बादलों में बिजली का चमकना प्रकृति में मौजूद प्रबल स्थिर वैद्युत बलों और विद्युत्-क्षेत्रों का सबसे शक्तिशाली प्रदर्शन है!

इकाई 5

स्थिर वैद्युत बल और विद्युत्-क्षेत्र

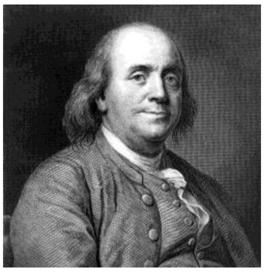
इकाई की रूपरेखा

अध्ययन निर्देशिका

हम आशा करते हैं कि आपने यांत्रिकी पाठ्यक्रम (BPHCT-131) के खंड 1 में दी गई सदिश बीजगणित की अवधारणाओं को और इस पाठ्यक्रम के खंड 1 में प्रस्तुत सदिश कलन की अवधारणाओं को अच्छी तरह पढ़ा होगा। आप सदिश बीजगणित की बुनियादी अवधारणाओं को इस पाठ्यक्रम के खंड 1 के परिशिष्ट से दोहरा सकते हैं। आपको ये सभी अवधारणाएं भली-भांति आनी चाहिए। तभी आपको इस खंड को और पाठ्यक्रम के बाकी खंडों को पढ़ना चाहिए। इस इकाई में आप आवेशों के बीच लगने वाले स्थिर वैद्युत बल की बुनियादी अवधारणा सीखेंगे और कूलॉम नियम द्वारा परिभाषित उसका गणितीय रूप जानेंगे। इन्हें आपने स्कूल की भौतिकी में पढ़ा है। आप विद्युत्-क्षेत्र की अवधारणा और स्थिर वैद्युत बल से इसके संबंध के बारे में भी पढ़ेंगे। इन अवधारणाओं की प्रस्तुति आपके लिए नई हो सकती है। इन अवधारणाओं को समझने और आप में इन्हें लागू करने की क्षमता विकसित करने के लिए हमने इकाई में कई उदाहरण, बोध प्रश्न और अंत में प्रश्न दिए हैं। इनमें से अधिकतर को हल करने में आपको 5 से 10 मिनट लगने चाहिए। आपको ये सभी भाग अच्छी तरह पढ़ने चाहिए और अगली इकाई पढ़ने से पहले यह सुनिश्चित कर लेना चाहिए कि आप अपने-आप इन बोध प्रश्नों और इकाई के अंत में दिए गए प्रश्नों को हल कर सकते हैं। तभी आप अगली इकाई को पढ़ें।

"विज्ञान तब मनोहारी/आकर्षक होता है जब वह परिघटनाओं या विभिन्न अवलोकनों के बीच के संबंधों की सरल व्याख्याएं प्रस्तुत करता है।"

स्टीफ़ेन हॉकिंग



बेन्जामिन फ्रैंकलिन (1706-1790), एक अमरीकी बहुशास्त्रज्ञ (यानी अनेक विषयों के विशेषज्ञ), संयुक्त राज्य अमेरिका के संस्थापकों में से एक थे। भौतिकी में, उन्हें विद्युत् पर उनके विस्तृत कार्य के लिए जाना जाता है। वह एक महान आविष्कारक भी थे जिनके द्वारा आविष्कृत तड़ित् दंड, द्विफोकसी चश्मे और मूत्र नलिका आज भी इस्तेमाल किए जाते हैं। फ्रैंकलिन ने विद्युत् में कई शब्द ईजाद किए जिन्हें हम आज भी इस्तेमाल करते हैं जैसेकि बैटरी (battery), आवेश (charge), चालक (conductor), धन (plus), ऋण (minus), धनात्मकतः (positively), ऋणात्मकतः (negatively), संधारित्र (condenser, capacitor)।

लैटिन भाषा के शब्द इलेक्ट्रिका (electrika) का मूल शब्द यूनानी भाषा का शब्द इलेक्ट्रॉन (elektron) है, जिसका अर्थ है एंबर। इलेक्ट्रिका का अंग्रेज़ी में अनुवाद हुआ electrics और बाद में विद्युतीय (electrical) और विद्युत् (electricity) शब्द बनाए गए। भिन्न पदार्थों को आपस में रगड़ने से जितने भी विद्युतीय प्रभाव देखे गए, उनका कारण दो प्रकार के विद्युत् में माना गया – काचसम विद्युत और रेज़िनी विद्युत। फ्रैंकलिन ने 'positive' शब्द को काचसम विद्युत् से जोड़ा और 'negative' को रेज़िनी विद्युत् से।

5.1 परिचय

स्कूल की भौतिकी में आपने विद्युत् आवेशों के बीच लगने वाले स्थिर वैद्युत बल और कूलॉम नियम के बारे में पढ़ा है। ये अवधारणाएं आपके अनुभवों से किस तरह जुड़ी हैं? बारिश के मौसम में आपने घने, काले बादलों के बीच कड़कती बिजली तो ज़रूर देखी होगी जो उन बादलों को जगमगा देती है। शायद आपने सोचा हो कि बिजली क्यों चमकती है। क्या आप जानते हैं कि बेंजामिन फ्रैंकलिन ही वे पहले व्यक्ति थे जिन्होंने उड़ती पतंगों पर प्रयोग करके यह सिद्ध किया था कि बिजली का संबंध विद्युत् आवेश से होता है? उन्होंने ही सबसे पहले यह विचार दिया कि बादलों में विद्युत् आवेश होता है। जब बादलों में मौजूद आवेश का वायुमंडल में विसर्जन होता है तब एक विशाल चिंगारी निकलती है। यह चिंगारी ही तड़ित् (lightning) या बिजली कहलाती है।

दरअसल, मनुष्य विद्युत् आवेशों के प्रभाव के बारे में हज़ारों सालों से जानते हैं – यूनानियों को 600 ईसा पूर्व में यह पता था कि जब एंबर (एक प्राकृतिक रेजिन amber) को फर से रगड़ा जाता है, तब एंबर, पंख जैसी हल्की वस्तुओं को अपनी ओर आकर्षित करने लगता है। बाद में पता लगा कि रेशम, मोम, फलालैन और हीरे जवाहरात जैसे कई अन्य पदार्थों को अन्य उपयुक्त पदार्थों से रगड़ने पर उनमें हल्की वस्तुओं को आकर्षित करने का गुण आ जाता था। उदाहरण के लिए, कांच को रेशम से रगड़ने पर वह कागज़ के टुकड़ों को आकर्षित करने लगता है। ऐसे पदार्थों को 'विद्युत्पदार्थ' ('electrics') कहा जाता था। यह भी कहा जाता था कि ये पदार्थ 'विद्युतीकृत' हो गए या 'इन्होंने काचसम (vitreous) या रेज़िनी (resinous) विद्युत् प्राप्त कर लिया'। आपने इस प्रभाव को स्वयं भी देखा होगा। आपने देखा होगा कि जब आप अपने खुश्क बालों में कंघा फेरते हैं या नायलॉन, पॉलिएस्टर के कपड़ों को रगड़ते हैं तो इनमें बाल या कागज़ के छोटे टुकड़े चिपक जाते हैं।

'धनात्मक' और 'ऋणात्मक' आवेशों की अवधारणाएं बेंजामिन फ्रैंकलिन और अन्य वैज्ञानिकों ने अनेक प्रयोगों में बड़ी संख्या में देखे गए इस तरह के प्रेक्षणों को समझाने के लिए प्रस्तुत कीं। विद्युत् आवेशों के बारे में एक बात ध्यान देने की यह है कि उनके बीच लगने वाला बल विशाल होता है। इस बल को अब हम **स्थिर वैद्युत बल** के नाम से जानते हैं। यांत्रिकी (BPHCT-131) नामक पाठ्यक्रम की इकाई 6 के भाग 6.2.5 से याद करें कि स्थिर वैद्युत बल प्रकृति का एक मूलभूत बल है। यह बल हमारे दैनिक जीवन में घटने वाली बहुत सी परिघटनाओं जैसेकि घर्षण, तनाव, अभिलंब बल आदि के लिए उत्तरदायी है। इसी के कारण विद्युत-उदासीन स्थायी परमाणुओं, अणुओं, ठोस तथा द्रवों का अस्तित्व होता है।

