्-क्षेत्र शून्य होता है। चूंकि आवेश $q_2 = 5.0\mu C$ को चालक की गुहिका के अंदर रखा जाता है, अतः, गाउसीय पृष्ठ द्वारा परिबद्ध नेट आवेश, गुहिका की दीवार (जो चालक की भीतरी सतह भी है) पर आवेश Q और q_2 के बीजीय योग के बराबर है। अतः, गाउस नियम से

$$\Phi_S = \frac{Q_{encl}}{\varepsilon_0} = \frac{Q + q_2}{\varepsilon_0} = 0$$

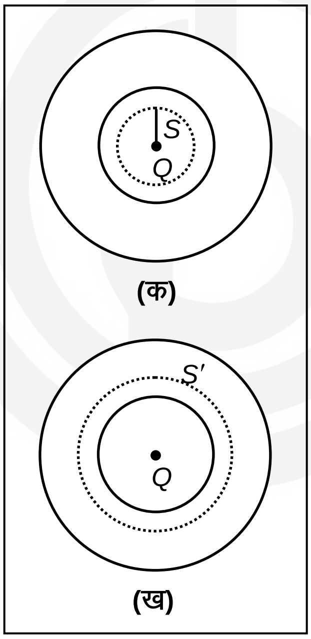
$$\Rightarrow \quad Q + q_2 = 0 \Rightarrow \quad Q = -q_2 = -5.0\mu C$$

मान लें कि आवेश $q_2 = 5.0\mu C$ को चालक की गुहिका के अंदर रखने के बाद, चालक की बाहरी सतह पर नेट आवेश q' है। आवेश संरक्षण नियम से चालक गोले पर नेट आवेश उसकी भीतरी सतह पर आवेश और उसकी बाहरी सतह पर आवेश के बीजीय योग के बराबर है। अतः, हमें मिलता है :

$$q_1 = Q + q'$$

अतः, चालक की बाहरी सतह पर आवेश का मान है :

$$q' = 15\mu C - (-5.0\mu C) = 20\mu C$$



चित्र 7.20: अंत के प्रश्न 10 के लिए चित्र।

10. क) दिया है कि गोले/गुहिका के केंद्र से 2.0 m की दूरी पर स्थित बिंदु पर विद्युत् क्षेत्र की दिशा अंतर्मुखी है। चित्र 7.20क देखें। हम त्रिज्या 2.0 m वाला एक गोलाकार गाउसीय पृष्ठ S खींचते हैं। तो उसका पृष्ठ क्षेत्रफल $4\pi(2.0\text{m})^2$ है और उसके द्वारा परिबद्ध नेट आवेश Q है। अतः, गाउस नियम से हमें मिलता है :

$$\Phi_S = -ES = \frac{Q_{encl}}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow Q = -\varepsilon_0 ES = -4\pi\varepsilon_0(2.0\text{m})^2 E$$

या $Q = -4\pi(8.85\times10^{-12}\,C^2N^{-1}m^{-2})\times(7.2\,NC^{-1})\,(2.0\text{m})^2 = -3.2\text{nC}$

ख) हम अंत के प्रश्न 9 के हल के चरणों का अनुसरण करेंगे। गाउसीय पृष्ठ S' चालक के अंदर स्थित है और गुहिका को परिबद्ध करता है जैसाकि चित्र 7.20ख में दिखाया गया है। पृष्ठ S' द्वारा परिबद्ध नेट आवेश, आवेश Q और गुहिका की दीवार पर मौजूद आवेश, माना कि q, का बीजीय योग है। चूंकि चालक के अंदर विद्युत्-क्षेत्र शून्य है, अतः, गाउस नियम से गाउसीय पृष्ठ द्वारा परिबद्ध आवेश शून्य है। अतः,

$$Q + q = 0 \Rightarrow \quad q = -Q = 3.2\text{nC}$$

ग) आवेश संरक्षण नियम से, चालक गोले पर नेट आवेश उसकी भीतरी सतह (यानी गुहिका की दीवार) पर आवेश q और उसकी बाहरी सतह पर आवेश के बीजीय योग के बराबर है। अतः, यदि गोले की बाहरी सतह पर आवेश q' है तो हमें मिलता है :

गोले पर नेट आवेश $= +9.0\text{nC} = q + q'$

या $\quad q' = +9.0\text{nC} - 3.2\text{nC} = 5.8\text{nC}$

घ) चूंकि केंद्र से 4.0 m की दूरी पर स्थित बिंदु चालक गोले के भीतर स्थित है, अतः, उस बिंदु पर विद्युत्-क्षेत्र शून्य है।