गाउस नियम का उपयोग सममित संधारित्रों के विद्युत्-क्षेत्रों की गणना के लिए किया जाता है। पृथ्वी एक विशाल गोलाकार संधारित्र है जिसका उपयोग हम हर समय करते हैं। ऐसा हम कैसे कर पाते हैं? इसका उत्तर आपको इस इकाई में मिलेगा!

इकाई 6

गाउस नियम और उसके अनुप्रयोग

इकाई की रूपरेखा

अध्ययन निर्देशिका

इकाई 5 में आपने आवेश, स्थिर वैद्युत बल, कूलॉम नियम और विद्युत्-क्षेत्र की अवधारणाएं समझी हैं, और आवेशों पर लग रहे स्थिर वैद्युत बलों, बिंदु आवेशों और संतत रेखा आवेश के विद्युत्-क्षेत्रों की गणना की है। इस इकाई में आप गाउस नियम के बारे में पढ़ेंगे जिसके कारण विविक्त बिंदु आवेशों के वितरणों और सममित संतत आवेश वितरणों के कारण विद्युत्-क्षेत्रों और स्थिर वैद्युत बलों की गणना आसान हो जाती है। आप सीखेंगे कि गाउस नियम को किसी बिंदु आवेश और गोलीय सममिति वाले निकायों जैसेकि एकसमानतः आवेशित गोले और गोलीय कोश पर, जिनके विद्युत्-क्षेत्रों में गोलीय सममिति होती है, कैसे लागू किया जाता है। आपने इकाई 4 में डाइवर्जेन्स प्रमेय सीखी है जिसे आप इस इकाई में भी लागू करेंगे। आपको इस पाठ्यक्रम की इकाइयों 1 से 4 को दोहरा लेना चाहिए क्योंकि आप इस इकाई की अवधारणाओं को सीखते हुए उनका लगातार उपयोग करेंगे। आपको सदिश बीजगणित की अवधारणाओं की भी पूरी जानकारी होनी चाहिए। आपको हमारी सलाह है कि आप इस इकाई में दिए गए बोध प्रश्नों और अंत के प्रश्नों को स्वयं हल करें। आपको सभी भागों को अच्छी तरह पढ़ना चाहिए और यह सुनिश्चित करना चाहिए कि आप इन बोध प्रश्नों और अंत के प्रश्नों को आप अपने-आप हल कर सकते हैं।

"संसार के तमाम मापन उस एक प्रमेय का मुकाबला नहीं कर सकते जिससे शाश्वत सत्यों का विज्ञान वास्तव में उन्नत होता है।"

कार्ल फ्रीड्रिख़ गाउस

6.1 परिचय

इकाई 5 में आपने आवेश की अवधारणा और कूलॉम नियम को दोहराया है। आपने विद्युत्-क्षेत्र की अवधारणा सीखी है और बिंदु आवेशों और संतत रेखा आवेश के कारण विद्युत्-क्षेत्रों की गणना की है। आपने किसी दिए हुए विद्युत्-क्षेत्र में रखे आवेश पर आरोपित स्थिर वैद्युत बल की गणना करना भी सीखा है।

वास्तव में स्थिर विद्युतिकी का यही उद्देश्य है : आवेशों के कारण विद्युत्-क्षेत्रों की और विद्युत्-क्षेत्र में रखे किसी आवेश या आवेशों के वितरण पर आरोपित स्थिर वैद्युत बलों की गणना करना। आपने यह भी देखा कि रेखा आवेश के कारण विद्युत्-क्षेत्र की गणना करना कितना कठिन था। क्या आप इन गणनाओं को करने के लिए एक आसान तरीका नहीं सीखना चाहेंगे? इस खंड की बाकी की इकाइयों में हम यही करेंगे। इस खंड के अधिकतर हिस्से में आप वे **तकनीकें सीखेंगे** जिनके उपयोग से विद्युत्-क्षेत्रों और स्थिर वैद्युत बलों की गणना आसान हो जाती है।

जर्मनी के गणितज्ञ और भौतिकीविद् कार्ल फ्रीड्रिख़ गाउस (1777 – 1855) प्राचीन काल से अब तक के महानतम गणितज्ञ माने जाते हैं। उन्होंने गणित के अनेक क्षेत्रों जैसेकि बीजगणित, संख्या सिद्धांत, विश्लेषण, अवकली ज्यामिति और भौतिकी के अनेक क्षेत्रों जैसेकि यांत्रिकी, स्थिर विद्युतिकी, चुंबकीय क्षेत्र, प्रकाशिकी आदि में अद्भुत योगदान दिया है। उन्हें इतिहास के अधिकतम प्रभावी गणितज्ञों में शामिल किया जाता है जिनके भौतिकी में भी उतने ही महत्वपूर्ण योगदान हैं।

इस इकाई में हम कूलॉम नियम और अध्यारोपण के सिद्धांत का एक विकल्प बताएंगे जिससे हम विविक्त आवेशों और आवेश वितरणों के कारण विद्युत्-क्षेत्रों को ज्ञात कर सकते हैं। यह है **गाउस नियम** जो विद्युत् आवेश वितरणों और विद्युत्-क्षेत्रों में एक संबंध देता है। इससे हमें सममित आवेश वितरणों से संबद्ध विद्युत्-क्षेत्रों को ज्ञात करने की एक आसान विधि मिलती है। यदि हमें किसी प्रदेश में विद्युत्-क्षेत्रों की जानकारी है तो हम इस नियम का उपयोग करके उन आवेश वितरणों का नेट आवेश ज्ञात कर सकते हैं जिनके कारण वे विद्युत्-क्षेत्र होते हैं।

गाउस नियम का अध्ययन हम एक नयी राशि की, जिसे **वैद्युत अभिवाह** कहते हैं, परिभाषा से शुरू करेंगे (भाग 6.2)। फिर हम भाग 6.3 में **गाउस नियम** समझाएंगे। आप सीखेंगे कि गाउस नियम विशेष तौर पर तब उपयोगी होता है जब उसे सममित निकायों पर लागू किया जाता है। हो सकता है कि यह अवधारणा आप जानते हों लेकिन इस इकाई में आप उसे दोबारा सीखेंगे। भाग 6.4 में हम इस नियम को **गोलीय सममिति** वाले निकायों पर लागू करेंगे और बिंदु आवेश, एकसमान गोलीय आवेश वितरण और एकसमानतः आवेशित गोलीय कोश के कारण विद्युत्-क्षेत्र ज्ञात करेंगे।

आप पूछ सकते हैं : गाउस नियम के इन प्रयोगों को सीखना आपके लिए क्यों महत्वपूर्ण है? इन अनुप्रयोगों के सबसे महत्वपूर्ण उपयोगों में से एक है संधारित्रों के विद्युत् क्षेत्रों की गणना करना जिससे उनकी धारिता की गणना की जा सकती है। आप अपने स्कूल की भौतिकी से जानते होंगे कि संधारित्र महत्वपूर्ण होते हैं क्योंकि उन्हें विद्युत् आवेश और विद्युत् ऊर्जा भंडारित करने के लिए इस्तेमाल किया जाता है। आप खंड 3 की इकाई 11 में इनके बारे में विस्तार से पढ़ेंगे। पृथ्वी एक विशाल गोलीय संधारित्र है जिसका हम सदैव उपयोग करते हैं और इसके बारे में आप भाग 6.5 में पढ़ेंगे।

अगली इकाई में हम इस चर्चा को जारी रखेंगे और गाउस नियम को बेलनी और समतलीय सममिति वाले निकायों पर लागू करेंगे जैसेकि एकसमान रेखा आवेश, एकसमानतः आवेशित बेलन और आवेश की समतल शीट। आप इस नियम के कुछ और अनुप्रयोगों के बारे में पढ़ेंगे और तब आपको इस नियम का महत्व समझ में आएगा।

उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप :

- वैद्युत अभिवाह की परिभाषा दे सकेंगे और किसी भी स्वेच्छ आवेश वितरण के लिए वैद्युत अभिवाह की गणना कर सकेंगे;
- गाउस नियम का कथन दे सकेंगे;
- बिंदु आवेश के कारण विद्युत्-क्षेत्र की गणना के लिए गाउस नियम को लागू कर सकेंगे;
- एकसमानतः आवेशित गोले के कारण विद्युत्-क्षेत्र की गणना के लिए गाउस नियम को लागू कर सकेंगे; और
- गाउस नियम का उपयोग कर एकसमानतः आवेशित गोलीय कोश के कारण विद्युत्-क्षेत्र ज्ञात कर सकेंगे।

6.2 वैद्युत अभिवाह

आपने इस पाठ्यक्रम की इकाई 4 के भाग 4.2.1 में सदिश क्षेत्र के अभिवाह की अवधारणा सीखी है। यहां हम उस अवधारणा को संक्षेप में फिर से समझाएंगे ताकि आप वैद्युत अभिवाह की अवधारणा समझ सकें। आप जानते हैं कि अभिवाह की परिभाषा किसी भी सदिश क्षेत्र के लिए दी जाती है लेकिन उसे तरल प्रवाह के लिए समझना सबसे आसान होता है। इसलिए हम इस चर्चा की शुरुआत में तरल प्रवाह के अभिवाह की अवधारणा को संक्षेप में दोहराएंगे।

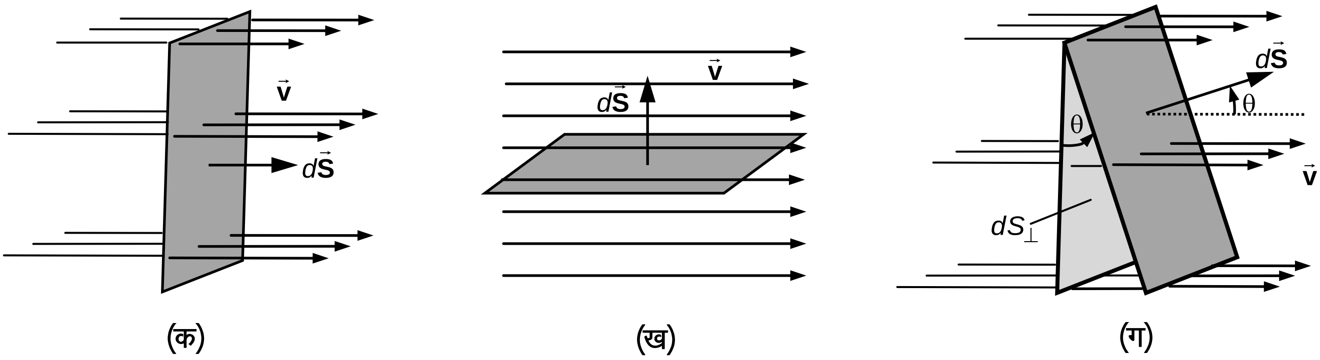
कल्पना करें कि पानी की धारा बह रही है या कोई तरल बह रहा है और उसमें मौजूद कणों का वेग एक वेग सदिश क्षेत्र द्वारा वर्णित किया जाता है। अब हम इस धारा में धारा प्रवाह की दिशा के लंबवत् एक छोटा तार का समतल लूप रखते हैं जिसका क्षेत्रफल dS है (चित्र 6.1क)। हम इस लूप का क्षेत्रफल अत्यधिक कम रखते हैं ताकि उसमें से होकर बहने वाले सभी तरल कणों का वेग अचर हो। परिभाषा से, लूप से होकर जाने वाले तरल का **आयतन अभिवाह** लूप के क्षेत्रफल से होकर जाने वाले तरल के **प्रवाह की दर** के बराबर होता है। आइए, हम उसका मान ज्ञात करें।

मान लें कि समय Δt में क्षेत्रफल dS वाले एक अत्यन्त छोटे लूप से होकर जाने वाले तरल का आयतन ΔV है। चूंकि लूप चपटा है और उसका क्षेत्रफल अत्यन्त कम मान का है, इसलिए हम उससे बहकर जाने वाले अत्यन्त कम तरल की चाल v को अचर मान सकते हैं। अतः, समयांतराल Δt में तरल द्वारा तय की गई दूरी या लंबाई है $\Delta x = v\Delta t$ । तब उस समयांतराल में लूप से होकर बहने वाले तरल का आयतन है :

$$\Delta V = dS\Delta x = dS\, v\,\Delta t \qquad (6.1)$$

अतः, एक अत्यल्प क्षेत्रफल dS से होकर जाने वाले तरल के प्रवाह की दर है :

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = v\, dS \qquad (6.2\text{क})$$



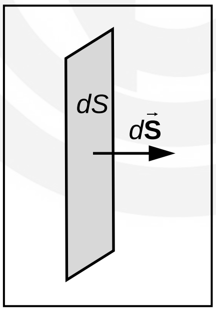
चित्र 6.1: धारा में रखा गया तार का एक लूप धारा प्रवाह या वेग क्षेत्र $\vec{v}$ की दिशा के क) लंबवत् और ख) समांतर; ग) वही लूप धारा प्रवाह से कोण θ पर रखा गया। इस चित्र के भाग (क) और (ग) में हमने धारा प्रवाह के लिए कुछ ही रेखाएं दिखाई हैं लेकिन लूप पूरी तरह धारा में डूबा हुआ है।

यह प्रवाह के **आयतन अभिवाह** के बराबर है जब चुना गया **अत्यल्प क्षेत्रफल, प्रवाह की दिशा के लंबवत् हो**।

अगर हम लूप को धारा प्रवाह की दिशा के समांतर रखें जैसाकि चित्र 6.1ख में दिखाया गया है, तब अभिवाह का मान क्या होगा? आप देख सकते हैं कि **तार के लूप के आर-पार** या क्षेत्रफल dS के आर-पार **कोई तरल प्रवाहित नहीं होगा**। तो इस स्थिति में आयतन अभिवाह शून्य होगा।

अगर हम लूप को तरल प्रवाह की दिशा से किसी कोण θ पर रखें जैसाकि चित्र 6.1ग में दिखाया गया है, तब अभिवाह का मान क्या होगा?

इस स्थिति में तरल, क्षेत्रफल के उसी घटक के आर-पार प्रवाहित होगा जो तरल प्रवाह की दिशा के लंबवत् है। इसका मान है $dS_\perp = dS\cos\theta$।



चित्र 6.2: क्षेत्रफल dS वाली किसी सतह के लिए क्षेत्रफल सदिश $d\vec{S}$ उस सतह के लंबवत् होता है (सतह के लंबवत् सदिश की दिशा के लिए इकाई 4 के भाग 4.3 को पढ़ें।)

अतः, समीकरण 6.2क में dS की जगह $dS\cos\theta$ रखने पर, तरल प्रवाह की दिशा से कोण θ पर रखे हुए लूप के आर-पार आयतन अभिवाह होगा :

$$v\,dS_\perp = v\,dS\cos\theta \qquad (6.2ख)$$

अब हम अदिश गुणनफल की परिभाषा का उपयोग करके समीकरणों (6.2क और ख) द्वारा दिए गए आयतन अभिवाह को निम्नवत् लिखते हैं :

$$\Phi_{dS} = \vec{\mathbf{v}}.d\vec{\mathbf{S}} \qquad (6.3)$$

जहां $\vec{\mathbf{v}}$ वेग क्षेत्र है और $d\vec{\mathbf{S}}$, लूप के क्षेत्रफल dS के संगत क्षेत्रफल सदिश है (चित्र 6.2 देखें)। क्षेत्रफल सदिश हमें क्षेत्रफल का परिमाण बताता है और उसकी दिशा उस क्षेत्रफल से होकर जाने वाले अभिवाह की दिशा बताती है। हमारे उदाहरण में (चित्र 6.1क और ग), अभिवाह की दिशा लूप के बायीं ओर से उसके दायीं ओर है। अगर हम क्षेत्रफल सदिश की दिशा इसके विपरीत चुनते हैं यानी दायीं ओर से बायीं ओर, तो अभिवाह की दिशा भी लूप के दायीं ओर से उसके बायीं ओर होगी। हम क्षेत्रफल सदिश की इनमें से कोई भी दिशा चुन सकते हैं लेकिन एक बार चुने जाने के बाद यह दिशा समान रहनी चाहिए और इसे स्पष्ट रूप से बताया जाना चाहिए। ध्यान दें कि समीकरण (6.3) का अदिश गुणनफल उन तीनों स्थितियों का वर्णन करता है जिनकी हमने बात की है : जब लूप प्रवाह के लंबवत् होता है तो $\theta = 90^\circ$ और

समीकरण (6.3) से आयतन अभिवाह होता है $v\,dS$, जो कि समीकरण (6.2क) ही है। यदि लूप प्रवाह के समांतर होता है तो $\theta = 0^\circ$ और लूप से होकर जाने वाला अभिवाह शून्य होता है। कोण θ के किसी अन्य मान के लिए समीकरण (6.3) से आयतन अभिवाह का मान है $v\,dS\cos\theta$, जो कि समीकरण (6.2ख) ही है।

आयतन अभिवाह की इस परिभाषा को किसी भी सदिश क्षेत्र के अभिवाह की परिभाषा, जिसमें विद्युत्-क्षेत्र भी शामिल है, के लिए विस्तारित किया जा सकता है। **एक स्थिर वैद्युत क्षेत्र में कुछ भी प्रवाहित नहीं होता** लेकिन हम विद्युत्-क्षेत्र के अभिवाह को समीकरण (6.3) के अनुरूप परिभाषित करते हैं।

परिभाषा से, क्षेत्रफल dS वाली एक समतल सतह से होकर जाने वाला, किसी विद्युत्-क्षेत्र $\vec{\mathbf{E}}$ का **वैद्युत अभिवाह** $d\Phi_E$ होता है :

$$d\Phi_E = \vec{\mathbf{E}}.d\vec{\mathbf{S}} \qquad (6.4)$$

जहां $d\vec{\mathbf{S}}$ परिमाण dS वाला क्षेत्रफल सदिश है **जिसकी दिशा सतह के लंबवत् है और सतह से बहिर्मुखी है**। ध्यान दें कि वैद्युत अभिवाह एक अदिश राशि है। समीकरण (6.4) में हमने वैद्युत अभिवाह की परिभाषा देने के लिए क्षेत्रफल dS वाली एक अल्प सपाट सतह ली है। आप पूछना चाहेंगे : **किसी स्वेच्छ आकार वाली सतह से होकर जाने वाला वैद्युत अभिवाह क्या होता है**?