अतः, भाग 5.2 में हम धनात्मक और ऋणात्मक आवेशों के बीच लगने वाले **स्थिर वैद्युत बल** की अवधारणा समझाएंगे। इसके लिए हम **विद्युत् आवेश** की अवधारणा को दोहराएंगे। फिर हम बल नियम का गणितीय व्यंजक देंगे जिसे कूलॉम नियम कहा जाता है और इसकी मदद से दो आवेशों के बीच के बल की गणना करेंगे। फिर हम भाग 5.3 में **विद्युत्-क्षेत्र** की अवधारणा समझाएंगे। आपने इस पाठ्यक्रम के खंड 1 में सदिश क्षेत्रों के बारे में पढ़ा है। आपने सीखा है कि विद्युत्-क्षेत्र एक सदिश क्षेत्र है जो किसी आवेश या आवेश वितरण के कारण उसके चारों ओर के प्रदेश में स्थापित होता है। आप विभिन्न सरल आवेश वितरणों के कारण विद्युत्-क्षेत्रों की गणना करना सीखेंगे। अगली इकाई में आप **वैद्युत अभिवाह** की अवधारणा के बारे में पढ़ेंगे। इसका उपयोग करके आप विभिन्न आवेश वितरणों के विद्युत्-क्षेत्रों की गणना के लिए एक आसान और अत्युत्तम नियम सीखेंगे जिसे **गाउस नियम** कहते हैं।

उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप :

- कूलॉम नियम का उपयोग कर विरामावस्था में स्थित किन्हीं दो आवेशों के बीच लग रहा स्थिर वैद्युत बल ज्ञात कर सकेंगे;
- बलों के अध्यारोपण के सिद्धांत का उपयोग कर दो से अधिक आवेशों वाले निकाय के लिए परिणामी स्थिर वैद्युत बल की गणना कर सकेंगे;
- अनेक विविक्त आवेशों और संतत आवेश वितरणों के कारण विद्युत्-क्षेत्र की परिभाषा दे सकेंगे; और
- किसी भी विविक्त आवेश वितरण और अनंत एकसमान रेखा आवेश वितरण के कारण परिणामी विद्युत्-क्षेत्र की गणना कर सकेंगे।

5.2 स्थिर वैद्युत बल

क्या आपको अपने स्कूल की भौतिकी से आवेश की अवधारणा, सजातीय और विजातीय आवेशों के बीच स्थिर वैद्युत बल और कूलॉम नियम की अवधारणाएं याद हैं? क्या आपको यह पढ़ना याद है कि सजातीय आवेश एक-दूसरे को विकर्षित करते हैं और विजातीय आवेश एक-दूसरे को आकर्षित करते हैं? आपने स्कूल की भौतिकी में धनात्मक और ऋणात्मक आवेशों और उनके बीच लगने वाले बलों के बारे में पढ़ा है। आप इन अवधारणाओं को आगे दिए गए पूर्व-परीक्षण प्रश्न हल करके दोहरा लें। अन्यथा, इस भाग को पढ़ें और फिर इन सवालों को हल करें।

पूर्व-परीक्षण

1) रेशम से रगड़ी गई कांच की छड़ को 'धनात्मकतः' आवेशित और फर (जानवर की खाल पर के बाल) से रगड़े गए एंबर या प्लास्टिक को 'ऋणात्मकतः' आवेशित कहा जाता है। इस सूचना के साथ नीचे दिए गए प्रत्येक प्रेक्षण के बाद दिए गए विकल्पों (क) और (ख) में से सही निष्कर्ष चुनें :

प्रेक्षण 1: रेशम से रगड़ा गया कांच का टुकड़ा एक वस्तु को प्रतिकर्षित करता है।

क) वस्तु पर धनात्मक आवेश है।

ख) वस्तु पर ऋणात्मक आवेश है।

प्रेक्षण 2: फर से रगड़े गए एंबर के एक टुकड़े की ओर दो वस्तुएं आकर्षित होती हैं।

क) दोनों वस्तुओं पर धनात्मक आवेश है।

ख) दोनों वस्तुओं पर ऋणात्मक आवेश है।

2) बताएं कि नीचे दिए गए कथनों में से कौन-से कथन सही हैं और कौन-से कथन ग़लत :

क) मुक्त कणों पर मौजूद आवेश का मान इलेक्ट्रॉन के आवेश (1.6×10^{-19} C) के भिन्नात्मक मान के बराबर मापा गया है।

ख) वस्तुएं विद्युत्-उदासीन होती हैं क्योंकि उनके धनात्मकतः आवेशित प्रोटॉनों और ऋणात्मकतः आवेशित इलेक्ट्रॉनों की संख्या बराबर होती है।

ग) ब्रह्मांड का कुल आवेश संरक्षित है।

घ) विरामावस्था में स्थित दो आवेशों के बीच लग रहा बल उनके परिमाणों पर निर्भर नहीं करता।

च) विरामावस्था में स्थित दो आवेशित कणों के बीच लग रहा बल उन पर मौजूद आवेशों के परिमाणों के गुणनफल के समानुपाती होता है।

छ) विरामावस्था में स्थित दो आवेशित कणों के बीच लग रहा बल व्युत्क्रम-वर्ग बल होता है।

यदि आपने इन सवालों का सही-सही जवाब दिया है तो आप आवेश के बारे में बुनियादी अवधारणाओं को समझते हैं और आपको उनके बीच लग रहे बलों की जानकारी है। तब आप भाग 5.2 के बाकी के हिस्से को जल्दी से पढ़ कर इसमें दिए गए बोध प्रश्नों को हल कर सकते हैं। अन्यथा, इस भाग को अच्छी तरह पढ़ें और पूर्व-परीक्षण प्रश्नों और बोध प्रश्नों को हल करें।

5.2.1 विद्युत् आवेश

स्कूल की भौतिकी में आपने आवेशों के बारे में जो कुछ भी सीखा है, जैसेकि आवेश के प्रकार, आवेश का मात्रक, आवेश का क्वान्टमीकरण और आवेश संरक्षण, उसे हम इस भाग में जल्दी से दोहराएंगे।

आवेशों के प्रकार और आवेश का मात्रक

आपने स्कूल की भौतिकी में सीखा है कि **आवेश** एक अदिश राशि है और **यह दो प्रकार** का होता है : **धनात्मक** और **ऋणात्मक**। इलेक्ट्रॉन और प्रोटॉन, ऋणात्मक और धनात्मक आवेशों के सबसे अधिक जाने-पहचाने उदाहरण हैं। इनके आवेशों का परिमाण समान है और उसका मान 1.6×10^{-19} C है। जैसाकि आप जानते हैं, आवेश का SI मात्रक **कूलॉम** है और उसका प्रतीक C है। इसका नाम फ्रांस के भौतिकीविद् चार्ल्स-ऑगस्टिन द कूलॉम (1736 - 1806) के नाम पर रखा गया है।

आवेश के मात्रक कूलॉम को चुंबकीय बलों के पदों में परिभाषित किया जाता है। इसके बारे में आप खंड 3 में पढ़ेंगे।

परमाणु और अणु विद्युत्-उदासीन होते हैं क्योंकि उनमें इलेक्ट्रॉनों और प्रोटॉनों की संख्या समान होती है। आपने यह व्याख्या भी पढ़ी होगी कि जब दो पदार्थों को आपस में रगड़ा जाता है तो वे आवेशित क्यों हो जाते हैं। रगड़ने पर, इलेक्ट्रॉन एक पदार्थ से निकल कर दूसरे में चले जाते हैं। जिस पदार्थ से इलेक्ट्रॉन निकलते हैं वह धनात्मकतः आवेशित हो जाता है। जिस पदार्थ में वे चले जाते हैं, वह ऋणात्मकतः आवेशित हो जाता है। आवेश स्थानातरंण की इस प्रक्रिया को **घर्षण द्वारा आवेशन** (charging by friction) कहा जाता है (क्योंकि आप एक पदार्थ को दूसरे से रगड़ते हैं)। पिंडों को