उस स्थिति में हम उस सतह को बड़ी संख्या (माना कि n) में छोटी-छोटी सपाट सतहों में विभाजित करते हैं जिनके क्षेत्रफल सदिश $d\vec{\mathbf{S}}_i$ होते हैं जिनमें से प्रत्येक की दिशा सतह के एक ही ओर बहिर्मुखी होती है। माना कि क्षेत्रफल अवयव $d\vec{\mathbf{S}}_i$ से गुज़रने वाला विद्युत्-क्षेत्र $\vec{\mathbf{E}}_i$ है। चूंकि अभिवाह सदिश राशि है इसलिए सतह S से होकर जाने वाला वैद्युत अभिवाह वास्तव में ऐसी सभी समतल सतहों से होकर जाने वाले वैद्युत अभिवाहों का योग होगा :

$$\Phi_E = \sum_{i=1}^{n} \vec{\mathbf{E}}_i \,.d\vec{\mathbf{S}}_i \qquad (6.5)$$

अब हम उन समतल सतहों के आमाप को छोटा करते जाते हैं जिससे कि $n \to \infty$ और सामूहिक रूप से ये पृष्ठ अवयव, सतह S की ओर प्रवृत्त होते हैं। तब जैसाकि आपने इकाई 4 में सीखा है, समीकरण (6.5) में दिया गया योग एक सीमांत मान की ओर प्रवृत्त होता है जो कि सतह S से होकर जाने वाले वैद्युत अभिवाह के बराबर होता है। उस सीमा में हम इस योग को एक द्विविम पृष्ठ समाकल की तरह लिख सकते हैं और वैद्युत अभिवाह का मान होता है :

$$\Phi_E = \lim_{n\to\infty} \sum_i \vec{\mathbf{E}}_i \,.d\vec{\mathbf{S}}_i = \iint_S \vec{\mathbf{E}}.d\vec{\mathbf{S}} \qquad (6.6\text{क})$$

जैसाकि आपने इकाई 4 में सीखा है, समाकल के चिन्ह के नीचे का अक्षर S हमें बताता है कि यह समाकलन सम्पूर्ण पृष्ठ S पर है। यदि वह सतह बंद होती है तो हम पृष्ठ समाकल और समीकरण (6.6क) को इस तरह लिखते हैं :

$$\Phi_E = \oiint_S \vec{\mathbf{E}}.d\vec{\mathbf{S}} \qquad (6.6\text{ख})$$

इकाई 4 में आपने भिन्न स्थितियों के लिए पृष्ठ समाकलों की गणना करना सीखा है। समीकरणों (6.6क और ख) से आप देख सकते हैं कि वैद्युत अभिवाह को एक पृष्ठ समाकल के रूप में व्यक्त किया गया है। अब आप समीकरण (6.6ख) का प्रयोग करके एक पृष्ठ से होकर जाने वाले विद्युत्-क्षेत्र का वैद्युत अभिवाह ज्ञात करना चाहेंगे। हम एक बिंदु आवेश के बंद पृष्ठ से होकर जाने वाले वैद्युत अभिवाह की गणना का उदाहरण लेंगे। इस प्रक्रिया में हम गाउस नियम तक पहुंचेंगे।

उदाहरण 6.1 : बिंदु आवेश का वैद्युत अभिवाह

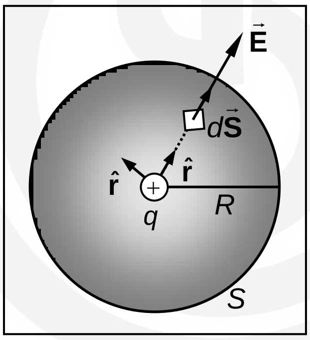
एक बिंदु आवेश q के विद्युत्-क्षेत्र के, आवेश को परिबद्ध करने वाले त्रिज्या R के गोले के बंद पृष्ठ S से गुज़रने वाले वैद्युत अभिवाह की गणना करें। दिया है कि आवेश गोले के केंद्र पर स्थित है।

हल ■ हम आवेश q को परिबद्ध करने वाले (त्रिज्या R के) गोले के बंद पृष्ठ से होकर जाने वाले वैद्युत अभिवाह की गणना के लिए समीकरण (6.6ख) का उपयोग करेंगे। समीकरण (6.6ख) से, बंद पृष्ठ से होकर गुज़रने वाला वैद्युत अभिवाह है :

$$\Phi_E = \oiint_S \vec{\mathbf{E}}.d\vec{\mathbf{S}}$$

जहां S त्रिज्या R वाले गोले का पृष्ठ है जो आवेश q को परिबद्ध करता है। आवेश गोले के केंद्र पर रखा है। समीकरण (5.6क) से, गोले की सतह पर स्थित किसी बिंदु पर आवेश q का विद्युत्-क्षेत्र है :

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R^2}\hat{\mathbf{r}}$$



चित्र 6.3: बिंदु आवेश q को परिबद्ध करने वाली गोलीय सतह से होकर जाने वाले वैद्युत अभिवाह की गणना।

जहां $\hat{\mathbf{r}}$ त्रिज्य दिशा में एकक सदिश है। अब गोले के लिए क्षेत्रफल सदिश $d\vec{\mathbf{S}}$ की दिशा उसकी सतह पर स्थित सभी बिंदुओं के लिए सतह के बहिर्मुखी अभिलंब की ओर होती है। चित्र 6.3 से (जिसमें एक ऐसा बिंदु दिखाया गया है), आप देख सकते हैं कि वह सदिश $\hat{\mathbf{r}}$ के अनुदिश है। इस तरह, हमें मिलता है :

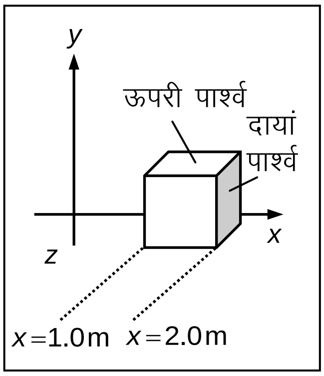
$$d\vec{\mathbf{S}} = dS\,\hat{\mathbf{r}} \quad \text{और} \quad \vec{\mathbf{E}}.d\vec{\mathbf{S}} = E\,dS\,\hat{\mathbf{r}}.\hat{\mathbf{r}} = E\,dS$$

अतः, बिंदु आवेश का, गोले की सतह से होकर जाने वाला वैद्युत अभिवाह है :

$$\oiint_S \vec{\mathbf{E}}.d\vec{\mathbf{S}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\iint dS = \left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\right)\times 4\pi R^2 = \frac{q}{\varepsilon_0} \qquad (6.7)$$

क्या आपने उदाहरण 6.1 में ध्यान दिया कि गोले की त्रिज्या निरस्त हो जाती है? ऐसा इसलिए है कि जहां क्षेत्र $\frac{1}{r^2}$ के अनुसार **घटता** है, पृष्ठ क्षेत्रफल r^2 के अनुसार **बढ़ता** है। अतः, उनका गुणनफल अचर रहता है। **याद रखें** कि हमें **यह परिणाम स्थिर वैद्युत बल क्षेत्र और विद्युत्-क्षेत्र की व्युत्क्रम-वर्ग प्रकृति के कारण मिलता है**। साथ ही, ध्यान दें कि हमने उदाहरण 6.1 में बिंदु आवेश का वैद्युत अभिवाह, आवेश को परिबद्ध करने वाली एक **गोलीय सतह** के लिए समीकरण (6.7) के रूप में प्राप्त किया है। लेकिन यह परिणाम आवेश को परिबद्ध करने वाली किसी भी आकार की सतह के लिए सत्य है। इसी से हमें गाउस नियम मिलता है। उसके बारे में आप अगले भाग में विस्तार से

पढ़ेंगे। लेकिन उसके पहले आप एक सरल स्थिति के लिए वैद्युत अभिवाह प्राप्त करें। इसके लिए बोध प्रश्न 1 करें।

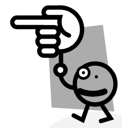


चित्र 6.4: बोध प्रश्न 1 के लिए चित्र।

बोध प्रश्न 1 – वैद्युत अभिवाह

भुजा 1.0 m वाले एक घन को एक विद्युत्-क्षेत्र $\vec{\mathbf{E}} = 8.0x\,\hat{\mathbf{i}} + 5.0\,\hat{\mathbf{j}}$ (NC^{-1} की इकाइयों में) में रखा जाता है जैसाकि चित्र 6.4 में दिखाया गया है। घन के दायें और ऊपरी पार्श्वों से होकर जाने वाले वैद्युत अभिवाह की गणना करें।

वैद्युत अभिवाह के बारे में आपको निम्नलिखित बातें हमेशा याद रखनी चाहिए।



कभी न भूलें

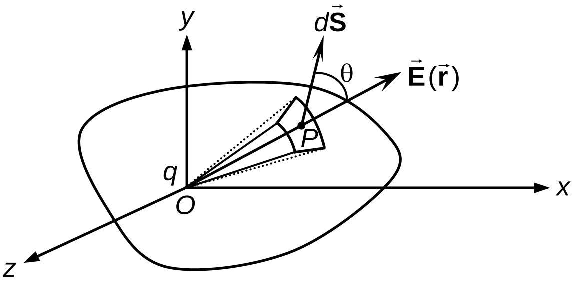
- **(क्षेत्रफल S) वाली किसी सतह से होकर जाने वाला वैद्युत अभिवाह, संपूर्ण सतह पर वैद्युत अभिवाह अवयवों ($\vec{\mathbf{E}}.d\vec{\mathbf{S}}$) के योग को व्यक्त करता है।**
- **प्रत्येक वैद्युत अभिवाह अवयव उस सतह पर एक छोटे समतल क्षेत्रफल अवयव और उस क्षेत्रफल अवयव के लंबवत् विद्युत्-क्षेत्र के घटक के गुणनफल को व्यक्त करता है।**
- **यह गुणनफल वास्तव में विद्युत्-क्षेत्र सदिश और क्षेत्रफल अवयव सदिश का अदिश गुणनफल है।**
- **वैद्युत अभिवाह किसी प्रवाह या परिवर्तन को अभिव्यक्त नहीं करता जिस तरह से आयतन अभिवाह करता है।**

आइए, अब हम गाउस नियम के बारे में पढ़ें।

6.3 गाउस नियम

उदाहरण 6.1 में हमने बिंदु आवेश को गोलीय सतह से परिबद्ध किया था और समीकरण (6.7) तक पहुंचे थे जो उस गोलीय सतह से होकर जाने वाले वैद्युत अभिवाह का उसमें परिबद्ध बिंदु आवेश q से संबंध स्थापित करता है। वास्तव में यह बिंदु आवेश के लिए गाउस नियम ही है। लेकिन हमने बिंदु आवेश को गोलाकार सतह से परिबद्ध किया है जो कि एक विशेष स्थिति है। **गाउस नियम किसी आवेश या आवेश वितरण को परिबद्ध करने वाली किसी भी स्वेच्छ सतह पर लागू होता है।** किसी आवेश या आवेश वितरण को परिबद्ध करने वाली किसी भी काल्पनिक सतह को **गाउसीय सतह** कहा जाता है। आम तौर पर, हम गाउसीय सतह का चुनाव इस तरह करते हैं कि हमारी गणनाएं आसान हो जाएं।

अतः, इस भाग में हम बिंदु आवेश को परिबद्ध करने वाली किसी भी स्वेच्छ सतह के लिए समीकरण (6.7) का व्यापकीकरण करेंगे और फिर गाउस नियम का औपचारिक कथन देंगे। तो आइए, पता लगाएं कि समीकरण (6.7) बिंदु आवेश को परिबद्ध करने वाली **किसी भी स्वेच्छ सतह** पर लागू होता है कि नहीं। मुक्त आकाश में किसी धनात्मक बिंदु आवेश का विद्युत्-क्षेत्र लें। कल्पना करें कि आवेश को **स्वेच्छ आकार** वाली **बंद गाउसीय सतह** S से परिबद्ध किया गया है (चित्र 6.5)। चित्र 6.5 से ध्यान दें कि हमने निर्देशांक तंत्र का मूल बिंदु आवेश की स्थिति पर लिया है। मान लें कि गाउसीय पृष्ठ पर स्थित बिंदु P का स्थिति सदिश $\vec{\mathbf{r}} = r\,\hat{\mathbf{r}}$ है।



चित्र 6.5: एक स्वेच्छ सतह से घेरे गए बिंदु आवेश के लिए गाउस नियम।

हम गाउसीय सतह के बिंदु P पर केंद्रित एक अल्प क्षेत्रफल अवयव $d\vec{\mathbf{S}}$ चुनते हैं। जैसाकि आप समीकरण (5.6क) से जानते हैं, बिंदु P पर विद्युत्-क्षेत्र का मान है :

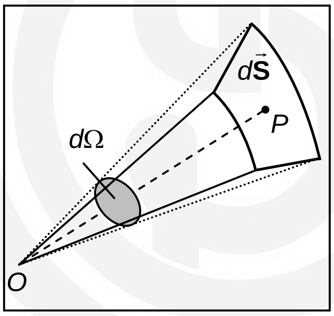
$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{\mathbf{r}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\frac{\vec{\mathbf{r}}}{r} \tag{6.8}$$

तब समीकरण (6.4) से, $d\vec{\mathbf{S}}$ से होकर गुज़रने वाला वैद्युत अभिवाह अवयव है :

$$d\Phi_E = \vec{\mathbf{E}}.d\vec{\mathbf{S}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^3}\vec{\mathbf{r}}.d\vec{\mathbf{S}} \tag{6.9}$$

अब आप जानते हैं कि यदि $\vec{\mathbf{r}}$ और $\vec{\mathbf{r}}.d\vec{\mathbf{S}}$ के बीच का कोण θ हो तो,

$$\vec{\mathbf{r}}.d\vec{\mathbf{S}} = r\,dS\cos\theta \qquad (6.10\text{क})$$



चित्र 6.6: बिंदु O पर क्षेत्रफल अवयव $d\vec{\mathbf{S}}$ द्वारा अंतरित घन कोण $d\Omega$। घन कोण की परिभाषा इकाई 4 के भाग 4.3.5 में दी गई है।

आप सदिश बीजगणित से यह भी जानते हैं कि $dS\cos\theta$, $\vec{\mathbf{r}}$ के अनुदिश $d\vec{\mathbf{S}}$ का प्रक्षेप है। इकाई 4 के भाग 4.3.5 से आप जानते हैं कि परिभाषा से,

$$\left(\frac{dS\cos\theta}{r^2}\right) = d\Omega \qquad (6.10\text{ख})$$

बिंदु O पर जिस पर आवेश स्थित है, क्षेत्रफल अवयव $d\vec{\mathbf{S}}$ द्वारा अंतरित घन कोण ($d\Omega$) है (चित्र 6.6)। तब समीकरण (6.10ख) का उपयोग कर हम समीकरण (6.9) को इस तरह लिख सकते हैं :

$$d\Phi_E = \vec{\mathbf{E}}.d\vec{\mathbf{S}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r\,dS\cos\theta}{r^3} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}d\Omega \qquad (6.11\text{क})$$

पृष्ठ S से होकर जाने वाला कुल वैद्युत अभिवाह हमें संपूर्ण बंद पृष्ठ पर निम्नवत् समाकलन करके प्राप्त होता है :

$$\Phi_E = \oint\!\!\oint_S \vec{\mathbf{E}}.d\vec{\mathbf{S}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\oint\!\!\oint_S d\Omega \qquad (6.11\text{ख})$$

अब चूंकि पृष्ठ S बिंदु O को घेरे हुए है और किसी बिंदु के चारों ओर कुल घन कोण 4π के बराबर होता है (इकाई 4 का भाग 4.3.5 पढ़ें), इसलिए हम लिख सकते हैं :

$$\oint\!\!\oint_S d\Omega = 4\pi \qquad (6.11\text{ग})$$

अतः, हम समीकरण (6.11ख) को इस तरह लिख सकते हैं :

$$\Phi_E = \oint\!\!\oint_S \vec{\mathbf{E}}.d\vec{\mathbf{S}} = \frac{q}{\varepsilon_0} \tag{6.12}$$

समीकरण (6.12) समीकरण (6.7) जैसा ही है जो कि एक गोलीय सतह के लिए प्राप्त किया गया था। आइए, देखें कि हम समीकरण (6.12) को आवेशों के वितरण के लिए विस्तारित कर सकते हैं कि नहीं। मान लें कि गोले के केंद्र पर स्थित एकल आवेश की बजाय समष्टि के किसी प्रदेश में अनेक आवेश स्थित हैं। अध्यारोपण के सिद्धांत [समीकरण (5.11)] से आप जानते हैं कि नेट विद्युत्-क्षेत्र सभी आवेशों के व्यष्टिगत विद्युत्-क्षेत्रों का सदिश योग होता है :

$$\vec{\mathbf{E}} = \sum_j \vec{\mathbf{E}}_j \tag{6.13}$$

परिभाषा से [समीकरण (6.6ख)], इन सभी आवेशों को परिबद्ध करने वाली एक बंद सतह से होकर जाने वाले वैद्युत अभिवाह का मान होता है :

$$\Phi_E = \oiint_S \vec{\mathbf{E}}.d\vec{\mathbf{S}} = \sum_j \left(\oiint_S \vec{\mathbf{E}}_j.d\vec{\mathbf{S}}\right) = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_j (q_j) \tag{6.14}$$

जहां हमने $\vec{\mathbf{E}}$ का मान समीकरण (6.13) से लिया है और आवेशों के लिए समीकरण (6.12) का उपयोग किया है यानी हमने लिखा है :

$$\oiint_S \vec{\mathbf{E}}_j.d\vec{\mathbf{S}} = \frac{q_j}{\varepsilon_0} \tag{6.15क}$$

आइए, हम इस सतह द्वारा परिबद्ध किए गए सभी आवेशों के योग को Q_{encl} से व्यक्त करें यानी Q_{encl} पृष्ठ S द्वारा परिबद्ध कुल या नेट आवेश है :

$$Q_{encl} = \sum_j (q_j) \tag{6.15ख}$$

तब हम समीकरण (6.14) को इस तरह लिख सकते हैं :

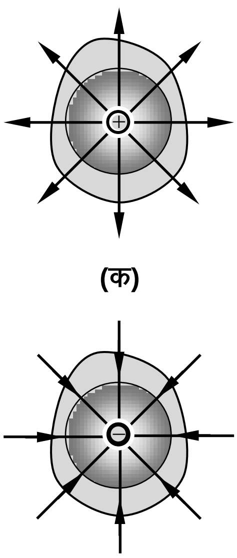
$$\oiint_S \vec{\mathbf{E}}.d\vec{\mathbf{S}} = \frac{Q_{encl}}{\varepsilon_0} \tag{6.16}$$

समीकरण (6.16) **गाउस नियम** का गणितीय कथन है। आइए, अब हम गाउस नियम का औपचारिक कथन दें।

गाउस नियम

गाउस नियम बताता है कि किसी काल्पनिक बंद पृष्ठ S जिसे **गाउसीय पृष्ठ** कहते हैं, से होकर जाने वाला नेट वैद्युत अभिवाह उस पृष्ठ द्वारा परिबद्ध किए गए कुल आवेश (Q_{encl}) के समानुपाती होता है। SI इकाइयों में इसका मान $\frac{Q_{encl}}{\varepsilon_0}$ होता है। नेट आवेश उस गाउसीय सतह द्वारा परिबद्ध किए गए सभी आवेशों का बीजगणितीय योग होता है यानी वह योग जिसमें आवेशों के चिन्ह शामिल हों। गणितीय रूप में हम इस नियम को ऐसे लिखते हैं :

$$\oiint_S \vec{\mathbf{E}}.d\vec{\mathbf{S}} = \frac{Q_{encl}}{\varepsilon_0} \tag{6.16}$$



चित्र 6.7: विभिन्न आकार के पृष्ठों से गुज़रने वाली विद्युत्-क्षेत्र रेखाओं की संख्या समान होती है। यहां धनात्मक और ऋणात्मक आवेशों के लिए दो गाउसीय पृष्ठ दिखाए गए हैं जिनमें से एक गोलाकार है और दूसरा स्वेच्छ आकार का है।

समीकरण (6.16) हमें बताता है कि किसी बंद पृष्ठ से गुज़रने वाले विद्युत्-क्षेत्र का अभिवाह समान होगा भले ही उसका आकार कुछ भी क्यों न हो। वह उसके द्वारा परिबद्ध किए गए आवेश के समानुपाती होता है। यह बात एक बिंदु आवेश के लिए समझना आसान होता है अगर हम विद्युत्-क्षेत्र को एक सतह से होकर गुज़रने वाली क्षेत्र रेखाओं द्वारा दर्शाएं। उस आवेश को परिबद्ध करने वाली किसी भी आकार की सतह से उतनी ही क्षेत्र रेखाएं गुज़रेंगी जितनी कि एक गोले की सतह से (चित्र 6.7)। किसी भी बंद पृष्ठ जिसमें आवेश q परिबद्ध हो, से होकर गुज़रने वाला अभिवाह $\dfrac{q}{\varepsilon_0}$ होगा।

समीकरण (6.16) गाउस नियम का समाकल रूप है। हम डाइवर्जेन्स प्रमेय जिसके बारे में आपने इकाई 4 में पढ़ा है, का उपयोग करके **गाउस नियम को अवकल रूप** में भी लिख सकते हैं। इसके लिए हम पृष्ठ द्वारा परिबद्ध आवेश को आयतन आवेश घनत्व ρ के पदों में लिखते हैं और फिर उसे समीकरण (6.16) में रखते हैं। तब हमें मिलता है :

$$Q_{encl} = \iiint_V \rho\, dV \tag{6.17क}$$

और
$$\oiint_S \vec{\mathbf{E}}.d\vec{\mathbf{S}} = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_V \rho\, dV \tag{6.17ख}$$

अब आप इकाई 4 से डाइवर्जेन्स प्रमेय याद करें :

$$\oiint_S \vec{\mathbf{E}}.d\vec{\mathbf{S}} = \iiint_V \vec{\nabla}.\vec{\mathbf{E}}\, dV \tag{6.17ग}$$

हम समीकरण (6.17ग) से $\oiint_S \vec{\mathbf{E}}.d\vec{\mathbf{S}}$ का मान समीकरण (6.17ख) के बायीं ओर लिखते हैं। तब समीकरण (6.17ख) हो जाता है :

$$\iiint_V \vec{\nabla}.\vec{\mathbf{E}}\, dV = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_V \rho\, dV \tag{6.17घ}$$

चूंकि समीकरण (6.17घ) किसी भी आयतन के लिए लागू होता है, अतः, दोनों ओर के समाकल्य समान होने चाहिए और हमें मिलता है :

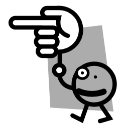
$$\boxed{\vec{\nabla}.\vec{\mathbf{E}} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho} \tag{6.18}$$

समीकरण (6.18) **गाउस नियम का अवकली रूप** है।

अवकली रूप में गाउस नियम को लागू करना आसान होता है। **लेकिन ध्यान दें कि हमने इसे केवल आयतन आवेश घनत्व के लिए लिखा है। चूंकि गाउस नियम का समाकल रूप, रेखा, पृष्ठ और आयतन आवेशों पर लागू किया जा सकता है, अतः, उसका अनुप्रयोग ज़्यादा किया जा सकता है।**

अगले भाग में हम गोलीय सममिति वाले निकायों पर गाउस नियम के कुछ अनुप्रयोगों पर चर्चा करेंगे। लेकिन उससे पहले आप गाउस नियम के बारे में निम्नलिखित बातें याद कर लें और फिर अपनी समझ को परखने के लिए एक बोध प्रश्न करें।

- **समीकरण (6.16) में** Q_{encl} पृष्ठ द्वारा परिबद्ध **नेट आवेश** है **जिसमें आवेशों के बीजीय चिन्ह को शामिल किया गया है** (उस स्थिति के लिए जहां अनेक आवेश हों)। अतः, **यदि किसी पृष्ठ में समान परिमाण और विपरीत चिन्ह वाले आवेश परिबद्ध हों तो उससे होकर गुज़रने वाला नेट वैद्युत अभिवाह शून्य होता है**।
- गाउस नियम के कथन से यह स्पष्ट है कि **बंद पृष्ठ के बाहर स्थित आवेश** Q_{encl} **में शामिल नहीं हैं। यदि बंद पृष्ठ में परिबद्ध आवेश शून्य हो या सभी आवेश बंद पृष्ठ के बाहर स्थित हों तो उस पृष्ठ से होकर जाने वाला वैद्युत अभिवाह शून्य होता है**। इसका अर्थ है कि ऐसे किसी पृष्ठ से होकर जाने वाला विद्युत्-क्षेत्र शून्य होता है।
- हम इस नियम का उपयोग करके किसी **बंद पृष्ठ द्वारा परिबद्ध नेट आवेश की गणना कर सकते हैं** यदि हमें आवेशों को परिबद्ध करने वाले पृष्ठ से गुज़रने वाला नेट वैद्युत अभिवाह ज्ञात हो।
- **इन गणनाओं में बंद पृष्ठ द्वारा परिबद्ध आवेशों के आकार और स्थिति मायने नहीं रखते, वे कुछ भी हो सकते हैं। गणना में केवल बंद पृष्ठ द्वारा परिबद्ध कुल आवेश और उसका चिन्ह मायने रखते हैं**। इसी तथ्य के कारण कूलॉम नियम की तुलना में गाउस नियम का उपयोग करके विद्युत् क्षेत्रों की गणना काफ़ी आसान हो जाती है।
- वास्तव में, गाउस नियम, कूलॉम नियम और अध्यारोपण के सिद्धांत का परिणाम है। इस नियम से हमें उतनी ही जानकारी मिलती है जितनी कूलॉम नियम से। यह नियम स्थिर वैद्युत बल की व्युत्क्रम-वर्ग प्रकृति का परिणाम है। उसके बिना अंश और हर से r^2 निरस्त नहीं होता। तब कुल अभिवाह चुने हुए पृष्ठ पर निर्भर करता न कि केवल परिबद्ध आवेश पर।



कभी न भूलें

बोध प्रश्न 2 – गाउस नियम

क) क्या हम गाउस नियम को चित्रों 6.1क, ख और ग के पृष्ठों पर लागू कर सकते हैं?

ख) एक बिंदु आवेश गोलाकार गाउसीय पृष्ठ द्वारा परिबद्ध है। क्या पृष्ठ से होकर जाने वाला वैद्युत अभिवाह परिवर्तित होगा

i) यदि गाउसीय पृष्ठ एक बेलन या घन का बंद पृष्ठ हो?

ii) यदि गोले की जगह उसके आयतन के दसवें हिस्से वाला घन हो?

iii) यदि गोले के केंद्र के बजाय आवेश उसके भीतर किसी अन्य बिंदु पर हो?

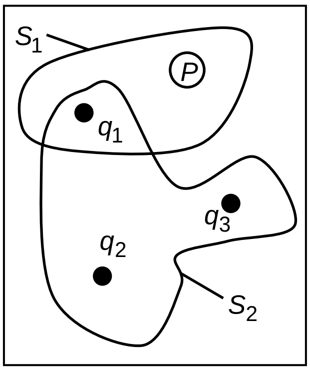
iv) यदि आवेश को गाउसीय पृष्ठ के बाहर कर दिया जाए?

v) यदि एक अन्य आवेश को गाउसीय पृष्ठ के अंदर रख दिया जाए?

vi) यदि एक अन्य आवेश को गाउसीय पृष्ठ के बाहर रख दिया जाए?

ग) त्रिज्या 0.5 m वाले एक बंद गोलाकार गाउसीय पृष्ठ से, जो एक आवेशित कण को परिबद्ध करता है, होकर जाने वाला वैद्युत अभिवाह $500\,\mathrm{N m^2 C^{-1}}$ है। कण पर आवेश का मान ज्ञात करें। यदि पृष्ठ की त्रिज्या आधी कर दी जाए तो उससे होकर जाने वाले वैद्युत अभिवाह का मान क्या होगा?

घ) चित्र 6.8 में दिखाये गए बंद पृष्ठों S_1 और S_2 के लिए नेट वैद्युत अभिवाह ज्ञात करें जबकि दिया गया है कि इन कणों पर विद्युत् आवेश क्रमशः $q_1 = +3.1\,\mathrm{nC}$, $q_2 = -5.9\,\mathrm{nC}$ और $q_3 = -3.1\,\mathrm{nC}$ हैं। पृष्ठ S_1 द्वारा परिबद्ध कण P पर कोई आवेश नहीं है।



चित्र 6.8: बोध प्रश्न 2घ के लिए चित्र।

आप शायद सोच रहे होंगे : **हमें विद्युत्-क्षेत्रों की गणना करने के लिए कूलॉम नियम के अलावा किसी अन्य विधि की आवश्यकता क्यों पड़ती है**? ऐसा इसलिए है कि हम गाउस नियम का उपयोग करके बहुत ही आसान तरीके से सममित आवेश वितरणों के कारण विद्युत् क्षेत्रों की गणना कर सकते हैं। इस बात को कि सममित संतत आवेश वितरणों के कारण विद्युत् क्षेत्रों की गणना करने के लिए गाउस का नियम एक बहुत शक्तिशाली विधि है, आप अगले भाग में और अगली इकाई में समझेंगे। आइए, इस बात को हम और अधिक विस्तार से समझाएं।

6.3.1 गाउस नियम और सममित आवेश वितरण

आइए पहले हम समझाएं : **सममित आवेश वितरण क्या होते हैं**?