आवेशित करने के अन्य तरीके भी हैं जिनके बारे में आपने स्कूल की भौतिकी में पढ़ा है। यहां हम उन सबका विवरण नहीं देंगे।

आवेश का क्वान्टमीकरण

अठाहरवीं सदी के अनेक वैज्ञानिक (जिनमें बेन्जामिन फ्रैंकलिन भी शामिल थे) सोचते थे कि विद्युत् आवेश एक संतत, अदृश्य तरल है जो सभी पदार्थों में मौजूद होता है। वह उनके बाहर या उनके अंदर प्रवाहित हो सकता है जिसके कारण पदार्थ धनात्मकतः या ऋणात्मकतः आवेशित हो जाते हैं। बाद में पदार्थ की प्रकृति पर किए गए प्रयोगों में पता चला कि पदार्थ परमाणुओं से बने होते हैं, एवं अणु और परमाणु, इलेक्ट्रॉनों, प्रोटॉनों और न्यूट्रॉनों से बने होते हैं। आज हम जानते हैं कि प्रकृति में प्राप्त होने वाला **अल्पतम मुक्त आवेश**, इलेक्ट्रॉन या प्रोटॉन का आवेश है। इस आवेश के परिमाण को e से प्रकट किया जाता है।

विद्युत् आवेश का मापन सबसे पहले 1909 में नोबेल पुरस्कार द्वारा सम्मानित अमरीकी भौतिकीविद् रॉबर्ट मिलिकान (1868 –1953) ने किया था। उनके सुप्रसिद्ध प्रयोग को जिसे अब तैल-बूंद प्रयोग (oil-drop experiment) के नाम से जाना जाता है, आज स्कूलों और कॉलेजों की भौतिकी प्रयोगशालाओं में किया जाता है। इस प्रयोग में आप दो विद्युतीकृत धात्विक प्लेटों के बीच दो बलों के अधीन आवेशित तेल की बूंद की गति देख सकते हैं। तेल की बूंद की गति का गुरुत्वाकर्षण बल तथा बाहर से आरोपित किए गए विद्युत् बल के संयोजित प्रभाव के अधीन प्रेक्षण किया जाता है। विद्युत् बल की दिशा, गुरुत्वाकर्षण बल की दिशा के विपरीत होती है। मिलिकान ने बहुत बड़ी संख्या में तेल की बूंदों के वेगों पर प्रेक्षण किए और यह पाया कि तेल की अलग-अलग बूंदों पर मौजूद आवेश, एक न्यूनतम आवेश के गुणज (multiples) हैं। इस न्यूनतम आवेश का मान 1.6×10^{-19} C है। यह बात ऋणात्मक और धनात्मक दोनों आवेशों के लिए सत्य है।

गणितीय रूप में, मुक्त कण पर किसी भी धनात्मक या ऋणात्मक आवेश को हम इस तरह लिख सकते हैं :

$$q = ne, \qquad n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots.. \tag{5.1क}$$

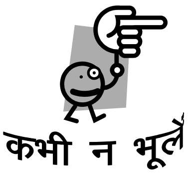
जहां

$$e = 1.6 \times 10^{-19}\,\mathrm{C} \tag{5.1ख}$$

आप शायद जानते हों कि यदि किसी भौतिक राशि के केवल विविक्त (discrete) मान ही संभव हों, संतत मान नहीं, तो हम कहते हैं कि वह राशि **क्वान्टमीकृत** (quantised) है। हम यह नहीं जानते कि विद्युत् आवेश क्वान्टमीकृत क्यों होता है। लेकिन ऐसा प्रयोगों में पाया गया है और आज तक इसका अपवाद नहीं मिला है। अतः, हम कहते हैं कि **आवेश क्वान्टमीकृत होता है**; उसके विविक्त मान होते हैं जो e के मान के पूर्णांक गुणज होते हैं।

उदाहरण के लिए, हमें ऐसे मुक्त कण (जैसेकि पॉज़िट्रॉन, अल्फ़ा-कण) या आवेशित वस्तुएं (जैसेकि आवेशित गोला या आवेशित बूंद) मिल सकती हैं जिनके आवेश e के पूर्णांक गुणज हों, जैसे कि $+4e$ या $-4e$। लेकिन हमें अभी तक कोई भी ऐसा मुक्त कण नहीं मिला है जिस पर भिन्नात्मक आवेश जैसेकि $+0.77e$ या $-2.55e$ आवेश हो।

आप शायद जानते हों कि प्रोटॉन और न्यूट्रॉन, दृढ़ता से बद्ध क्वार्कों से बने हैं जिन पर $-e/3$ और $-2e/3$ आदि आवेश होते हैं। लेकिन अभी तक क्वार्कों को मुक्त कणों के रूप में देखा नहीं गया है। अतः, अभी तक के प्रयोगों से मिले परिणामों के आधार पर हम कह सकते हैं कि



आवेश क्वान्टमीकृत होता है यानी मुक्त कणों पर आवेश के मापे गए मान 1.6×10^{-19} C के पूर्णांक गुणज ही हैं। किसी भी मुक्त कण पर 1.6×10^{-19} C के भिन्नात्मक मान के आवेश नहीं मापे गए हैं।

आवेश संरक्षण

विद्युत् आवेशों पर किए गए प्रयोगों से यह भी पता चलता है कि जब भी दो वस्तुएं संपर्क में होती हैं (उदाहरण के लिए, रगड़ने, छूने आदि के कारण) और संपर्क के बाद इन दो वस्तुओं में किसी पर भी अधिक आवेश होता है तो दूसरी वस्तु पर भी अधिक आवेश होता है। संपर्क में रखी इन दो वस्तुओं पर अधिक आवेशों की मात्रा बराबर होती है लेकिन उनके चिन्ह **विपरीत** होते हैं। इसका अर्थ यह है कि जब एक वस्तु से दूसरी वस्तु में विद्युत् आवेश (इलेक्ट्रॉनों) का स्थानांतरण होता है, तब इलेक्ट्रॉन न तो उत्पन्न होते हैं, न ही नष्ट। यानी संपर्क में स्थित दोनों वस्तुओं में मौजूद आवेश की कुल मात्रा एक संरक्षित राशि है। यह बात प्रकृति में मौजूद सभी **विलगित** निकायों पर लागू होती है।

ब्रह्मांड में कुल विद्युत् आवेश के संरक्षण से ही प्रतिकणों (anti-particles) के अस्तित्व की पुष्टि होती है।

वास्तव में, अपने प्रयोगों के आधार पर सबसे पहले बेन्जामिन फ्रैंकलिन ने आवेश संरक्षण की परिकल्पना पेश की थी। तब से आज तक मूल कणों, नाभिकों, परमाणुओं और अणुओं से लेकर स्थूल आवेशित पिंडों पर किए गए अनगिनत प्रयोगों में आज तक इस नियम का अपवाद नहीं मिला है। अतः, हम रैखिक संवेग, ऊर्जा, कोणीय संवेग जैसी संरक्षित राशियों की सूची में विद्युत् आवेश को भी शामिल कर सकते हैं और **आवेश संरक्षण नियम** का कथन दे सकते हैं। प्रयोगों से मिले प्रमाणों से ज्ञात होता है कि

एक विलगित निकाय में, विद्युत् आवेश की कुल मात्रा कभी नहीं बदलती (यानी निकाय में किसी भी समय पर मौजूद धनात्मक और ऋणात्मक आवेशों का बीजीय योग समान रहता है)। हम कहते हैं कि निकाय का आवेश संरक्षित है। आवेशित कण एक वस्तु से दूसरी वस्तु में स्थानांतरित हो सकते हैं; लेकिन उन कणों से संबद्ध आवेश को न तो उत्पन्न किया जा सकता है, न ही नष्ट। इससे यह निष्कर्ष निकलता है कि ब्रह्मांड में कुल आवेश संरक्षित रहता है।