सममित आवेश वितरण, आवेशों के वे वितरण/समूह होते हैं जो किसी रूपांतरण के बाद अपरिवर्तित (या निश्चर) रहते हैं या वैसे ही दिखते हैं जैसे वे रूपांतरण के पहले दिखते थे।

इन आवेश वितरणों को किसी अक्ष के अनुदिश स्थानांतरित किया जा सकता है, किसी अक्ष के परितः परावर्तित या घूर्णित किया जा सकता है और वे फिर भी वैसे ही दिखते हैं जैसे वे रूपांतरण के पहले दिखते थे।

भौतिकी में सममिति का वास्तविक तात्पर्य यह है कि किसी रूपांतरण के अधीन कोई निकाय या पिंड अपरिवर्तित (या निश्चर) रहता है। आप सममित पिंडों के कई उदाहरण जानते हैं जैसेकि एक सरल रेखा, वर्ग, समतल, गोला, बेलन आदि। आवेश वितरणों की सममितियों के कारण उनके लिए वैद्युत अभिवाह और विद्युत्-क्षेत्रों की गणनाएं बहुत आसान हो जाती हैं।

गाउस नियम को लागू करने के लिए हम तीन प्रकार की सममितियों की चर्चा करेंगे :

1. गोलीय सममिति
2. बेलनी सममिति
3. समतलीय सममिति

हम इस इकाई और अगली इकाई में सममित आवेश वितरणों पर गाउस नियम को लागू करते हुए इनमें से प्रत्येक सममिति की चर्चा करेंगे।

इस इकाई के अगले तीन भागों में आप गाउस नियम को लागू करना सीखेंगे। आप बिंदु आवेश के कारण विद्युत्-क्षेत्र की गणना करना भी सीखेंगे। साथ ही, आप गाउस नियम का उपयोग करके **गोलीय सममिति** वाले आवेश वितरणों जैसेकि एकसमानतः आवेशित गोले और गोलीय कोश के कारण विद्युत्-क्षेत्र की गणना करना सीखेंगे।

अगली इकाई में हम अनंत एकसमान रेखा आवेश, जिसमें बेलनी सममिति होती है और आवेश की एक समतल शीट जिसमें समतलीय सममिति होती है, पर गाउस नियम को लागू करेंगे। इन दोनों सममितियों को हम अगली इकाई में समझाएंगे।

यहां हम इस सवाल का जवाब देंगे : **गोलीय सममिति वाला आवेश वितरण क्या होता है**?

किसी आवेश वितरण को **गोलीय सममिति** वाला आवेश वितरण तब कहा जाता है जब वह निम्नलिखित स्थितियों में **अपरिवर्तित (निश्चर)** रहता है :

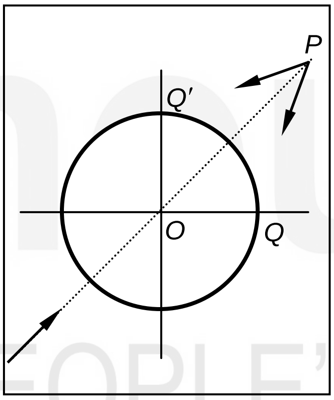
- जब **उसे उसके केंद्र से गुज़रने वाले किसी भी अक्ष के परितः घूर्णित किया जाता है**। तब हम कहते हैं कि उस अक्ष के परितः आवेश वितरण में **घूर्णी सममिति** है।
- जब **उसे उसके केंद्र से गुज़रने वाले किसी भी तल के परितः परावर्तित किया जाता है।** यह **परावर्तन सममिति** है।

ऐसे गोलीय सममिति वाले आवेश वितरणों के लिए हम गोलाकार गाउसीय पृष्ठ चुनते हैं। बिंदु आवेश के लिए गाउसीय पृष्ठ का केंद्र आवेश की स्थिति पर होता है। किसी गोलीय आवेश वितरण या गोलीय कोश के लिए गाउसीय पृष्ठ उनके संकेंद्री होते हैं।

गोलीय सममिति वाले आवेश वितरण के कारण विद्युत्-क्षेत्र की दिशा त्रिज्य दिशा में होती है। धनात्मक आवेश के लिए यह गोले के केंद्र से त्रिज्यतः बहिर्मुखी होती है और ऋणात्मक आवेश के लिए यह त्रिज्यतः अंतर्मुखी होती है। विद्युत्-क्षेत्र का परिमाण गोले के केंद्र से केवल उसकी दूरी r पर निर्भर करता है।

आप पूछ सकते हैं : ऐसा क्यों है? आइए, इस सवाल का जवाब गोलीय सममिति वाले आवेश वितरण के कारण विद्युत्-क्षेत्र की दिशा और परिमाण दोनों के लिए दें।

आइए, पहले इस सवाल का जवाब देते हैं : **एक गोलीय सममिति वाले आवेश वितरण के कारण विद्युत्-क्षेत्र की दिशा त्रिज्य दिशा में क्यों होती है यानी उसकी दिशा गोले के केंद्र से परे या केंद्र की ओर त्रिज्य दिशा में क्यों होती है**?



चित्र 6.9: यदि विद्युत्-क्षेत्र की दिशा त्रिज्य दिशा में न हो तो वह गोले के घूर्णन या किसी अन्य सममिति रूपांतरण के अधीन बदल जाएगी।

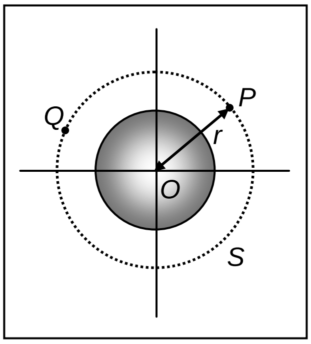
मान लें कि किसी गोले के बाहर स्थित किसी बिंदु P पर विद्युत्-क्षेत्र **त्रिज्य दिशा में नहीं है** यानी वह गोले की त्रिज्या के अनुदिश नहीं है। मान लें कि वह किसी अन्य दिशा में है जैसेकि गोले की सतह पर स्थित बिंदु Q की ओर रेखा PQ के अनुदिश है (चित्र 6.9 देखें)। अब मान लें कि हम बिंदु P से गुज़रने वाले अक्ष के परितः गोले को 180° के कोण से घूर्णित करते हैं। तब बिंदु Q की स्थिति गोले पर बिंदु Q' पर हो जाती है। ध्यान दें कि गोला ज्यों का त्यों रहता है और बिंदु P भी उसी स्थिति पर रहता है। लेकिन अब विद्युत्-क्षेत्र की दिशा बदल जाती है। वह रेखा PQ' के अनुदिश बिंदु Q' की ओर हो जाती है।

यह एक विरोधाभास है क्योंकि आप जानते हैं कि **एक ही आवेश वितरण के कारण किसी एक बिंदु पर विद्युत्-क्षेत्र की एक ही दिशा हो सकती है** : उसकी दो भिन्न दिशाएं नहीं हो सकतीं। गोलीय आवेश वितरण पर किसी भी सममिति संक्रिया के लिए **किसी बिंदु पर** उसके कारण विद्युत्-क्षेत्र एक ही दिशा में कब रहेगा? ऐसा तभी होगा **जब विद्युत्-क्षेत्र की दिशा उस बिंदु से गुज़रने वाले गोले के घूर्णन अक्ष के अनुदिश हो**। इसका अर्थ यह है कि उसकी दिशा गोले के घूर्णन अक्ष (या उसकी त्रिज्या) के अनुदिश होगी यानी विद्युत्-क्षेत्र की दिशा **त्रिज्य दिशा** में होगी।

आइए, अब हम इस सवाल का जवाब दें : **एक सममित गोलीय आवेश वितरण के कारण किसी बिंदु पर विद्युत्-क्षेत्र का परिमाण सममिति केंद्र (इस स्थिति में गोले के केंद्र) से उसकी दूरी r पर ही क्यों निर्भर करता है**?

चित्र 6.10 को ध्यान से समझें। मान लें कि हमें गोले से दूरी r पर स्थित बिंदु P पर विद्युत्-क्षेत्र ज्ञात करना है। उस बिंदु से गुज़रने वाली त्रिज्या r की एक गोलीय सतह S

लें जो गोलीय आवेश वितरण से संकेंद्री हो। अब सतह S पर कोई दो बिंदु P और Q लें। ध्यान दें कि इन बिंदुओं के त्रिज्य निर्देशांक समान हैं लेकिन कोणीय निर्देशांक भिन्न हैं।



चित्र 6.10: गोलीय पृष्ठ S पर स्थित किसी बिंदु P पर विद्युत्-क्षेत्र का परिमाण केवल पृष्ठ की त्रिज्या r पर निर्भर करता है यानी बिंदु P के त्रिज्य निर्देशांक पर। गोलीय सममिति के कारण वह बिंदु के कोणीय निर्देशांकों पर निर्भर नहीं करता।

आइए, अब हम पूछें : **यदि विद्युत्-क्षेत्र का परिमाण बिंदुओं P और Q के कोणीय निर्देशांकों पर निर्भर करता हो तो क्या होगा** ? यदि ऐसा हो, तो गोलीय आवेश वितरण के कारण विद्युत्-क्षेत्र के परिमाण के मान इन दोनों बिंदुओं पर भिन्न होंगे।

लेकिन यह एक विरोधाभास है **क्योंकि गोलीय सममिति के कारण पृष्ठ S के सभी बिंदुओं के लिए गोलीय आवेश वितरण ठीक एक-सा दिखता है**। अतः, **इन दोनों बिंदुओं के लिए गोलीय आवेश वितरण समान है**। अतः, <u>समान आवेश वितरण</u> के लिए पृष्ठ S **पर स्थित भिन्न बिंदुओं पर विद्युत्-क्षेत्र का परिमाण भिन्न नहीं हो सकता**। उसका मान गोलीय पृष्ठ S के **सभी बिंदुओं** पर यानी आवेश वितरण के केंद्र से बराबर की दूरी r पर स्थित सभी बिंदुओं पर समान होना चाहिए।

अतः, एक नियत त्रिज्या वाले गोलीय पृष्ठ S पर स्थित **किसी बिंदु पर विद्युत्-क्षेत्र का परिमाण उस बिंदु के कोणीय निर्देशांकों पर निर्भर नहीं कर सकता**। वह गोलीय पृष्ठ की त्रिज्या के मान पर ही निर्भर करता है यानी बिंदु के त्रिज्य निर्देशांक पर जो कि आवेश वितरण के केंद्र से उस बिंदु की दूरी के बराबर है। अतः, हमें मिलता है

$$E(\vec{\mathbf{r}}) = E(r) \quad \text{गोलीय सममिति वाले आवेश वितरण के लिए}$$

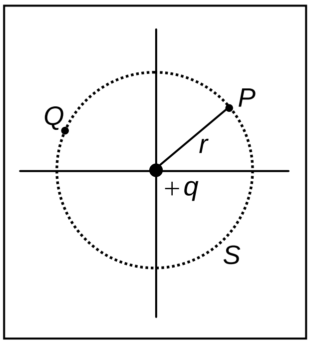
अतः, जहां तक विद्युत्-क्षेत्र के परिमाण का सवाल है, त्रिज्या r वाले गोलीय पृष्ठ S पर स्थित सभी बिंदु समकक्ष हैं। आपको गोलीय सममिति वाले आवेश वितरणों के लिए निम्न बातें सदा याद रखनी चाहिए :

कभी न भूलें

- **गोलीय आवेश वितरण के कारण विद्युत्-क्षेत्र की दिशा त्रिज्य दिशा में होती है।**
- **किसी बिंदु पर गोलीय आवेश वितरण के कारण विद्युत्-क्षेत्र का परिमाण केवल आवेश वितरण के केंद्र से उस बिंदु की दूरी r पर निर्भर करता है।**

आइए, अब हम बिंदु आवेश के कारण विद्युत्-क्षेत्र ज्ञात करने के लिए गाउस नियम को लागू करें।

6.4 बिंदु आवेश के कारण विद्युत्-क्षेत्र



चित्र 6.11: धनात्मक बिंदु आवेश के कारण विद्युत्-क्षेत्र ज्ञात करने के लिए गोलाकार गाउसीय पृष्ठ S।

आइए, गाउस नियम का उपयोग करके हम एक धनात्मक बिंदु आवेश q के कारण उससे दूरी r पर स्थित बिंदु P पर विद्युत्-क्षेत्र ज्ञात करें।

हम समीकरण (6.16) द्वारा दिए गए गाउस नियम में $Q_{encl} = q$ रखते हैं।

हम त्रिज्या r का बिंदु P से गुज़रने वाला एक गोलीय गाउसीय पृष्ठ खींचते हैं जिसके केंद्र पर आवेश स्थित है (चित्र 6.11)। अब आपने भाग 6.3.1 में सीखा है कि गोलीय सममिति के लिए धनात्मक आवेश के कारण विद्युत्-क्षेत्र की दिशा त्रिज्यतः बहिर्मुखी होती है यानी विद्युत्-क्षेत्र की दिशा गोले के पृष्ठ के लंबवत् होती है। गोले के किसी भी पृष्ठ क्षेत्रफल अवयव के लिए क्षेत्रफल सदिश $d\vec{\mathbf{S}}$ भी गोले के पृष्ठ के लंबवत् होता है।

अतः, वह विद्युत्-क्षेत्र $\vec{\mathbf{E}}$ के समांतर होता है और $\vec{\mathbf{E}}.d\vec{\mathbf{S}} = E\,dS$ होता है। तब गाउस नियम हो जाता है :

$$\oiint_S \vec{\mathbf{E}}.d\vec{\mathbf{S}} = \oiint_S E\,dS = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

गोलीय सममिति के कारण गोलीय पृष्ठ के सभी बिंदुओं पर आवेश के कारण विद्युत्-क्षेत्र का परिमाण समान होगा और हम S के लिए इसे अचर मान सकते हैं। अतः, हम E को समाकल से बाहर लेकर लिख सकते हैं :

$$\oiint_S E\,dS = E \oiint_S dS = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

अतः, इस समाकल का मान गोलीय पृष्ठ के क्षेत्रफल यानी $4\pi r^2$ के बराबर है। इस तरह,

$$E\ 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

या $$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}$$

और $$\vec{\mathbf{E}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{\mathbf{r}} \qquad (6.19)$$

क्या आपने ध्यान दिया कि समीकरण (6.19) इकाई 5 के समीकरण (5.6क) जैसा ही है जिसे हमने कूलॉम नियम से प्राप्त किया था? इसका अर्थ यह है कि बिंदु आवेश के कारण विद्युत्-क्षेत्र के लिए गाउस नियम और कूलॉम नियम से हमें एक ही परिणाम मिलता है। गाउस नियम आवेश वितरणों के लिए भी उतना ही सत्य है। यह आपने समीकरण (6.16) तक पहुंचने की चर्चा में देख ही लिया है।

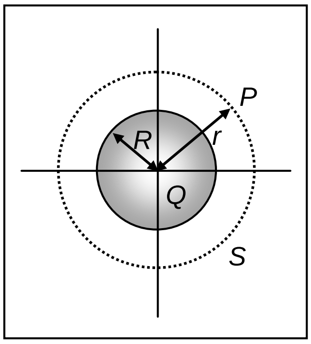
किसी आवेश वितरण के कारण विद्युत्-क्षेत्र का मान समान रहेगा चाहे हम उसे गाउस नियम से या कूलॉम नियम से परिकलित करें। इन दोनों नियमों में केवल एक ही अंतर है : एक से अधिक विविक्त बिंदु आवेशों के वितरण के लिए कूलॉम नियम का उपयोग ज़्यादा आसान होता है। लेकिन यदि आवेश वितरण संतत और सममित हो तब गाउस नियम का उपयोग करना बहुत आसान होता है। यह बात आपने इस भाग में बिंदु आवेश के लिए सीखी है और अगले दो भागों में और अगली इकाई में अन्य आवेश वितरणों के लिए आप यही सीखेंगे। वरना ये दोनों नियम एक-दूसरे से स्वतंत्र नियम नहीं हैं बल्कि एक ही नियम के दो भिन्न रूप हैं।

6.5 एकसमानतः आवेशित गोले के कारण विद्युत्-क्षेत्र

आइए, अब हम गाउस नियम को एक गोलीय आवेश वितरण पर लागू करें जिसका आयतन आवेश घनत्व एकसमान है। आप यह सत्यापित कर सकते हैं कि आवेशित गोले में गोलीय सममिति है। यह **अपरिवर्तित (निश्चर)** रहता है जब उसे

- **उसके केंद्र से गुज़रने वाले किसी अक्ष के प्रति घूर्णित किया जाता है**; और
- **उसके केंद्र से गुज़रने वाले किसी समतल के परितः परावर्तित किया जाता है।**

गोलीय सममिति वाले किसी आवेश वितरण का जैसे आवेशित गोले का **आयतन आवेश घनत्व** (प्रति एकक आयतन आवेश) गोले के केंद्र से दूरी r पर स्थित सभी बिंदुओं पर समान होता है। किसी भी बिंदु पर उसका मान केवल गोले के केंद्र से उस बिंदु की दूरी पर निर्भर करता है, दिशा पर नहीं। अतः, गोलीय सममिति वाले आवेश वितरण का आयतन आवेश घनत्व केवल r का फलन होता है।



चित्र 6.12: त्रिज्या R वाले एकसमानतः आवेशित गोले, जिस पर नेट आवेश Q है, के कारण गोले के बाहर स्थित बिंदु P पर विद्युत्-क्षेत्र ज्ञात करना।

आपने भाग 6.3.1 में सीखा है कि गोलीय सममिति वाले वितरण के कारण किसी बिंदु पर **विद्युत्-क्षेत्र का परिमाण** केवल r पर निर्भर करता है। विद्युत्-क्षेत्र की दिशा धनात्मक आवेश वितरण के लिए त्रिज्यतः बहिर्मुखी होती है और ऋणात्मक आवेश वितरण के लिए त्रिज्यतः अंतर्मुखी होती है। आइए, अब हम गाउस नियम का उपयोग कर एकसमानतः आवेशित गोले के कारण विद्युत्-क्षेत्र ज्ञात करें।

त्रिज्या R वाला एक अचालक आवेशित गोला लें जिस पर कुल धनात्मक आवेश Q स्थित है (चित्र 6.12)। यह एकसमानतः आवेशित है जिसका अर्थ है कि इसका आयतन आवेश घनत्व ρ अचर है। आइए, हम इस आवेश वितरण के कारण उसके बाहर उसके केंद्र से दूरी r पर स्थित बिंदु P पर विद्युत्-क्षेत्र ज्ञात करें।

हम बिंदु P से गुज़रने वाला त्रिज्या r का एक गोलाकार गाउसीय पृष्ठ S खींचते हैं। चूंकि बिंदु P गोले के बाहर स्थित है, $r > R$ और $Q_{encl} = Q$ । गाउस नियम [समीकरण (6.16)] से

$$\oiint_S \vec{\mathbf{E}}.d\vec{\mathbf{S}} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \tag{6.20}$$

गोलीय सममिति के कारण गाउसीय पृष्ठ के सभी बिंदुओं पर विद्युत्-क्षेत्र का परिमाण समान है। अतः, हम इस गाउसीय पृष्ठ के लिए उसके मान को अचर मान सकते हैं। विद्युत्-क्षेत्र की दिशा धनात्मक आवेश के लिए त्रिज्यतः बहिर्मुखी है यानी $d\vec{\mathbf{S}}$ की दिशा में है। अतः, $\vec{\mathbf{E}}$ और $d\vec{\mathbf{S}}$ एक-दूसरे के समांतर हैं और

$$\vec{\mathbf{E}}.d\vec{\mathbf{S}} = E\,dS \tag{6.21क}$$

चूंकि E (गाउसीय पृष्ठ पर विद्युत्-क्षेत्र का परिमाण) अचर है, हम उसे पृष्ठ समाकल से बाहर निकाल सकते हैं। अतः, समीकरण (6.21क) हो जाता है :

$$\oiint_S \vec{\mathbf{E}}.d\vec{\mathbf{S}} = E\oiint_S dS = E\,4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} \tag{6.21ख}$$

या

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2} \quad r \geq R \text{ के लिए} \tag{6.21ग}$$

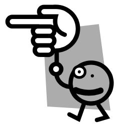
विद्युत्-क्षेत्र का मान है :

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\hat{\mathbf{r}} \quad r \geq R \text{ के लिए} \tag{6.22}$$

ध्यान दें कि हमने परिणाम में गोलीय आवेश वितरण के पृष्ठ पर स्थित सभी बिंदुओं को शामिल किया है क्योंकि त्रिज्या R वाला गाउसीय पृष्ठ संपूर्ण आवेश को परिबद्ध करेगा। क्या आपने इस बात पर भी ध्यान दिया कि समीकरण (6.22) द्वारा दिया गया विद्युत्-क्षेत्र समीकरण (6.19) द्वारा दिए गए बिंदु आवेश के कारण विद्युत्-क्षेत्र के समान है? यह ऐसा है कि मानो गोलीय पृष्ठ के अंदर स्थित संपूर्ण आवेश गोले के केंद्र पर

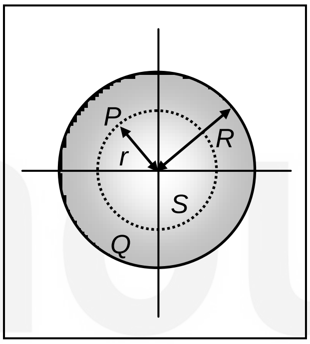
स्थित है। **ध्यान दें कि यह परिणाम गोलीय सममिति का नतीजा है**। इस तरह, एकसमानतः आवेशित गोले द्वारा अपने से **बाहर** स्थित किसी भी आवेश पर आरोपित बल और गोले के आवेश के समतुल्य एकल आवेश द्वारा उस आवेश पर आरोपित बल समान होंगे।

एकसमानतः आवेशित गोले के कारण विद्युत्-क्षेत्र और गोले के बाहर स्थित किसी आवेश पर उसके द्वारा आरोपित स्थिर वैद्युत बल, गोले पर स्थित आवेश के बराबर आवेश वाले बिंदु आवेश (जो गोले के केंद्र पर स्थित है) के कारण विद्युत्-क्षेत्र और उसके द्वारा आरोपित स्थिर वैद्युत बल के बराबर होता है।



कभी न भूलें

आइए, अब हम गोलीय आवेश वितरण जिस पर नेट आवेश Q है, के अंदर स्थित बिंदुओं पर यानी उन बिंदुओं पर जिनके लिए $r < R$ है, विद्युत्-क्षेत्र ज्ञात करें (चित्र 6.13 देखें)। इसके लिए हम त्रिज्या $r < R$ वाला एक गोलीय गाउसीय पृष्ठ खींचते हैं। हम समीकरण (6.20) लागू करते हैं जिसमें Q की जगह त्रिज्या r वाले गाउसीय गोले द्वारा परिबद्ध आवेश q का मान रखते हैं।



चित्र 6.13: त्रिज्या R वाले एकसमानतः आवेशित गोले, जिस पर नेट आवेश Q है, के कारण गोले के भीतर स्थित बिंदु P पर विद्युत्-क्षेत्र ज्ञात करना।

त्रिज्या r वाले गाउसीय गोले द्वारा परिबद्ध आवेश का मान क्या है?

आप जानते हैं कि त्रिज्या R वाले आवेशित गोले का आयतन आवेश घनत्व एकसमान है यानी ρ अचर है। गोलीय आवेश वितरण का आयतन $\frac{4\pi}{3}R^3$ है। चूंकि आयतन आवेश घनत्व ρ (प्रति एकक आयतन आवेश) अचर है, अतः, आवेश Q और आयतन $\frac{4\pi}{3}R^3$ वाले गोले के लिए इसका मान है :

$$\rho = \frac{Q}{\frac{4\pi}{3}R^3} \qquad \text{(6.23क)}$$

अतः, आयतन $\frac{4\pi}{3}r^3$ वाले गाउसीय गोले द्वारा परिबद्ध आवेश, उसके आयतन और आयतन आवेश घनत्व के गुणनफल के बराबर होगा :

$$q = \rho\frac{4\pi}{3}r^3 = \frac{Q}{\frac{4\pi}{3}R^3}\left[\frac{4\pi}{3}r^3\right] = Q\frac{r^3}{R^3} \qquad \text{(6.23ख)}$$

q के लिए समीकरण (6.23ख) और समीकरण (6.21ख) से मिले परिणाम $\oiint_S \vec{\mathbf{E}}.d\vec{\mathbf{S}} = E\oiint_S dS = E\,4\pi r^2$ को समीकरण (6.16) में रखने पर हमें मिलता है :

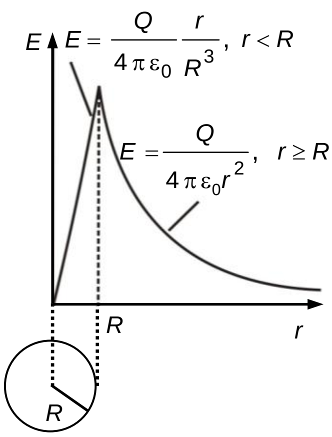
$$E\,4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0}\frac{r^3}{R^3}$$

या

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r}{R^3} \qquad r < R \quad \text{के लिए} \qquad \text{(6.24क)}$$

एकसमानतः आवेशित गोले के अंदर स्थित बिंदु पर विद्युत्-क्षेत्र का मान है :

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r}{R^3}\hat{\mathbf{r}} \qquad r < R \text{ के लिए} \qquad \text{(6.24ख)}$$



चित्र 6.14: त्रिज्या R वाले एकसमानतः आवेशित गोले के कारण विद्युत्-क्षेत्र का r के साथ परिवर्तन।

समीकरणों (6.24क) और (6.22) से ध्यान दें कि गोलीय आवेश वितरण के अंदर विद्युत्-क्षेत्र का मान गोले के केंद्र से दूरी के साथ रैखिकतः बढ़ता है ($E \propto r$)।

लेकिन गोले के बाहर स्थित बिंदुओं पर विद्युत्-क्षेत्र $\frac{1}{r^2}$ के अनुसार घटता है।

विद्युत्-क्षेत्र के इस परिवर्तन को हमने चित्र 6.14 में दिखाया है।

हमने इस इकाई के परिचय में कहा था कि गोलीय आवेश वितरण के कारण विद्युत्-क्षेत्र के ये परिणाम तब उपयोगी होंगे जब आप एक गोलीय संधारित्र की धारिता ज्ञात करेंगे। जैसाकि हमने इस इकाई के पहले पृष्ठ पर बताया है, पृथ्वी एक विशाल गोलीय संधारित्र है जिसका उपयोग हम हर समय करते हैं। पृथ्वी की धारिता इतनी अधिक है (~ 0.0007 F) कि हम उसमें आवेश डाल भी सकते हैं और निकाल भी सकते हैं और इससे उसके विद्युत्-क्षेत्र पर कोई विशेष अंतर नहीं पड़ेगा। इसी कारण हम अपने घरों में वैद्युत परिपथों, वैद्युत उपकरणों और यंत्रों को भूसंपर्कित करते हैं। इसी कारण से हम इमारतों में तड़ित् छड़ों को पृथ्वी से जोड़ते हैं ताकि अतिरिक्त आवेश बिना लोगों को नुकसान पहुंचाए पृथ्वी के अंदर चला जाए।

गोलीय आवेश वितरणों का एक और उदाहरण है निष्क्रिय गैसों के विलगित परमाणु। चूंकि परमाणु उदासीन होता है, उस पर कोई नेट आवेश नहीं होता और गाउस नियम से उसके बाहर विद्युत्-क्षेत्र शून्य होता है। जब भी निष्क्रिय गैसों के परमाणु उनके अन्य परमाणुओं के आस-पास भी होते हैं तब भी उनकी सममिति गोलीय सममिति से बहुत अलग नहीं होती। और उनके आस-पास विद्युत् क्षेत्रों के मान बहुत कम होते हैं। अतः, हम कह सकते हैं कि निष्क्रिय गैसों की निर्बल रासायनिक सक्रियता उनके गोलीय सममिति वाले आवेश वितरणों के कारण होती है। अगले भाग में आप गाउस नियम को लागू करके गोलीय कोश के कारण विद्युत्-क्षेत्र ज्ञात करेंगे। लेकिन उससे पहले आप एक बोध प्रश्न करें।

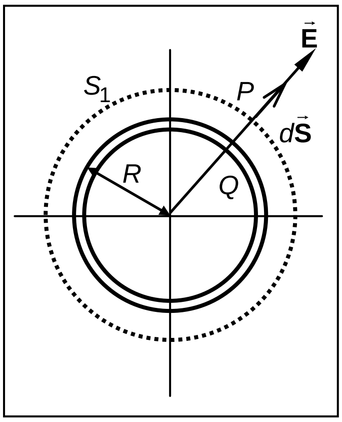
बोध प्रश्न 3 – गाउस नियम को आवेशित गोले पर लागू करना

त्रिज्या 0.1 m वाले एकसमानतः आवेशित गोले के कारण उसके केंद्र से दूरी 0.3 m पर विद्युत्-क्षेत्र का परिमाण 9.0 NC^{-1} है। गोले पर नेट आवेश का मान क्या है? गोलीय वितरण के आयतन आवेश घनत्व का मान क्या है?

6.6 एकसमानतः आवेशित पतले गोलीय कोश के कारण विद्युत्-क्षेत्र

सबसे पहले आप यह सुनिश्चित करें कि एक पतले गोलीय कोश में गोलीय सममिति होती है। यानी वह अपने अक्ष के प्रति घूर्णन में और अपने केंद्र और घूर्णन अक्ष से होकर गुज़रने वाले किसी समतल के प्रति परावर्तन में बदलता नहीं, वैसा ही रहता है। आप एक खोखली गेंद जैसे किसी खोखले गोले को जिसकी सतह पतली हो, घूर्णित करके या परावर्तित करके गोलीय कोश की गोलीय सममिति की जांच कर सकते हैं। आइए, अब त्रिज्या R वाला एक अचालक पतला गोलीय कोश लें जिस पर कुल धनात्मक आवेश Q है जो उसके पृष्ठ पर एकसमानतः वितरित है (चित्र 6.15)। आइए, हम इस कोश के कारण इसके बाहर स्थित किसी बिंदु पर विद्युत्-क्षेत्र ज्ञात करें।

कोश के बाहर स्थित बिंदु P के लिए हम बिंदु से होकर जाने वाला गाउसीय पृष्ठ S_1 खींचते हैं जो गोलीय कोश से संकेन्द्री है। आप देख सकते हैं कि गाउसीय पृष्ठ गोलीय कोश के बाहर है। आइए, हम बिंदु P पर विद्युत्-क्षेत्र ज्ञात करें (चित्र 6.15 देखें)।



चित्र 6.15: त्रिज्या R वाला एक पतला एकसमानतः आवेशित गोलीय कोश जिस पर नेट आवेश Q है। चित्र में कोश के बाहर स्थित एक बिंदु के लिए गाउसीय पृष्ठ S_1 का परिच्छेद दिखाया गया है। यह कोश के साथ संकेंद्री है।

गोलीय सममिति के कारण आवेशित गोलीय कोश के लिए किसी भी गोलाकार गाउसीय पृष्ठ के प्रत्येक बिंदु पर उसके विद्युत्-क्षेत्र का परिमाण समान है और उसकी दिशा त्रिज्य दिशा में है। हम गोलीय पृष्ठ S_1 पर $Q_{encl} = Q$ लेकर गाउस नियम [समीकरण (6.16)] लागू करते हैं और ध्यान देते हैं कि S_1 के लिए विद्युत्-क्षेत्र $\vec{\mathbf{E}}$ की दिशा $d\vec{\mathbf{S}}$ के अनुदिश है। यानी $\vec{\mathbf{E}}$ और $d\vec{\mathbf{S}}$ एक-दूसरे के समांतर हैं। अतः,

$$\vec{\mathbf{E}}.d\vec{\mathbf{S}} = E\,dS \qquad (6.25\text{क})$$

और चूंकि E (गाउसीय पृष्ठ पर विद्युत्-क्षेत्र का परिमाण) अचर है, अतः, हम उसे पृष्ठ समाकल से बाहर निकाल सकते हैं। अतः, समीकरण (6.16) हो जाता है :

$$\oint_S \vec{\mathbf{E}}.d\vec{\mathbf{S}} = E\oint_S dS = E\,4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} \qquad (6.25\text{ख})$$

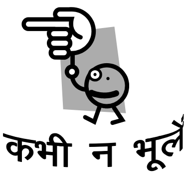
या $$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2} \qquad r \geq R \text{ के लिए} \qquad (6.25\text{ग})$$

त्रिज्या R वाले गोलीय कोश के बाहर स्थित किसी बिंदु पर विद्युत्-क्षेत्र का मान है :

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\hat{\mathbf{r}} \quad (\text{गोलीय कोश, } r \geq R \text{ के लिए}) \qquad (6.26)$$

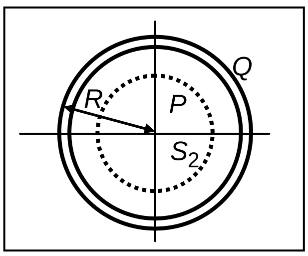
ध्यान दें कि समीकरण (6.26) द्वारा दिए गए विद्युत्-क्षेत्र का मान वही है जो बिंदु आवेश के कारण विद्युत क्षेत्र का मान है [समीकरण (6.19)]।

गोलीय कोश के बाहर स्थित किसी बिंदु पर विद्युत्-क्षेत्र के लिए ऐसा होता है मानो गोलीय कोश का समस्त आवेश Q, कोश के केंद्र पर रखे समान एकल आवेश द्वारा प्रतिस्थापित कर दिया गया हो। इस तरह, एकसमानतः आवेशित गोलीय कोश, कोश के बाहर स्थित किसी भी आवेश पर उतना ही बल आरोपित करेगा जितना कि समान एकल आवेश। अतः, हमेशा याद रखें,



एकसमानतः आवेशित गोलीय कोश के कारण विद्युत्-क्षेत्र और गोलीय कोश के बाहर स्थित किसी आवेश पर उसके द्वारा आरोपित स्थिर वैद्युत बल, गोलीय कोश पर स्थित आवेश के बराबर आवेश वाले बिंदु आवेश (जो कोश के केंद्र पर स्थित है) के कारण विद्युत्-क्षेत्र और उसके द्वारा आरोपित स्थिर वैद्युत बल के बराबर होता है।

कोश के **अंदर** स्थित बिंदु पर यानी कोश के आंतरिक रिक्त भाग में स्थित किसी बिंदु पर विद्युत्-क्षेत्र क्या होगा?