अब आप आगे पढ़ने से पहले पूर्व-परीक्षण में दिए गए प्रश्न 1 और 2क से ग हल करें।

अब हम कूलॉम नियम को दोहराएंगे जिससे हमें पता चलता है कि एक आवेशित पिंड दूसरे आवेशित पिंड पर कितना बल आरोपित करता है।

5.2.2 कूलॉम नियम

विरामावस्था में स्थित आवेशों के बीच के आकर्षण या प्रतिकर्षण बल के नियम की खोज कूलॉम ने सावधानीपूर्वक अनेक प्रयोग करने के बाद की थी। उन्होंने पाया कि

विरामावस्था में स्थित आवेशों q_1 और q_2 वाले दो कणों के बीच लगने वाले बल (विद्युत् बल, कूलॉम बल या आज की शब्दावली में **स्थिर वैद्युत बल**) का परिमाण होता है :

$$F = k\frac{|q_1||q_2|}{r^2} \tag{5.2}$$

जहां r आवेशों के बीच की दूरी है और k आनुपातिकता स्थिरांक है। यह बल दोनों कणों को जोड़ने वाली रेखा के अनुदिश लगता है। यदि कणों के आवेश विपरीत चिन्ह के हों यानी वे विजातीय आवेश (unlike charges) हों तो किसी एक कण पर लग रहे बल की दिशा दूसरे कण की ओर होती है। यदि आवेशों के चिन्ह समान हों यानी वे सजातीय आवेश (like charges) हों तो बल की दिशा विपरीत होती है। अतः, हम कहते हैं कि सजातीय आवेश एक-दूसरे को प्रतिकर्षित करते हैं और विजातीय आवेश एक-दूसरे को आकर्षित करते हैं। चूंकि बल सदिश राशि है, अतः, आइए, हम समीकरण (5.2) को सदिश रूप में सजातीय और विजातीय आवेशों के लिए एक जगह पर लिखें।

चार्ल्स ऑगस्टिन द कूलॉम (1736 – 1806) एक फ्रांसीसी भौतिकीविद् थे जिनका सर्वोत्तम योगदान है आवेशित कणों के बीच लग रहे स्थिर वैद्युत बलों का विवरण देना। कूलॉम नियम को अनगिनत प्रयोगों में स्थापित किया गया है। यह नियम सभी आवेशों पर लागू होता है चाहे वे मुक्त हों या धनावेशित नाभिक और उससे बद्ध इलेक्ट्रॉन के बीच लग रहे हों। यह उन बलों के बारे में बताता है जिनके कारण परमाणु बद्ध होकर अणु बनाते हैं; और परमाणु और अणु बद्ध होकर समस्त पदार्थ की रचना करते हैं। इस तरह, इससे पदार्थ के स्थायित्व की व्याख्या मिलती है।

कूलॉम नियम

आवेश q_1 वाले कण पर उससे दूरी r पर स्थित आवेश q_2 वाले कण द्वारा आरोपित स्थिर वैद्युत बल होता है :

$$\vec{\mathbf{F}}_{21} = k\frac{q_1 q_2}{|\vec{\mathbf{r}}_{21}|^2}\hat{\mathbf{r}}_{21} \tag{5.3क}$$

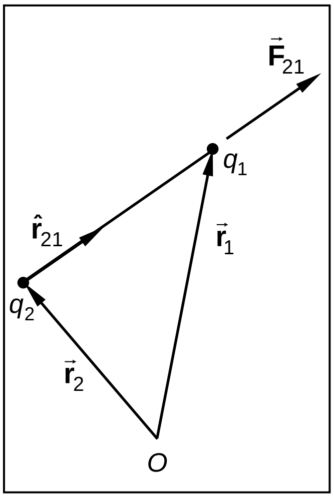
जहां $\hat{\mathbf{r}}_{21}$ कणों को जोड़ने वाली रेखा के अनुदिश q_2 से q_1 की ओर एकक सदिश है (चित्र 5.1 देखें) और k **कूलॉम नियतांक** कहलाता है। ध्यान दें कि $\vec{\mathbf{r}}_{21} = \vec{\mathbf{r}}_1 - \vec{\mathbf{r}}_2$ और $|\vec{\mathbf{r}}_{21}| = r$ है। यहां $\vec{\mathbf{r}}_1$ और $\vec{\mathbf{r}}_2$ क्रमशः q_1 और q_2 के स्थिति सदिश हैं और आवेश विरामावस्था में स्थित हैं। SI मात्रकों में कूलॉम नियम होता है :

$$\vec{\mathbf{F}}_{21} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{|\vec{\mathbf{r}}_{21}|^2}\hat{\mathbf{r}}_{21} \tag{5.3ख}$$

जहां q_1 और q_2 का मात्रक कूलॉम है, $\vec{\mathbf{r}}_{21}$ और $\vec{\mathbf{F}}_{21}$ के मात्रक क्रमशः m और N हैं। यहां ε_0 मुक्त आकाश की पारगम्यता है। **कूलॉम नियतांक** का मान है :

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 8.99\times10^9\,\mathrm{Nm^2\,C^{-2}}$$

ध्यान दें कि यदि समीकरणों (5.3क और ख) में q_1 और q_2 के साथ उनके चिन्ह भी लगा दिए जाएं तो वे बताते हैं कि स्थिर वैद्युत बल आकर्षण बल है या प्रतिकर्षण बल। अतः, यदि **आवेश सजातीय हैं** यानी या तो दोनों ही आवेश धनात्मक हैं या दोनों ही ऋणात्मक हैं, तो q_1 पर **बल** $\vec{\mathbf{F}}_{21}$, q_2 से परे $\vec{\mathbf{r}}_{21}$ के अनुदिश होगा यानी यह **प्रतिकर्षण बल** है। यदि **आवेश विजातीय** हैं, यानी एक आवेश धनात्मक है और दूसरा ऋणात्मक, तो q_1 पर बल $\vec{\mathbf{F}}_{21}$, $\vec{\mathbf{r}}_{21}$ की दिशा के विपरीत q_2 की ओर होगा। अतः, यह **आकर्षण बल** है।



चित्र 5.1: विरामावस्था में स्थित दो विद्युत् आवेशों के बीच स्थिर वैद्युत बल।

क्या आपने ध्यान दिया कि दो विजातीय आवेशों के बीच कूलॉम आकर्षण बल का व्यंजक गुरुत्वाकर्षण बल के व्यंजक जैसा है जिसके बारे में आपने यांत्रिकी के पाठ्यक्रम (BPHCT-131) के खंड 2 की इकाई 7 में पढ़ा है?

हमने यहां उसी चिन्ह प्रणाली का प्रयोग किया है। प्रतिकर्षण बल के व्यंजक में केवल चिन्ह का अंतर है। इस तरह समीकरणों (5.3क या ख) द्वारा व्यक्त कूलॉम नियम चार प्रायोगिक प्रेक्षणों को सारगर्भित करता है :

1. **विजातीय आवेश एक-दूसरे को आकर्षित करते हैं और सजातीय आवेश एक-दूसरे को प्रतिकर्षित करते हैं;**
2. **दो आवेशित कणों के बीच लग रहा स्थिर वैद्युत बल उन्हें जोड़ने वाली रेखा के अनुदिश लगता है;**
3. **दो आवेशित कणों के बीच लग रहा स्थिर वैद्युत बल उन दोनों में से प्रत्येक के आवेश के परिमाण के समानुपाती होता है; और**
4. **यह एक व्युत्क्रम-वर्ग बल है यानी यह कणों के बीच की दूरी के वर्ग के व्युत्क्रमानुपाती है।**

आइए, हम कूलॉम नियम को लागू करने का उदाहरण लें।

उदाहरण 5.1 : कूलॉम नियम लागू करना

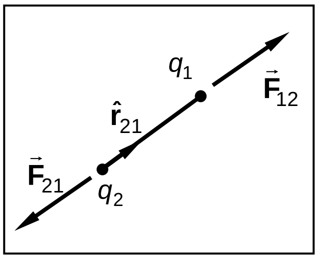
विरामावस्था में स्थित आवेश $q_1 = 5.0\,\text{C}$ और आवेश $q_2 = -12\,\text{C}$ वाले कणों पर लग रहे स्थिर वैद्युत बलों के परिमाणों और दिशाओं की गणना करें जबकि उनके बीच की दूरी 30 m है। उन्हें चित्र में दिखाएं।