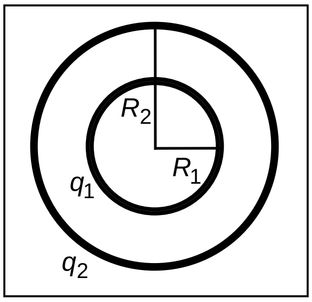


चित्र 6.16: गाउसीय पृष्ठ S_2 का परिच्छेद।

कोश के अंदर स्थित बिंदु के लिए हम कोश से संकेन्द्री गोलाकार गाउसीय पृष्ठ S_2 खींचते हैं जो पृष्ठ के रिक्त आंतरिक स्थान में है (चित्र 6.16 देखें)। चूंकि यह गाउसीय

पृष्ठ किसी नेट आवेश को परिबद्ध नहीं करता, अतः, कोश के अंदर स्थित सभी बिंदुओं पर विद्युत्-क्षेत्र शून्य है :

$$\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{0}} \qquad \text{(गोलीय कोश, } r < R \text{ के लिए)} \qquad (6.27)$$



चित्र 6.17: उदाहरण 6.2 के लिए चित्र।

अतः, **हमेशा याद रखें : जब किसी आवेश को एकसमानतः आवेशित गोलीय कोश द्वारा परिबद्ध किया जाता है यानी आवेश कोश के अंदर स्थित होता है, तो आवेश पर कोश द्वारा कोई स्थिर वैद्युत बल नहीं आरोपित होता।**

आइए, आपने इस भाग में जो सीखा है अब हम उसे दो संकेन्द्री पतले गोलीय कोशों के उदाहरण पर लागू करें।

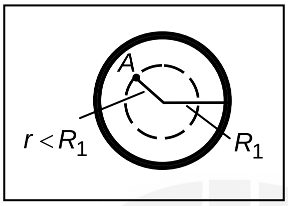
उदाहरण 6.2 : दो संकेन्द्री पतले गोलीय कोश

त्रिज्या R_1 और R_2 वाले (जहां $R_2 > R_1$) दो संकेन्द्री पतले गोलीय कोशों पर क्रमशः एकसमान आवेश q_1 और q_2 वितरित हैं (चित्र 6.17)। गाउस नियम का उपयोग कर निम्न बिंदुओं पर विद्युत्-क्षेत्र निर्धारित करें :

क) $r < R_1$,

ख) $R_2 < r < R_1$ और

ग) $r \geq R_2$ ।

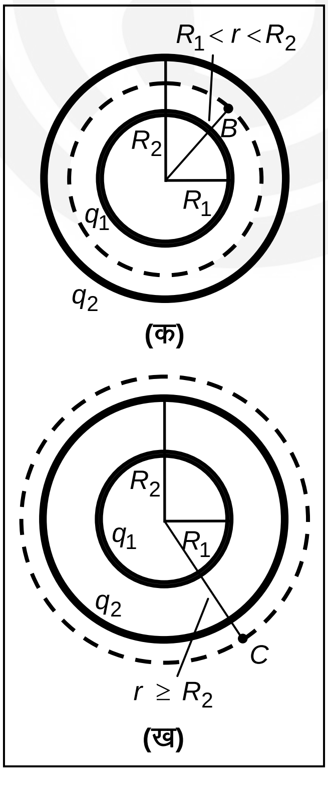


चित्र 6.18: भीतरी कोश के अंदर स्थित किसी बिंदु पर विद्युत्-क्षेत्र शून्य है क्योंकि उसके द्वारा परिबद्ध आवेश शून्य है।

हल ■ हम पतले गोलीय कोश के परिणामों सहित गाउस नियम का उपयोग करेंगे।

क) बिंदु $r < R_1$ के लिए यानी गोलीय कोश के अंदर स्थित बिंदु A के लिए हम उससे होकर जाने वाला गाउसीय पृष्ठ खींचते हैं (चित्र 6.18)। आप देख सकते हैं कि **गाउसीय पृष्ठ द्वारा परिबद्ध आवेश शून्य है।** समीकरण (6.27) से जो पतले गोलीय कोश के अंदर स्थित बिंदु पर गाउस नियम लागू करके प्राप्त किया गया है, हमें यह परिणाम मिलता है कि $r < R_1$ के लिए विद्युत्-क्षेत्र शून्य है :

$$\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{0}} \quad \text{(भीतरी गोलीय कोश के अंदर, } r < R_1 \text{ के लिए)}$$



चित्र 6.19: उदाहरण 6.2 के भाग (ख) और (ग) के लिए चित्र।

ख) बिंदु $R_1 < r < R_2$ के लिए यानी दोनों संकेन्द्री कोशों के बीच के स्थान के लिए त्रिज्या r वाले गाउसीय पृष्ठ द्वारा परिबद्ध नेट आवेश भीतरी गोलीय कोश पर स्थित आवेश q_1 के बराबर है (चित्र 6.19क)। अतः, समीकरण (6.26) से दोनों संकेंद्रित गोलों के बीच स्थित किसी बिंदु पर विद्युत्-क्षेत्र का मान है :

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r^2}\hat{\mathbf{r}} \qquad (R_1 < r < R_2 \text{ के लिए})$$

ग) बिंदु $r \geq R_2$ के लिए यानी बाहरी गोलीय कोश के बाहर स्थित बिंदु के लिए (चित्र 6.19ख), त्रिज्या r वाले गाउसीय पृष्ठ द्वारा परिबद्ध नेट आवेश, आवेशों q_1 और q_2 का योग है। अतः, समीकरण (6.26) से बाहरी गोलीय कोश के कारण उससे बाहर स्थित किसी बिंदु पर विद्युत्-क्षेत्र है :

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(q_1 + q_2)}{r^2}\hat{\mathbf{r}} \qquad (r \geq R_2 \text{ के लिए})$$

यदि भीतरी कोश पर और बाहरी कोश पर समान आवेश $+q$ हो, तो आपके उत्तर क्या होंगे? यह जानने के लिए बोध प्रश्न 4 करें।

बोध प्रश्न 4 – एकसमानतः आवेशित पतला गोलीय कोश

त्रिज्या R_1 और R_2 वाले (जहां $R_2 > R_1$) दो संकेन्द्री पतले गोलीय कोशों में से प्रत्येक पर आवेश $+q$ वितरित है। गाउस नियम का उपयोग कर बिंदुओं क) $r < R_1$, ख) $R_2 < r < R_1$ और ग) $r \geq R_2$ पर कोशों के कारण विद्युत्-क्षेत्र ज्ञात करें।

गोलीय सममिति वाले आवेश वितरणों पर गाउस नियम के अनुप्रयोगों की इस चर्चा के साथ हम इस इकाई का अंत कर रहे हैं। अगली इकाई में हम बेलनी और समतलीय सममिति वाले आवेश वितरणों पर गाउस नियम के अनुप्रयोगों के बारे में बताएंगे। आइए, अब हम इस इकाई का सारांश दें।

6.7 सारांश

अवधारणा	विवरण
वैद्युत अभिवाह	■ क्षेत्रफल S वाली एक सतह से होकर जाने वाला **वैद्युत अभिवाह**, संपूर्ण सतह पर वैद्युत अभिवाह अवयवों $(\vec{\mathbf{E}}.d\vec{\mathbf{S}}_i)$ के योग को व्यक्त करता है। प्रत्येक वैद्युत अभिवाह अवयव उस सतह पर एक छोटे समतल क्षेत्रफल अवयव और उस **क्षेत्रफल अवयव के लंबवत् विद्युत्-क्षेत्र के घटक** के गुणनफल को व्यक्त करता है। यह गुणनफल वास्तव में विद्युत्-क्षेत्र सदिश और क्षेत्रफल अवयव सदिश का अदिश गुणनफल है। गणितीय रूप में क्षेत्रफल S वाली एक सतह से होकर जाने वाला विद्युत्-क्षेत्र का **अभिवाह** या **वैद्युत अभिवाह** होता है : $$\Phi_E = \iint_S \vec{\mathbf{E}}.d\vec{\mathbf{S}}$$ **वैद्युत अभिवाह किसी राशि के प्रवाह या परिवर्तन को अभिव्यक्त नहीं करता।**
गाउस नियम	■ **गाउस नियम** बताता है कि किसी स्वेच्छ आकार के काल्पनिक बंद पृष्ठ S जिसे गाउसीय पृष्ठ कहते हैं, से होकर जाने वाला **नेट वैद्युत अभिवाह** उस पृष्ठ द्वारा परिबद्ध किए गए कुल आवेश (Q_{encl}) के समानुपाती होता है। SI इकाइयों में इसका मान $\frac{Q_{encl}}{\varepsilon_0}$ होता है। नेट आवेश उस गाउसीय सतह द्वारा परिबद्ध किए गए सभी आवेशों का बीजगणितीय योग होता है यानी वह योग जिसमें आवेश का चिन्ह शामिल हो। गणितीय रूप में हम इस नियम को समाकल रूप में ऐसे लिखते हैं : $$\oiint_S \vec{\mathbf{E}}.d\vec{\mathbf{S}} = \frac{Q_{encl}}{\varepsilon_0}$$ गाउस नियम का अवकली रूप है : $$\vec{\nabla}.\vec{\mathbf{E}} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$ जहां ρ आवेश वितरण का आयतन आवेश घनत्व है।

गोलीय सममिति वाले आवेश वितरणों पर गाउस नियम के अनुप्रयोग

■ गाउस नियम का उपयोग कर हम बिंदु आवेश, अनेक विविक्त आवेशों और संतत आवेश वितरणों के कारण विद्युत् क्षेत्रों की गणना कर सकते हैं जो स्वेच्छ आकार के पृष्ठों द्वारा परिबद्ध होते हैं। इस इकाई में हमने गोलीय सममिति वाले आवेश वितरणों पर चर्चा की है।

किसी आवेश वितरण को **गोलीय सममिति** वाला आवेश वितरण तब कहा जाता है जब वह निम्नलिखित स्थितियों में **अपरिवर्तित (निश्चर)** रहता है :

- जब **उसे उसके केंद्र से गुज़रने वाले किसी भी अक्ष के परितः घूर्णित किया जाता है**। तब हम कहते हैं कि उस अक्ष के परितः आवेश वितरण में **घूर्णी सममिति** है।

- जब **उसे उसके केंद्र से गुज़रने वाले किसी भी तल के परितः परावर्तित किया जाता है।** यह **परावर्तन सममिति** है।

इसके उदाहरण हैं बिंदु आवेश, एकसमानतः आवेशित गोला और एकसमानतः आवेशित गोलीय कोश।

एक गोलीय सममिति वाले आवेश वितरण के कारण किसी बिंदु पर विद्युत्-क्षेत्र का **परिमाण** सममिति केंद्र से उसकी दूरी r पर ही निर्भर करता है।

एक गोलीय सममिति वाले आवेश वितरण के कारण विद्युत्-क्षेत्र की **दिशा** धनात्मक आवेश के लिए गोले के केंद्र से त्रिज्यतः बहिर्मुखी होती है और ऋणात्मक आवेश के लिए त्रिज्यतः अंतर्मुखी होती है।

बिंदु आवेश

■ **बिंदु आवेश** q **के कारण** उससे दूरी r पर **विद्युत्-क्षेत्र** होता है :

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$$

एकसमानतः आवेशित गोला

■ त्रिज्या R वाले **एकसमानतः आवेशित गोले**, जिस पर आवेश Q स्थित हो, **के कारण** उसके बाहर उसके केंद्र से दूरी r पर स्थित बिंदु पर विद्युत्-क्षेत्र होता है :

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\hat{\mathbf{r}} \qquad r \geq R \text{ के लिए}$$

गोले के अंदर स्थित बिंदु पर विद्युत्-क्षेत्र होता है :

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r}{R^3}\hat{\mathbf{r}} \qquad r < R \text{ के लिए}$$

एकसमानतः आवेशित पतला गोलीय कोश

■ त्रिज्या R वाले **एकसमानतः आवेशित पतले गोलीय कोश**, जिस पर आवेश Q स्थित हो, **के कारण** उसके बाहर उसके केंद्र से दूरी r पर स्थित बिंदु पर विद्युत्-क्षेत्र होता है :

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\hat{\mathbf{r}} \qquad (\text{गोलीय कोश}, r \geq R \text{ के लिए})$$

कोश के अंदर स्थित सभी बिंदुओं पर विद्युत्-क्षेत्र शून्य होता है :

$$\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{0}} \qquad (\text{गोलीय कोश}, \ r < R \text{ के लिए})$$

6.8 अंत में कुछ प्रश्न

1. विद्युत्-क्षेत्र $\vec{E} = 100\,NC^{-1}\,\hat{i}$ के क्रमशः, xy, xz और yz समतलों में स्थित क्षेत्रफल $1.0\,m^2$ वाले पृष्ठों से होकर जाने वाले वैद्युत अभिवाह परिकलित करें।

2. एक कण, जिस पर आवेश $2.7\times10^{-9}\,C$ है, को भुजा 0.5 m वाले एक घनाकार गाउसीय पृष्ठ में परिबद्ध किया जाता है। घन के पृष्ठ और उसके किसी एक फलक से होकर जाने वाला वैद्युत अभिवाह परिकलित करें।

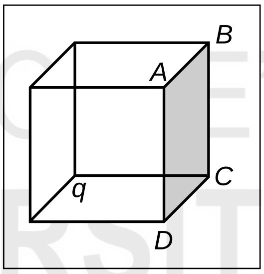
3. चार आवेशों $3q$, q, $-3q$ और $-q$ का एक निकाय है। निकाय के कम से कम दो आवेशों को परिबद्ध करने वाला गाउसीय पृष्ठ खींचें ताकि उसमें से होकर जाने वाला अभिवाह क) शून्य हो, ख) $+\left(\frac{4q}{\varepsilon_0}\right)$ हो, ग) $+\left(\frac{2q}{\varepsilon_0}\right)$ हो और घ) $-\left(\frac{2q}{\varepsilon_0}\right)$ हो।

4. समष्टि के किसी प्रदेश में उपस्थित विद्युत्-क्षेत्र का मान $\vec{E} = cr\,\hat{r}$ है, जहां c अचर है। गाउस नियम के अवकली रूप का उपयोग करके उस आयतन आवेश घनत्व की गणना करें जिसके कारण यह विद्युत्-क्षेत्र उपस्थित है। इस प्रदेश में मूलबिंदु पर केंद्रित त्रिज्या R वाले गोले में मौजूद कुल आवेश की गणना करें।

5. मान लें कि एक गाउसीय पृष्ठ में शून्य नेट आवेश परिबद्ध है। क) क्या गाउस के नियम से यह आवश्यक है कि पृष्ठ पर सभी बिंदुओं पर विद्युत्-क्षेत्र शून्य हो? ख) यदि गाउसीय पृष्ठ पर सभी बिंदुओं पर विद्युत्-क्षेत्र शून्य हो तो क्या हम गाउस नियम से यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि पृष्ठ के अंदर कुल आवेश शून्य है?

6. क्या गाउस नियम एक समबाहु त्रिभुज के शीर्षों पर रखे तीन समान आवेशों के कारण विद्युत्-क्षेत्र की गणना के लिए उपयोगी है? अपने उत्तर को समझाएं।

7. एक आवेश q को एक घन के शीर्ष पर रखा जाता है जैसाकि चित्र 6.20 में दिखाया गया है। इस आवेश का घन के दायें फलक ($ABCD$) से होकर जाने वाला वैद्युत अभिवाह परिकलित करें। (संकेत : इस सवाल को हल करने के लिए गाउसीय पृष्ठ का चुनाव समझदारी से करना होगा।)



चित्र 6.20: अंत के प्रश्न 7 के लिए चित्र।

8. क) एक बिंदु आवेश का, त्रिज्या 0.10 m वाले गोलाकार गाउसीय पृष्ठ से होकर जाने वाला वैद्युत अभिवाह $-900\,Nm^2C^{-1}$ है। गोलाकार पृष्ठ का केंद्र आवेश पर है। बिंदु आवेश का मान क्या है? गाउसीय पृष्ठ के किसी बिंदु पर बिंदु आवेश के कारण विद्युत्-क्षेत्र का मान क्या है? यदि गाउसीय पृष्ठ की त्रिज्या का मान बढ़ा कर 0.30 m कर दिया जाये तो उससे होकर जाने वाले वैद्युत अभिवाह का मान क्या होगा?

   ख) त्रिज्या 0.30 m वाले अचालक आवेशित गोले के कारण उसके केंद्र से दूरी 0.10 m पर विद्युत्-क्षेत्र का परिमाण $3.0\times10^3\,NC^{-1}$ है। गोले पर नेट आवेश क्या है?

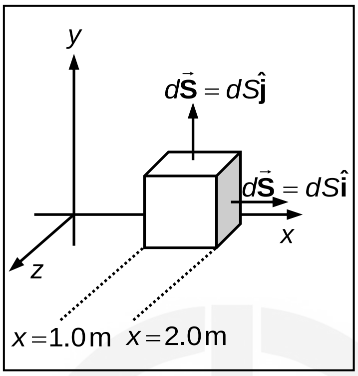
9. त्रिज्या R वाले अचालक गोले को जिस पर नेट धनात्मक आवेश Q है एक संकेन्द्री पतले अचालक गोलीय कोश द्वारा परिबद्ध किया जाता है जिसकी त्रिज्या r है और जिस पर नेट ऋणात्मक आवेश q है। क) गोले के अंदर, ख) गोले और कोश के बीच के स्थान में और ग) कोश के बाहर विद्युत्-क्षेत्र की गणना करें।

10. एक आवेशित अचालक गोलीय कोश पर जिसकी आंतरिक त्रिज्या 3.0 m है और बाह्य त्रिज्या 10 m है, परिमाण 9.0 nC का आवेश उपस्थित है जो उसके आयतन में एकसमानतः वितरित है। गोलीय कोश के केंद्र से 6.0 m की दूरी पर उसके कारण विद्युत्-क्षेत्र की गणना करें।

6.9 हल और उत्तर

बोध प्रश्न

1. हम समीकरण (6.6क) का उपयोग करके यानी घन के दायें और ऊपरी फलकों पर अदिश गुणनफल $\vec{\mathbf{E}}.d\vec{\mathbf{S}}$ का समाकलन करके उनसे होकर जाने वाले अभिवाह की गणना कर सकते हैं। इसके लिए चित्र 6.21 पर ध्यान दें। निर्देशांक अक्षों के इस चुनाव के लिए दायें फलक का क्षेत्रफल सदिश $d\vec{\mathbf{S}} = dS\,\hat{\mathbf{i}}$ है और ऊपरी फलक के लिए इसका मान $d\vec{\mathbf{S}} = dS\,\hat{\mathbf{j}}$ है। अतः, घन के दायें फलक से होकर जाने वाला वैद्युत अभिवाह है :



चित्र 6.21: बोध प्रश्न 1 के उत्तर के लिए चित्र।

$$\Phi_E = \iint_S \vec{\mathbf{E}}.d\vec{\mathbf{S}} = \iint_S (8.0x\,\hat{\mathbf{i}} + 5.0\,\hat{\mathbf{j}}).dS\,\hat{\mathbf{i}}$$

$$= \iint_S (8.0x)\hat{\mathbf{i}}.\hat{\mathbf{i}}\,dS = (8.0)\iint_S (x)\,dS \quad (\because\ \hat{\mathbf{i}}.\hat{\mathbf{i}} = 1,\ \hat{\mathbf{i}}.\hat{\mathbf{j}} = 0)$$

अब घन के दायें फलक पर x अचर है और इसका मान $x = 2.0\,\mathrm{m}$ है। अतः, दायें फलक के लिए हमें मिलता है :

$$\Phi_E = (8.0)\iint_S (2.0)\,dS = (16.0)\iint_S dS$$

अब समाकल $\iint_S dS$ घन के दायें फलक के क्षेत्रफल के बराबर है जिसका मान $1.0\,\mathrm{m}^2$ है। अतः, घन के दायें फलक से होकर जाने वाला वैद्युत अभिवाह है :

$$\Phi_E = (16.0)\,\mathrm{NC^{-1}m^2}$$

अब हम घन के ऊपरी फलक के लिए उन्हीं चरणों का अनुसरण करेंगे जिन्हें हमने घन के दायें फलक के लिए इस्तेमाल किया है। चूंकि ऊपरी फलक के लिए $d\vec{\mathbf{S}} = dS\,\hat{\mathbf{j}}$ और $\hat{\mathbf{j}}.\hat{\mathbf{j}} = 1$, $\hat{\mathbf{i}}.\hat{\mathbf{j}} = 0$, अतः, घन के ऊपरी फलक से होकर जाने वाला वैद्युत अभिवाह है :

$$\Phi_E = \iint_S \vec{\mathbf{E}}.d\vec{\mathbf{S}} = \iint_S (8.0x\,\hat{\mathbf{i}} + 5.0\,\hat{\mathbf{j}}).dS\,\hat{\mathbf{j}} = \iint_S (5.0)\,dS = (5.0)\iint_S dS$$

अब समाकल $\iint_S dS$ घन के ऊपरी फलक के क्षेत्रफल के बराबर है जिसका मान $1.0\,\mathrm{m}^2$ है। अतः, घन के ऊपरी फलक से होकर जाने वाला अभिवाह है :

$$\Phi_E = (5.0)\,\mathrm{NC^{-1}m^2}$$

2. क) हम चित्रों 6.1क, ख और ग में दिखाई गई सतहों पर गाउस नियम को लागू नहीं कर सकते क्योंकि ये सतहें खुली सतहें हैं (ये सतहें किसी आयतन को परिबद्ध नहीं करतीं) और गाउस नियम केवल बंद सतहों पर लागू होता है।

ख) i) नहीं, पृष्ठ से होकर जाने वाला वैद्युत अभिवाह बदलेगा नहीं क्योंकि गाउसीय पृष्ठ किसी भी आकार का हो सकता है और उससे होकर जाने वाला वैद्युत अभिवाह केवल उसके द्वारा परिबद्ध नेट आवेश के बराबर होता है।

ii) नहीं, क्योंकि पृष्ठ द्वारा परिबद्ध नेट आवेश समान है।

iii) नहीं, क्योंकि पृष्ठ के भीतर आवेश की कोई भी स्थिति हो सकती है।

iv) हां, क्योंकि पृष्ठ द्वारा परिबद्ध नेट आवेश बदल जाएगा।

v) हां, क्योंकि पृष्ठ द्वारा परिबद्ध नेट आवेश बदल जाएगा।

vi) नहीं, क्योंकि पृष्ठ द्वारा परिबद्ध नेट आवेश समान है।

ग) समीकरण (6.12) से कण पर आवेश का मान है :

$$q_{encl} = \varepsilon_0 \Phi_E = (8.85\times10^{-12}\,\mathrm{C^2N^{-1}m^{-2}})\times 500\,\mathrm{Nm^2\,C^{-1}} = 4.42\times10^{-9}\,\mathrm{C}$$

पृष्ठ से होकर जाने वाले वैद्युत अभिवाह का मान नहीं बदलेगा क्योंकि उसके द्वारा परिबद्ध नेट आवेश वही रहता है।

घ) चित्र 6.22 देखें। पृष्ठ S_1 द्वारा परिबद्ध नेट आवेश $q_1 = +3.1\,\mathrm{nC}$ है। चूंकि पृष्ठ S_1 द्वारा परिबद्ध कण P पर कोई आवेश नहीं है, अतः, वह वैद्युत अभिवाह में कोई योगदान नहीं करता। बाकी आवेश पृष्ठ के बाहर हैं। अतः, समीकरण (6.12) से

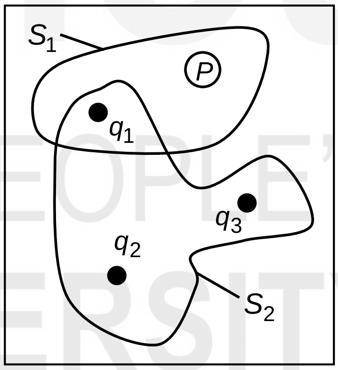
$$\Phi_E = \frac{q_{encl}}{\varepsilon_0} = \frac{q_1}{\varepsilon_0} = \frac{3.1\times10^{-9}\,\mathrm{C}}{8.85\times10^{-12}\,\mathrm{C^2N^{-1}m^{-2}}} = 350\,\mathrm{Nm^2\,C^{-1}}$$

पृष्ठ S_2 द्वारा परिबद्ध नेट आवेश है :

$$q_1 + q_2 + q_3 = +3.1\,\mathrm{nC} + (-5.9\,\mathrm{nC}) + (-3.1\,\mathrm{nC}) = -5.9\,\mathrm{nC}$$

अतः, समीकरण (6.12) से,

$$\Phi_E = \frac{q_{encl}}{\varepsilon_0} = \frac{-5.9\times10^{-9}\,\mathrm{C}}{8.85\times10^{-12}\,\mathrm{C^2N^{-1}m^{-2}}} = -6.7\times10^{2}\,\mathrm{Nm^2\,C^{-1}}$$



चित्र 6.22: बोध प्रश्न 2घ के उत्तर के लिए चित्र।

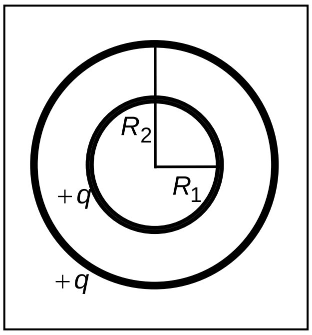
3. हम एकसमानतः आवेशित गोले का विद्युत्-क्षेत्र ज्ञात करने के लिए समीकरण (6.22) का उपयोग करेंगे क्योंकि बिंदु गोले के बाहर है और केवल विद्युत्-क्षेत्र का परिमाण लेंगे। अतः, गोले पर नेट आवेश है :

$$Q = E(4\pi\varepsilon_0 r^2) = \frac{(9.0\,\mathrm{NC^{-1}})\times(0.3\,\mathrm{m})^2}{8.99\times10^9\,\mathrm{C^{-2}Nm^2}} = 0.09\,\mathrm{nC} = 0.1\,\mathrm{nC}$$

चूंकि गोला एकसमानतः आवेशित है, समीकरण (6.23क) से उसका आयतन आवेश घनत्व है :

$$\rho = \frac{Q}{\frac{4\pi}{3}R^3} = \frac{0.09\times10^{-9}\,\mathrm{C}}{\frac{4\pi}{3}(0.1\,\mathrm{m})^3} = 2.1\times10^{-8}\,\mathrm{C\,m^{-3}}$$

4. चित्र 6.23 देखें। हम उदाहरण 6.2 के चरणों का अनुसरण करेंगे और $q_1 = q_2 = +q$ लेंगे।



चित्र 6.23: बोध प्रश्न 4 के उत्तर के लिए चित्र।

क) बिंदु $r < R_1$ के लिए (यानी गोलीय कोश के अंदर स्थित बिंदु के लिए) गोले, r से होकर जाने वाले गोलाकार गाउसीय पृष्ठ द्वारा परिबद्ध नेट आवेश शून्य है। अतः, $r < R_1$ के लिए $\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{0}}$

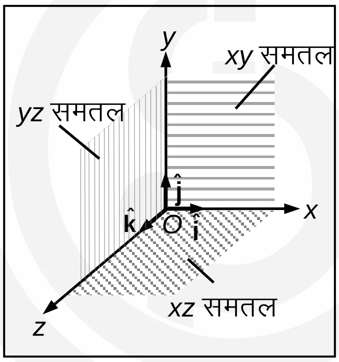
ख) बिंदु $R_2 < r < R_1$ के लिए (यानी संकेन्द्री गोलीय कोशों के बीच स्थित बिंदु के लिए) r से होकर जाने वाले गोलाकार गाउसीय पृष्ठ द्वारा परिबद्ध नेट आवेश $+q$ है। अतः, $R_2 < r < R_1$ के लिए

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$$

ग) बिंदु $r \geq R_2$ के लिए (यानी बाहरी गोलीय कोश के बाहर स्थित बिंदु के लिए) r से होकर जाने वाले गोलाकार गाउसीय पृष्ठ द्वारा परिबद्ध नेट आवेश $+q+q = +2q$ है। अतः, $r \geq R_2$ के लिए

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2q}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$$

अंत में कुछ प्रश्न



चित्र 6.24: अंत के प्रश्न 1 के लिए क्षेत्रफल सदिश।

1. चित्र 6.24 देखें। xy समतल में क्षेत्रफल S वाले पृष्ठ को हम सदिश $S\hat{\mathbf{k}}$ द्वारा निरूपित करेंगे क्योंकि $\hat{\mathbf{k}}$, xy समतल के लंबवत् एकक सदिश है। अतः, xy समतल में स्थित क्षेत्रफल $S = 1.0\,\text{m}^2$ से होकर जाने वाले विद्युत्-क्षेत्र $\vec{\mathbf{E}} = 100\,\text{NC}^{-1}\hat{\mathbf{i}}$ का अभिवाह है :

   $\Phi_E = \vec{\mathbf{E}}.S\hat{\mathbf{k}} = 100\,\text{NC}^{-1}\hat{\mathbf{i}}.(1.0\,\text{m}^2)\hat{\mathbf{k}} = 100\,\text{NC}^{-1}\text{m}^2(\hat{\mathbf{i}}.\hat{\mathbf{k}}) = 0$

   xz समतल में क्षेत्रफल सदिश $S\hat{\mathbf{j}}$ है और $S = 1.0\,\text{m}^2$ के लिए xz समतल से होकर जाने वाले विद्युत्-क्षेत्र $\vec{\mathbf{E}} = 100\,\text{NC}^{-1}\hat{\mathbf{i}}$ का अभिवाह है :

   $\Phi_E = \vec{\mathbf{E}}.S\hat{\mathbf{j}} = 100\,\text{NC}^{-1}\hat{\mathbf{i}}.(1.0\,\text{m}^2)\hat{\mathbf{j}} = 100\,\text{NC}^{-1}\text{m}^2(\hat{\mathbf{i}}.\hat{\mathbf{j}}) = 0$

   yz समतल में क्षेत्रफल सदिश $S\hat{\mathbf{i}}$ है और $S = 1.0\,\text{m}^2$ के लिए yz समतल से होकर जाने वाले विद्युत्-क्षेत्र $\vec{\mathbf{E}} = 100\,\text{NC}^{-1}\hat{\mathbf{i}}$ का अभिवाह है :

   $\Phi_E = \vec{\mathbf{E}}.S\hat{\mathbf{i}} = 100\,\text{NC}^{-1}\hat{\mathbf{i}}.(1.0\,\text{m}^2)\hat{\mathbf{i}} = 100\,\text{NC}^{-1}\text{m}^2(\hat{\mathbf{i}}.\hat{\mathbf{i}}) = 100\,\text{NC}^{-1}\text{m}^2$

2. हम घन के पृष्ठ को गाउसीय पृष्ठ के रूप में लेते हैं। गाउस नियम [समीकरण (6.16)] से इस पृष्ठ से होकर जाने वाला वैद्युत अभिवाह है :

   $$\Phi_E = \frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{2.7\times10^{-9}\,\text{C}}{8.85\times10^{-12}\,\text{C}^2\text{N}^{-1}\text{m}^{-2}} = 3.0\times10^2\,\text{NC}^{-1}\text{m}^2$$