हल ■ प्रत्येक आवेश पर स्थिर वैद्युत बल, कूलॉम नियम यानी समीकरण (5.3ख) द्वारा दिया जाता है।

हम प्रत्येक आवेश के लिए q_1, q_2 और r के मान रखते हैं और

$\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 8.99 \times 10^9\ \text{N m}^2\ \text{C}^{-2}$ लेते हैं। प्रत्येक कण पर लग रहे बल का परिमाण है :

$$F = (8.99 \times 10^9\ \text{N m}^2\ \text{C}^{-2}) \times \frac{5.0\,\text{C} \times 12\,\text{C}}{(30\,\text{m})^2} = 6.0 \times 10^8\,\text{N}$$



चित्र 5.2: उदाहरण 5.1 के लिए स्थिर वैद्युत बल।

चूंकि कणों पर आवेश विजातीय हैं, वे एक-दूसरे को आकर्षित करेंगे। प्रत्येक कण पर लग रहे बल की दिशा दूसरे कण की ओर होगी। गणितीय रूप में हम बलों को ऐसे लिखते हैं :

q_1 पर q_2 द्वारा लगाया गया बल है : $\vec{F}_{21} = -\,6.0 \times 10^8\,\text{N}\,\hat{r}_{21}$ और

q_2 पर q_1 द्वारा लगाया गया बल है :

$$\vec{F}_{12} = -\,6.0 \times 10^8\,\text{N}\,\hat{r}_{12} = +\,6.0 \times 10^8\,\text{N}\,\hat{r}_{21}$$

चूंकि $\hat{r}_{12} = -\hat{r}_{21}$। ये दोनों बल चित्र 5.2 में दिखाए गये हैं। आप देख सकते हैं कि ये बल विशाल हैं।

आइए, कूलॉम नियम को लागू करने का एक और उदाहरण लें। फिर आप एक बोध प्रश्न कर सकते हैं।

उदाहरण 5.2 : कूलॉम नियम लागू करना

दो बिंदु आवेश Q_1 और Q_2 एक-दूसरे से 3.0 m की दूरी पर रखे हैं। उनके आवेशों का योग 20 μC है। यदि एक आवेश दूसरे आवेश को परिमाण 0.075 N के बल से प्रतिकर्षित करता है, तो दोनों आवेशों के परिमाण क्या हैं?

हल ■ एक बार फिर हम कूलॉम नियम यानी समीकरण (5.3ख) का उपयोग करते हैं। दिया है कि दोनों आवेश एक-दूसरे को प्रतिकर्षित करते हैं। अतः, वे सजातीय आवेश हैं। माना कि Q_1 और Q_2 उन आवेशों के परिमाण हैं।

समीकरण (5.3ख) में दूरी और बल का अदिश मान रखने पर हमें मिलता है :

$$0.075\ \text{N} = (8.99\times10^{9}\ \text{Nm}^2\,\text{C}^{-2})\times\frac{Q_1Q_2}{(3.0\text{m})^2}$$

या $$Q_1Q_2 = 75\times10^{-12}\ \text{C}^2 = 75\times(10^{-6}\ \text{C})^2 = 75(\mu\text{C})^2 \quad \text{(i)}$$

साथ ही $$Q_1+Q_2 = 20\mu\text{C} \quad\Rightarrow\quad Q_2 = 20\mu\text{C} - Q_1 \quad \text{(ii)}$$

समीकरण (ii) से समीकरण (i) में Q_2 का मान रखने पर हमें Q_1 में द्विघाती (quadratic) समीकरण मिलता है :

$$75(\mu\text{C})^2 = Q_1(20\mu\text{C} - Q_1) \quad\Rightarrow\quad Q_1^2 - 20Q_1 + 75 = 0$$

जहां Q_1, μC में है। इस समीकरण को हल करने पर हमें आवेशों के परिमाणों के मान मिलते हैं :

$Q_1 = 5.0\mu$C और $Q_2 = 15\mu$C या $Q_1 = 15\mu$C और $Q_2 = 5.0\mu$C

बोध प्रश्न 1 – कूलॉम नियम

क) नीचे दिए आवेश युग्मों के लिए q_1 पर q_2 द्वारा आरोपित स्थिर वैद्युत बल ज्ञात करें :

i) $q_1 = 8.0\ \mu$C, $q_2 = 8.0\ \mu$C एक-दूसरे से 0.04 m की दूरी पर।

ii) $q_1 = 15$ mC, $q_2 = -10$ mC एक-दूसरे से 3.0 m की दूरी पर।

ख) हाइड्रोजन के परमाणु में एक इलेक्ट्रॉन और एक प्रोटॉन होता है और इनके बीच की औसत दूरी 5.3×10^{-11}m है। इन्हें विरामावस्था में मानते हुए इनके बीच लग रहे स्थिर वैद्युत बल के परिमाण की गणना करें। इसकी तुलना उनके बीच लग रहे गुरुत्वाकर्षण बल के परिमाण से करें। दिया है कि इलेक्ट्रॉन का द्रव्यमान 9.1×10^{-31} kg है, प्रोटॉन का द्रव्यमान 1.7×10^{-27} kg है और $G = 6.7\times10^{-11}\ \text{Nm}^2\ \text{kg}^{-2}$ है।

उदाहरण 5.2 में हमने 'बिंदु आवेश' पद का उपयोग किया है। इसका क्या अर्थ है? **बिंदु आवेश** एक **काल्पनिक आवेश** होता है जो समष्टि में एक बिंदु पर स्थित होता है; इसका कोई आमाप नहीं होता; यह विमाहीन होता है। बिंदु आवेश की अवधारणा विशुद्ध रूप से एक अमूर्त गणितीय अवधारणा है जिसका उपयोग स्थिर विद्युतिकी (electrostatics) में किया जाता है। बहुत-सी स्थितियों में हम इलेक्ट्रॉन को बिंदु आवेश मानते हैं लेकिन हम इलेक्ट्रॉन त्रिज्या के पैमाने पर इसके आमाप को अभिलक्षित कर सकते हैं। **स्थिर विद्युतिकी** में हम प्रायः **बिंदु आवेश** की बात तब करते हैं जब हमें कण के आमाप (या विमा) से कोई सरोकार नहीं होता।

अभी तक आपने विरामावस्था में स्थित दो आवेशित कणों के बीच लग रहा स्थिर वैद्युत बल ज्ञात करना सीखा है। जब निकाय में दो से अधिक आवेश विरामावस्था में मौजूद होते हैं तब हम किसी आवेश पर लग रहा स्थिर वैद्युत बल कैसे प्राप्त करते हैं? इसके लिए, हम अध्यारोपण के सिद्धांत का उपयोग करते हैं। याद करें कि आपने यह सिद्धांत गुरुत्वाकर्षण बल के लिए यांत्रिकी पाठ्यक्रम (BPHCT-131) की इकाई 7 के भाग 7.2.1 में पढ़ा है। आइए, अब हम इसे स्थिर वैद्युत बलों के लिए समझें।

5.2.3 अध्यारोपण का सिद्धांत

यहां सबसे पहले आपके लिए यह समझना ज़रूरी है कि स्थिर वैद्युत बल द्वि-पिंड बल होते हैं। इसका अर्थ है कि किन्हीं दो आवेशित वस्तुओं के बीच लग रहा स्थिर वैद्युत बल बदलता नहीं है अगर उनके परिवेश में अन्य आवेशित वस्तुएं मौजूद हों। दो से अधिक आवेशित वस्तुओं वाले निकाय में, वस्तुओं के प्रत्येक युग्म के बीच लग रहा स्थिर वैद्युत बल कूलॉम नियम द्वारा दिया जाता है। आवेशित कणों के निकाय के किसी भी आवेशित कण पर निकाय के अन्य आवेशित कणों द्वारा आरोपित नेट स्थिर वैद्युत बल ज्ञात करने के लिए हम उस कण पर अन्य आवेशित कणों द्वारा आरोपित बलों का सदिश योग लेते हैं। मान लें कि निकाय में तीन आवेश q_1, q_2 और q_3 विरामावस्था में स्थित हैं। तब q_2 और q_3 द्वारा q_1 पर आरोपित बल नेट स्थिर वैद्युत बल $\vec{\mathbf{F}}_1$, q_2 द्वारा q_1 पर आरोपित स्थिर वैद्युत बल $\vec{\mathbf{F}}_{21}$ और q_3 द्वारा q_1 पर आरोपित स्थिर वैद्युत बल $\vec{\mathbf{F}}_{31}$ का सदिश योग है, यानी