   चूंकि घन के 6 फलक हैं, अतः, उसके किसी एक फलक से होकर जाने वाला वैद्युत अभिवाह है :

   $$\Phi_{E'} = \frac{\Phi_E}{6} = \frac{q}{6\varepsilon_0} = \frac{3.0\times10^2\,\text{NC}^{-1}\text{m}^2}{6} = 50\,\text{NC}^{-1}\text{m}^2$$

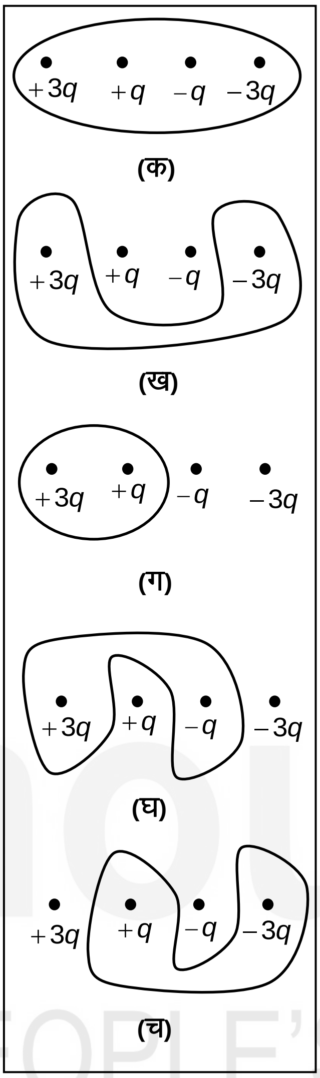
3. चित्रों 6.25क से च को देखें। हम समीकरण (6.16) का उपयोग करेंगे : $\Phi_E = \dfrac{q}{\varepsilon_0}$

क) किसी गाउसीय पृष्ठ से होकर जाने वाला नेट वैद्युत अभिवाह शून्य होगा यदि उसके द्वारा परिबद्ध नेट आवेश शून्य हो। चित्रों 6.25क और ख में दिखाए गए प्रत्येक गाउसीय पृष्ठ द्वारा परिबद्ध नेट आवेश शून्य है। आप एक तीसरा गाउसीय पृष्ठ खींच सकते हैं जो केवल आवेशों $+q$ और $-q$ को परिबद्ध करता हो।

ख) गाउसीय पृष्ठ से होकर जाने वाला नेट वैद्युत अभिवाह $(+4q/\varepsilon_0)$ होगा यदि उसके द्वारा परिबद्ध नेट आवेश $+4q$ हो। चित्र 6.25ग में दिखाए गए गाउसीय पृष्ठ द्वारा आवेश $+3q$ और $+q$ परिबद्ध हैं। अतः, गाउसीय पृष्ठ द्वारा परिबद्ध नेट आवेश $+4q$ है और नेट वैद्युत अभिवाह $(+4q/\varepsilon_0)$ है।

ग) गाउसीय पृष्ठ से होकर जाने वाला नेट वैद्युत अभिवाह $(+2q/\varepsilon_0)$ होगा यदि उसके द्वारा परिबद्ध नेट आवेश $+2q$ हो। चित्र 6.25घ में दिखाए गए गाउसीय पृष्ठ द्वारा आवेश $+3q$ और $-q$ परिबद्ध हैं। अतः, गाउसीय पृष्ठ द्वारा परिबद्ध नेट आवेश $+2q$ है और नेट वैद्युत अभिवाह $(+2q/\varepsilon_0)$ है।

घ) गाउसीय पृष्ठ से होकर जाने वाला नेट वैद्युत अभिवाह $(-2q/\varepsilon_0)$ होगा यदि उसके द्वारा परिबद्ध नेट आवेश $-2q$ हो। चित्र 6.25च में दिखाए गए गाउसीय पृष्ठ द्वारा आवेश $-3q$ और $+q$ परिबद्ध हैं। अतः, गाउसीय पृष्ठ द्वारा परिबद्ध नेट आवेश $-2q$ है और नेट वैद्युत अभिवाह $(-2q/\varepsilon_0)$ है।



चित्र 6.25: अंत के प्रश्न 3 के उत्तर के लिए चित्र।

4. आयतन आवेश घनत्व ρ की गणना के लिए हम समीकरण (6.18) का उपयोग करेंगे :

$$\rho = \varepsilon_0 \vec{\nabla}.\vec{\mathbf{E}} = \varepsilon_0 \vec{\nabla}.(cr\hat{\mathbf{r}}) = \varepsilon_0 \vec{\nabla}.(c\vec{\mathbf{r}}) \qquad \left(\because \hat{\mathbf{r}} = \frac{\vec{\mathbf{r}}}{r}\right)$$

इकाई 2 में आपने सदिश क्षेत्र के डाइवर्जेन्स की गणना सीखी है।

$$\therefore \rho = \varepsilon_0 \vec{\nabla}.(c\vec{\mathbf{r}}) = \varepsilon_0 c \vec{\nabla}.\vec{\mathbf{r}} = \varepsilon_0 c\left(\hat{\mathbf{i}}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}}\frac{\partial}{\partial z}\right).(x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}})$$

$$= \varepsilon_0 c\left(\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z}\right) = 3\varepsilon_0 c$$

समष्टि के इस प्रदेश में त्रिज्या R वाले गोले में जिसका केंद्र मूलबिंदु पर है, मौजूद कुल आवेश $Q = \iiint\limits_V \rho\, dV$ है।

चूंकि ρ अचर है और आयतन समाकल त्रिज्या R वाले गोले के आयतन के बराबर है, अतः,

$$Q = 3\varepsilon_0 c \int\limits_V dV = 3\varepsilon_0 c \frac{4\pi}{3} R^3 = 4\pi\varepsilon_0 c R^3$$

5. क) जब गाउसीय पृष्ठ में शून्य नेट आवेश परिबद्ध होता है, तब गाउस नियम से $\vec{\mathbf{E}}.d\vec{\mathbf{S}} = 0$ होता है। लेकिन इसका अर्थ यह नहीं है कि गाउसीय पृष्ठ के सभी बिंदुओं पर विद्युत्-क्षेत्र शून्य होगा। $\vec{\mathbf{E}}.d\vec{\mathbf{S}}$ तब भी शून्य होता है जब $\vec{\mathbf{E}}$ और $d\vec{\mathbf{S}}$ एक-दूसरे के लंबवत् हों।

ख) यदि गाउसीय पृष्ठ के सभी बिंदुओं पर विद्युत्-क्षेत्र शून्य हो तो गाउस नियम से पृष्ठ में परिबद्ध नेट आवेश शून्य होता है।

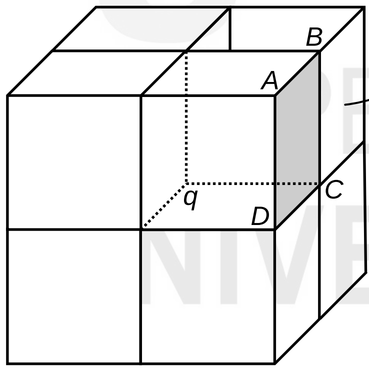
अतः, यदि गाउसीय पृष्ठ पर सभी बिंदुओं पर विद्युत्-क्षेत्र शून्य है तो हम गाउस नियम से यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि पृष्ठ के अंदर कुल आवेश शून्य होगा।

6. एक समबाहु त्रिभुज के शीर्षों पर रखे तीन समान आवेशों के कारण विद्युत्-क्षेत्र की गणना के लिए गाउस नियम उपयोगी नहीं है क्योंकि एक ऐसा समुचित सममिति वाला बंद पृष्ठ नहीं होता जिसके लिए पृष्ठ पर विद्युत्-क्षेत्र का परिमाण अचर हो और विद्युत्-क्षेत्र की दिशा पृष्ठ के समांतर या लंबवत् हो ताकि पृष्ठ समाकल का मान आसानी से परिकलित किया जा सके।

7. घन के दायें छायांकित फलक (*ABCD*) से, जिसका क्षेत्रफल S' है, होकर जाने वाले वैद्युत अभिवाह का मान है :

$$\Phi_{S'} = \iint_{S'} \vec{\mathbf{E}}.d\vec{\mathbf{S}}$$

$\Phi_{S'}$ परिकलित करने के लिए एक ऐसे समुचित गाउसीय पृष्ठ का चुनाव करना होगा जो आवेश q को परिबद्ध करे। हम ठीक मौलिक घन के जैसे 8 घन ले कर चित्र 6.26 जैसा घन बनाते हैं। इस घन में मौलिक घन का दायां फलक (*ABCD*) शामिल है और यह आवेश q को परिबद्ध करता है। ध्यान दें कि गाउसीय पृष्ठ का क्षेत्रफल दायें फलक *ABCD* के क्षेत्रफल का 24 गुना है। अतः, अब हम गाउस नियम को इस समस्या पर लागू कर सकते हैं।



चित्र 6.26: अंत के प्रश्न 7 के उत्तर के लिए चित्र।

गाउस नियम से $\oiint_S \vec{\mathbf{E}}.d\vec{\mathbf{S}} = \dfrac{Q_{encl}}{\varepsilon_0}$ जहां S आवेश को परिबद्ध करने वाले गाउसीय पृष्ठ का पृष्ठ क्षेत्रफल है। क्योंकि गाउसीय पृष्ठ का क्षेत्रफल *ABCD* के क्षेत्रफल S' का 24 गुना है, अतः,

$$\oiint_S \vec{\mathbf{E}}.d\vec{\mathbf{S}} = 24 \times \iint_{S'} \vec{\mathbf{E}}.d\vec{\mathbf{S}} = \frac{q}{\varepsilon_0} \quad \text{या} \quad \iint_{S'} \vec{\mathbf{E}}.d\vec{\mathbf{S}} = \frac{q}{24\,\varepsilon_0}$$

अतः, घन के दायें फलक (*ABCD*) से होकर जाने वाला वैद्युत अभिवाह है :

$$\Phi_{S'} = \frac{q}{24\,\varepsilon_0}$$

8. क) बिंदु आवेश के मान की गणना के लिए हम समीकरण (6.12) का उपयोग

करेंगे :

$$q = \varepsilon_0 \Phi_E = (8.85\times10^{-12}\,C^2N^{-1}m^{-2})\times(-900\,Nm^2C^{-1}) = -7.96\,nC$$

समीकरण (6.19) से आवेश q से 0.10 m की दूरी पर विद्युत्-क्षेत्र का मान है :

$$\vec{\mathbf{E}} = (8.99\times10^9\,C^{-2}Nm^2)\times\frac{-7.96\times10^{-9}\,C}{(0.10\,m)^2}\hat{\mathbf{r}} = (-7.2\times10^3\,NC^{-1})\hat{\mathbf{r}}$$

त्रिज्या 0.30 m वाले गाउसीय पृष्ठ से होकर जाने वाले वैद्युत अभिवाह का मान वही रहेगा क्योंकि गाउसीय पृष्ठ द्वारा परिबद्ध आवेश अपरिवर्तित है। अतः, वैद्युत अभिवाह का मान $-900\,Nm^2C^{-1}$ होगा।

ख) हम गोले पर नेट आवेश की गणना के लिए E का परिमाण समीकरण (6.24ख) से ज्ञात करेंगे क्योंकि जिस बिंदु पर विद्युत्-क्षेत्र का मान दिया गया है वह गोले के अंदर स्थित है। E के लिए समीकरण (6.24ख) से

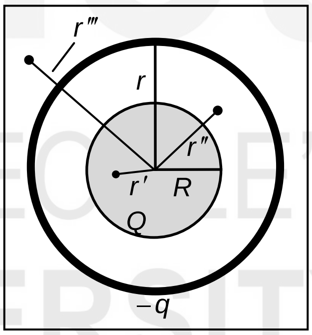
$$Q = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R^3}{r}E$$

सवाल में दिए गए संख्यात्मक मानों को रखने पर

$$Q = \frac{1}{(8.99\times10^9\,C^{-2}Nm^2)}\times\frac{(0.30\,m)^3}{(0.10\,m)}\times(3.0\times10^3\,NC^{-1}) = 90\,nC$$

9. क) चूंकि कोश के अंदर विद्युत्-क्षेत्र शून्य है, अतः, समीकरण (6.24ख) से गोले के अंदर स्थित बिंदु r' पर विद्युत्-क्षेत्र का मान है (चित्र 6.27 देखें) :

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r'}{R^3}\hat{\mathbf{r}}$$



चित्र 6.27: अंत के प्रश्न 9 के उत्तर के लिए चित्र।

ख) गोले और गोलीय कोश के बीच के स्थान में बिंदु r'' पर, बिंदु r'' से होकर जाने वाले गोलाकार गाउसीय पृष्ठ द्वारा परिबद्ध कुल आवेश गोले पर नेट धनात्मक आवेश Q के बराबर है। समीकरण (6.22) से विद्युत्-क्षेत्र का मान है :

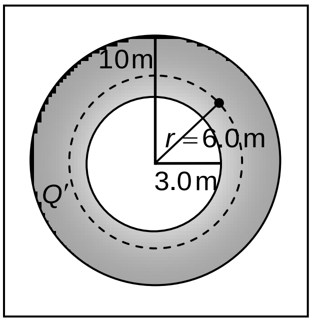
$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r''^2}\hat{\mathbf{r}}$$

ग) गोलीय कोश के बाहर स्थित बिंदु r''' पर, बिंदु से होकर जाने वाले गोलाकार गाउसीय पृष्ठ द्वारा परिबद्ध कुल आवेश, गोले पर धनात्मक आवेश Q और गोलीय कोश पर आवेश $-q$ के योग के बराबर है। चूंकि बिंदु r''' से होकर जाने वाले गाउसीय पृष्ठ द्वारा परिबद्ध कुल आवेश $(Q-q)$ है, अतः, समीकरण (6.22) या समीकरण (6.26) से विद्युत्-क्षेत्र है :

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(Q-q)}{r'''^2}\hat{\mathbf{r}}$$

10. हम पहले गोलीय कोश के आयतन आवेश घनत्व की गणना करेंगे : $\rho = \dfrac{Q}{V}$ ।

इसके लिए हमें गोलीय कोश के आयतन की गणना करनी होगी जिसका मान है :



चित्र 6.28: अंत के प्रश्न 10 के उत्तर के लिए चित्र। चित्र पैमाने के अनुसार नहीं है।

$$V = \frac{4\pi}{3}\left[(10\,\text{m})^3 - (3.0\,\text{m})^3\right] = 4077\,\text{m}^3$$

$$\therefore \quad \rho = \frac{Q}{V} = \frac{9.0\,\text{nC}}{4077\,\text{m}^3} = 2.2\times10^{-12}\,\text{Cm}^{-3}$$

केंद्र से 6.0 m की दूरी पर विद्युत्-क्षेत्र की गणना के लिए हम उस बिंदु से होकर जाने वाला त्रिज्या 6.0 m का गोलाकार गाउसीय पृष्ठ खींचते हैं (चित्र 6.28)। आइए, पहले त्रिज्या 6.0 m वाले गाउसीय पृष्ठ द्वारा परिबद्ध कुल आवेश Q' की गणना करें। गोलीय कोश के उस भाग का (जो आवेश Q' को परिबद्ध करता है) आयतन है :

$$V' = \frac{4\pi}{3}\left[(6.0\,\text{m})^3 - (3.0\,\text{m})^3\right] = 792\,\text{m}^3$$

$$\Rightarrow Q' = \rho V' = 2.2\times10^{-12}\,\text{Cm}^{-3}\times 792\,\text{m}^3 = 1.7\,\text{nC}$$

गाउस नियम से

$$\Phi_E = E(4\pi R^2) = \frac{Q'}{\varepsilon_0} \qquad \Rightarrow \qquad E = \frac{Q'}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$$

या $$\vec{\mathbf{E}} = (8.99\times10^9\,\text{C}^{-2}\text{Nm}^2)\left(\frac{1.7\,\text{nC}}{(6.0\,\text{m})^2}\right)\hat{\mathbf{r}} = 0.42\,\text{NC}^{-1}\hat{\mathbf{r}}$$