ध्यान दें कि समीकरण (5.4ग) के योग में iवां कण शामिल नहीं है। यह भी ध्यान दें कि समीकरणों (5.4ख) और (5.4ग) को लागू करते हुए आपको आवेशों के चिह्नों को शामिल करना है जैसाकि उदाहरण 5.3 में किया गया है।

$$\vec{\mathbf{F}}_1 = \vec{\mathbf{F}}_{21} + \vec{\mathbf{F}}_{31} \tag{5.4क}$$

या

$$\vec{\mathbf{F}}_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{21}^2}\hat{\mathbf{r}}_{21} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_3}{r_{31}^2}\hat{\mathbf{r}}_{31} \tag{5.4ख}$$

आम तौर पर, आवेशित कणों के एक बहु-कण निकाय में iवें आवेशित कण q_i पर अन्य सभी आवेशित कणों $q_1, q_2, \ldots, q_j, \ldots$ द्वारा आरोपित स्थिर वैद्युत बल $\vec{\mathbf{F}}_i$ होता है :

$$\vec{\mathbf{F}}_i = \sum_{j \neq i} \vec{\mathbf{F}}_{ji} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{j \neq i}\frac{q_i q_j}{r_{ji}^2}\hat{\mathbf{r}}_{ji} \tag{5.4ग}$$

दोहराएं

अध्यारोपण का सिद्धांत

आवेशित कणों के बहु-कण निकाय में किसी आवेशित कण पर लग रहा परिणामी स्थिर वैद्युत बल, उस पर निकाय के अन्य आवेशित कणों द्वारा आरोपित स्थिर वैद्युत बलों का सदिश योग होता है जो समीकरण (5.4ग) द्वारा दिया जाता है।

अब आप एक उदाहरण द्वारा अध्यारोपण के सिद्धांत को लागू करना सीखें।

उदाहरण 5.3 : अध्यारोपण का सिद्धांत

एक समकोण त्रिभुज के शीर्षों पर तीन बिंदु आवेश $q_1 = -2.0\,\mu C$, $q_2 = 9.0\,\mu C$ और $q_3 = 16.0\,\mu C$ रखे गए हैं (चित्र 5.3 देखें)। q_1 पर q_2 और q_3 द्वारा आरोपित नेट स्थिर वैद्युत बल की गणना करें।

हल ■ हम समीकरण (5.4ख) द्वारा दिए गए अध्यारोपण के सिद्धांत को तीन आवेशों के निकाय पर लागू करते हैं। चूंकि $\hat{\mathbf{r}}_{21} = -\hat{\mathbf{i}}$ और $\hat{\mathbf{r}}_{31} = -\hat{\mathbf{j}}$, अतः,

$$\vec{\mathbf{F}}_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q_1 q_2}{(r_{21})^2}(-\hat{\mathbf{i}}) + \frac{q_1 q_3}{(r_{31})^2}(-\hat{\mathbf{j}})\right] \quad \text{(i)}$$

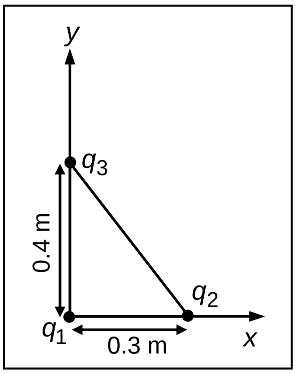
जहां $\hat{\mathbf{i}}$ और $\hat{\mathbf{j}}$ क्रमशः x और y-अक्षों के अनुदिश एकक सदिश हैं (चित्र 5.3)। समीकरण (5.4ख) में सभी आंकिक मान (आवेशों के चिन्हों समेत) रखने पर हमें मिलता है :

$$\vec{\mathbf{F}}_1 = (8.99\times10^9\,\mathrm{N m^2 C^{-2}})\left[\frac{(-2.0\times10^{-6}\,\mathrm{C})\times(9.0\times10^{-6}\,\mathrm{C})}{(0.3\,\mathrm{m})^2}(-\hat{\mathbf{i}}) + \frac{(-2.0\times10^{-6}\,\mathrm{C})\times(16.0\times10^{-6}\,\mathrm{C})}{(0.4\,\mathrm{m})^2}(-\hat{\mathbf{j}})\right] \quad \text{(ii)}$$

या $\vec{\mathbf{F}}_1 = (1.8\,\hat{\mathbf{i}} + 1.8\,\hat{\mathbf{j}})\,\mathrm{N}$

नेट बल का परिमाण है $\sqrt{(1.8)^2 + (1.8)^2}\,\mathrm{N} = 2.5\,\mathrm{N}$

बल की दिशा कोण θ कोण द्वारा दी जाती है जो वह धनात्मक x-अक्ष के साथ बनाता है : $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{1.8}{1.8}\right) = \tan^{-1}(1) = 45^\circ$



चित्र 5.3: उदाहरण 5.3 के लिए चित्र।

अभी तक आपने आवेश और विरामावस्था में स्थित आवेशित कणों/वस्तुओं के बीच लग रहे स्थिर वैद्युत बल की अवधारणाओं को दोहराया है। आपने कूलॉम नियम और अध्यारोपण के सिद्धांत को भी दोहराया है। साथ ही, आपने सजातीय और विजातीय आवेशों के बीच स्थिर वैद्युत बलों के परिमाण और दिशाएं ज्ञात करना सीखा है। अब हम विद्युत्-क्षेत्र की अवधारणा समझाएंगे। इसे भी आप स्कूल की भौतिकी में सीख चुके हैं।

5.3 विद्युत्-क्षेत्र

यद्यपि विद्युत्-क्षेत्र की अवधारणा का पहले-पहल उपयोग अंग्रेज़ भौतिकीविद् माइकेल फैराडे (1791-1867) ने विद्युत्-चुंबकीय प्रेरण पर काम करते हुए किया लेकिन उन्होंने इस अवधारणा को विकसित नहीं किया। यह काम जेम्स क्लर्क मैक्सवेल (1831-1879) ने किया जो स्कॉटलैंड के भौतिकीविद् थे। आप इन दोनों भौतिकीविदों के काम के बारे

में खंड 4 में पढ़ेंगे। आप खंड 1 में सदिश क्षेत्र की अवधारणा पढ़ चुके हैं। आपने यांत्रिकी पाठ्यक्रम की इकाई 7 में गुरुत्वाकर्षण क्षेत्र के बारे में पढ़ा है। आप जानते हैं कि विद्युत्-क्षेत्र की अवधारणा एक शक्तिशाली अवधारणा है जिसकी मदद से हम किसी आवेश पर किसी दूसरे आवेश द्वारा आरोपित बल की गणना आसानी से कर सकते हैं।

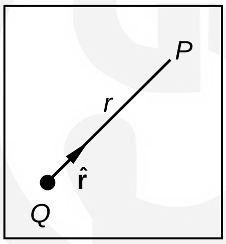
इस अवधारणा की महत्ता यह है कि किसी आवेश पर अन्य कितने ही आवेशों द्वारा आरोपित नेट स्थिर वैद्युत बल ज्ञात करने के लिए हमें कूलॉम नियम (जिसमें हमें आवेशों की आपेक्षिक स्थिति की जानकारी चाहिए होती है) और सदिशों के योग की लंबी गणना नहीं करनी पड़ती। आप इस बात को और बेहतर समझ सकेंगे जब आप इस भाग में विद्युत्-क्षेत्र की अवधारणा सीखेंगे। अब आप पूछना चाहेंगे : **हम विद्युत्-क्षेत्र को कैसे परिभाषित करते हैं**? हम चर्चा की शुरुआत एकल बिंदु आवेश की सरलतम स्थिति से करेंगे।

5.3.1 बिंदु आवेश के कारण विद्युत्-क्षेत्र

आइए, हम बिंदु आवेश के विद्युत्-क्षेत्र की परिभाषा दें।

विद्युत्-क्षेत्र

एक बिंदु आवेश *Q* के चारों ओर के प्रदेश में उसके कारण विद्युत्-क्षेत्र स्थापित होता है। यदि एक अन्य बिंदु आवेश *q* को इस प्रदेश में रखा जाता है तो उस पर कूलॉम नियम के अनुसार स्थिर वैद्युत बल लगता है। किसी बिंदु आवेश या बिंदु आवेशों के समूह के कारण **विद्युत्-क्षेत्र, सदिश क्षेत्र** होता है **जिसे निम्नवत् परिभाषित किया जाता है** :



चित्र 5.4: बिंदु आवेश *Q* के कारण बिंदु *P* पर विद्युत्-क्षेत्र के लिए एकक सदिश।

मान लें कि *q* एक अत्यल्प परिमाण वाला धनात्मक आवेश, जिसे परीक्षण आवेश (test charge) कहा जाता है, बिंदु आवेश *Q* के सापेक्ष स्थिति $\mathbf{r}$ पर रखा है (चित्र 5.4)। कूलॉम नियम से उस बिंदु पर स्थित परीक्षण आवेश *q* पर लग रहा स्थिर वैद्युत बल है :

$$\vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{r}}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{r^2}\hat{\mathbf{r}} \tag{5.5}$$

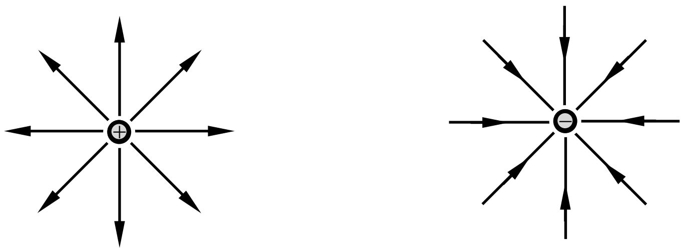
जहां $\hat{\mathbf{r}}$, सदिश $\vec{\mathbf{r}}$ के अनुदिश एकक सदिश है। तब परिभाषा से, स्थिति सदिश $\vec{\mathbf{r}}$ वाले बिंदु पर बिंदु आवेश *Q* का विद्युत्-क्षेत्र, उस बिंदु पर रखे परीक्षण आवेश *q* पर लग रहे स्थिर वैद्युत बल को, परीक्षण आवेश *q* के परिमाण से **भाग देने पर** मिलता है। इसका प्रतीक $\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}})$ है। इसका गणितीय व्यंजक है :

$$\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}) = \frac{\vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{r}})}{q} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\hat{\mathbf{r}} \tag{5.6क}$$

इसका परिमाण है : $E = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{|Q|}{r^2}$ (5.6ख)

आपने इस पाठ्यक्रम की इकाई 2 के भाग 2.2.2 में समीकरणों (5.6क और ख) द्वारा परिभाषित बिंदु आवेश *Q* के कारण विद्युत्-क्षेत्र को चित्रित करना सीखा है। चित्रों 5.5क और ख में धनात्मक और ऋणात्मक आवेशों के विद्युत्-क्षेत्रों के आरेख दिखाए गए हैं।

ध्यान दें कि धनात्मक और ऋणात्मक आवेशों ($+Q$ या $-Q$) के कारण विद्युत्-क्षेत्रों के परिमाण समान हैं। लेकिन इनकी दिशाएं भिन्न हैं क्योंकि वे इन दोनों आवेशों के संगत परीक्षण आवेशों पर लग रहे स्थिर वैद्युत बलों की दिशाओं में हैं। धनात्मक बिंदु आवेश के विद्युत्-क्षेत्र की दिशा आवेश से परे होती है (चित्र 5.5क)। ऋणात्मक बिंदु आवेश के लिए वह आवेश की ओर होती है (चित्र 5.5ख)। दोनों ही चित्रों 5.5क और 5.5ख के तीरों की दिशा विद्युत्-क्षेत्र की दिशा दिखाती है। संतत रेखाएं **क्षेत्र रेखाएं** (या बल रेखाएं) कहलाती है।



(क) **(ख)**

चित्र 5.5: क) धनात्मक आवेश; ख) ऋणात्मक आवेश के चारों ओर विद्युत्-क्षेत्र रेखाएं।

अतः, विद्युत्-क्षेत्र रेखाएं खींचने के लिए आपको हमेशा याद रखना चाहिए कि

विद्युत्-क्षेत्र रेखाएं (या बल रेखाएं) धनात्मक आवेशों से शुरु होती है और उनका अंत ऋणात्मक आवेशों पर होता है। विद्युत्-क्षेत्र रेखाएं समाप्त हुए बिना अनंत तक जा सकती हैं। ये एक-दूसरे को काटती नहीं हैं।

विद्युत्-क्षेत्र रेखाएं बिंदु आवेशों के निकट जहां विद्युत्-क्षेत्र प्रबल होता है, एक-दूसरे के निकट स्थित होती हैं। आवेशों से वृहत् दूरी पर जहां विद्युत्-क्षेत्र दुर्बल होता है, वे एक-दूसरे से काफ़ी दूर होती हैं।

समीकरण (5.6क) से, आपको ध्यान देना चाहिए कि जब आवेश q को आवेश Q के विद्युत्-क्षेत्र में रखा जाता है, तब आवेश पर लग रहा बल होता है :

$$\vec{\mathbf{F}} = q\vec{\mathbf{E}} \qquad (5.7)$$

अतः, यदि आपको समष्टि के किसी प्रदेश में विद्युत्-क्षेत्र ज्ञात है (जो किसी एकल आवेश या अनेक आवेशों के निकाय के कारण हो सकता है), तब आप समीकरण (5.7) से उस विद्युत्-क्षेत्र में रखे किसी भी आवेश पर लग रहा स्थिर वैद्युत बल ज्ञात कर सकते हैं। आगे पढ़ने से पहले आप कुछ बिंदु आवेशों के विद्युत्-क्षेत्र ज्ञात करें। इसके लिए बोध प्रश्न 2 करें।

बोध प्रश्न 2 – बिंदु आवेश के कारण विद्युत्-क्षेत्र

क) (i) बिंदु आवेश $+5\ \mu C$ से 30 cm की दूरी पर और (ii) बिंदु आवेश $-10\ \mu C$ से 1 m की दूरी पर स्थित बिंदुओं पर उनके विद्युत्-क्षेत्रों की गणना करें। विद्युत्-क्षेत्रों के लेबलित आरेख खींचें।

ख) यदि भाग (क) के आवेशों के विद्युत्-क्षेत्रों में उन्हीं बिंदुओं पर $+6\mu C$ का आवेश रखा जाए तो दोनों स्थितियों में उस पर आरोपित स्थिर वैद्युत बल क्या होगा?

अब आप पूछना चाहेंगे : **आवेशों के समूह के कारण विद्युत्-क्षेत्र की परिभाषा कैसे दी जाती है**? अगले भाग में आप यही सीखेंगे।

5.3.2 अनेक विविक्त आवेशों के कारण विद्युत्-क्षेत्र

बिंदु आवेशों का एक समूह q_j लें जिनके स्थिति सदिश $\vec{\mathbf{r}}_j$ हैं। अब हम इन आवेशों के विद्युत्-क्षेत्र में एक परीक्षण आवेश q_i रखते हैं जिसका स्थिति सदिश $\vec{\mathbf{r}}_i$ है। स्थिर वैद्युत बलों के अध्यारोपण के सिद्धांत से, इस आवेश समूह के कारण परीक्षण आवेश q_i पर नेट स्थिर वैद्युत बल है :

$$\vec{\mathbf{F}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{j \neq i} \frac{q_i\, q_j}{\left|\vec{\mathbf{r}}_i - \vec{\mathbf{r}}_j\right|^2} \hat{\mathbf{r}}_{ji} \tag{5.8}$$

परिभाषा से, स्थिति सदिश $\vec{\mathbf{r}}_i$ वाले बिंदु पर आवेशों के इस समूह के कारण विद्युत्-क्षेत्र है :

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{\vec{\mathbf{F}}}{q_i} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{j \neq i} \frac{q_j}{\left|\vec{\mathbf{r}}_i - \vec{\mathbf{r}}_j\right|^2} \hat{\mathbf{r}}_{ji} \tag{5.9}$$

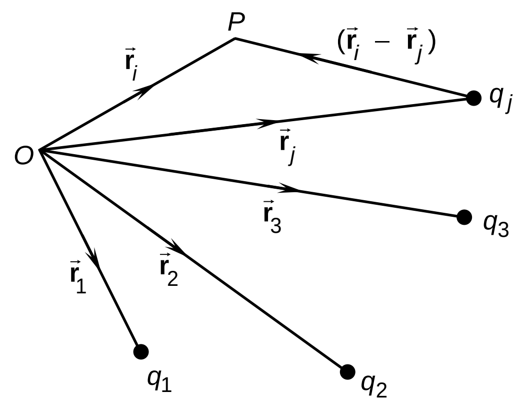
समीकरण (5.9) बिंदु आवेशों के समूह के कारण समष्टि के एक बिंदु पर विद्युत्-क्षेत्र को परिभाषित करता है। समीकरण (5.9) में प्रत्येक आवेश केवल एक बार आता है। अतः, यदि केवल एक आवेश, माना कि q_j, मौजूद हो तो उसके कारण विद्युत्-क्षेत्र होगा :

$$\vec{\mathbf{E}}_j = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_j}{\left|\vec{\mathbf{r}}_i - \vec{\mathbf{r}}_j\right|^2} \hat{\mathbf{r}}_{ji} \tag{5.10}$$

अतः, समीकरण (5.9) हो जाता है :

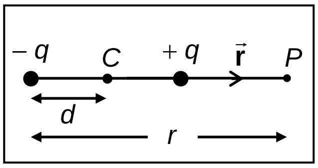
$$\vec{\mathbf{E}} = \sum_j \vec{\mathbf{E}}_j \tag{5.11}$$

दूसरे शब्दों में, **आवेशों के समूह के कारण एक दिए हुए बिंदु पर विद्युत्-क्षेत्र, सभी आवेशों के अपने-अपने विद्युत्-क्षेत्रों का सदिश योग होता है**। यह अध्यारोपण का सिद्धांत ही है। आगे पढ़ने से पहले आपको चित्र 5.6 को अच्छी तरह समझ लेना चाहिए ताकि आप समीकरण (5.10) के सदिशों को भली-भांति समझ सकें।



चित्र 5.6: आवेशों के समूह के कारण विद्युत्-क्षेत्र के व्यंजक में आने वाले सदिश। सदिश $\vec{r}_{ji} = (\vec{r}_i - \vec{r}_j)$, आवेश q_j को बिंदु P से, जिसका स्थिति सदिश $\vec{r}_j$ है, जोड़ने वाला सदिश है। सदिश $\hat{r}_{ji}$, सदिश $\vec{r}_{ji}$ के अनुदिश एकक सदिश है।

एक बार फिर, यदि समीकरण (5.9) द्वारा दिए गए विद्युत्-क्षेत्र में एक आवेश q को रखा जाए तो उस पर लग रहे स्थिर वैद्युत बल का मान हम समीकरण (5.7) से ज्ञात कर सकते हैं। कूलॉम नियम से आवेशों के समूह के कारण किसी आवेश पर लग रहे स्थिर वैद्युत बल की गणना करने की अपेक्षा इस विधि से गणना करना काफी आसान होता है। आइए, अब हम दो आवेशों के एक विशेष विन्यास, जिसे **वैद्युत द्विध्रुव** (electric dipole) कहते हैं, के कारण विद्युत्-क्षेत्र की गणना का उदाहरण लें।



चित्र 5.7: दो समान परिमाण लेकिन विपरीत चिन्हों वाले एक-दूसरे से दूरी $2d$ पर रखे आवेशों $\pm q$ से बना वैद्युत द्विध्रुव। सदिश $2\vec{\mathbf{d}}$ की दिशा द्विध्रुव अक्ष के अनुदिश ऋणात्मक आवेश से धनात्मक आवेश की ओर है। बिंदु P द्विध्रुव अक्ष के मध्य बिंदु C से दूरी r पर स्थित है।

उदाहरण 5.4 : वैद्युत द्विध्रुव के कारण विद्युत्-क्षेत्र

दो बिंदु आवेश $-q$ और $+q$ एक-दूसरे से $2d$ की दूरी पर रखे हैं (चित्र 5.7 देखें)। एक-दूसरे से कुछ दूरी पर रखे दो समान परिमाण लेकिन विपरीत चिन्हों वाले आवेशों के विन्यास को **वैद्युत द्विध्रुव** (electric dipole) कहते हैं। उन आवेशों के कारण **द्विध्रुव अक्ष** (यानी उन दोनों आवेशों को जोड़ने वाली रेखा) पर स्थित बिंदु P पर नेट विद्युत्-क्षेत्र की गणना करें। बिंदु P द्विध्रुव के अक्ष के मध्य बिंदु C से दूरी r पर स्थित है।

हल ■ समीकरण (5.10) से पहले हम बिंदु P पर प्रत्येक आवेश के कारण विद्युत्-क्षेत्र ज्ञात करेंगे और फिर समीकरण (5.11) का उपयोग करेंगे।

समीकरण (5.9) से बिंदु P पर दोनों आवेशों के विद्युत्-क्षेत्र हैं, क्रमशः

$$\vec{\mathbf{E}}_{+q} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\hat{\mathbf{r}}}{(r-d)^2} \quad \text{और} \quad \vec{\mathbf{E}}_{-q} = \frac{(-q)}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\hat{\mathbf{r}}}{(r+d)^2}$$

यहां $\hat{\mathbf{r}}$ आवेश $-q$ से आवेश $+q$ की ओर दोनों आवेशों को जोड़ने वाली रेखा के अनुदिश एकक सदिश है और d मध्य बिंदु से प्रत्येक आवेश की दूरी है (चित्र 5.7 देखें)। समीकरण (5.11) से बिंदु P पर दोनों आवेशों के कारण परिणामी या नेट विद्युत्-क्षेत्र है :

$$\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{E}}_{+q} + \vec{\mathbf{E}}_{-q} = \frac{q\hat{\mathbf{r}}}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{4rd}{(r^2-d^2)^2}\right)$$

यदि हम मान लें कि बिंदु P की द्विध्रुव से दूरी बहुत अधिक है यानी $r >> d$ है ताकि $\vec{\mathbf{E}}$ के व्यंजक के हर में r^2 की तुलना में d^2 नगण्य हो, तो बिंदु P पर नेट विद्युत्-क्षेत्र है :

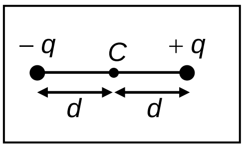
$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\times\frac{q\hat{\mathbf{r}}(4rd)}{r^4} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\vec{\mathbf{p}}}{r^3} \qquad \text{(i)}$$

जहां $\vec{\mathbf{p}} = 2qd\hat{\mathbf{r}} \; (= 2q\vec{\mathbf{d}})$ एक सदिश राशि है जिसे **द्विध्रुव आघूर्ण** कहते हैं।

अब आप वैद्युत द्विध्रुव के कारण विद्युत्-क्षेत्र की गणना करें।

बोध प्रश्न 3 – वैद्युत द्विध्रुव के कारण विद्युत्-क्षेत्र

वैद्युत द्विध्रुव के अक्ष के मध्यबिंदु पर उसके विद्युत्-क्षेत्र की गणना करें (चित्र 5.8)।



चित्र 5.8: बोध प्रश्न 3 के लिए चित्र।

अब हम एक ऐसे बिंदु पर वैद्युत द्विध्रुव के कारण विद्युत्-क्षेत्र की गणना करेंगे जो उसके अक्ष पर स्थित नहीं है।

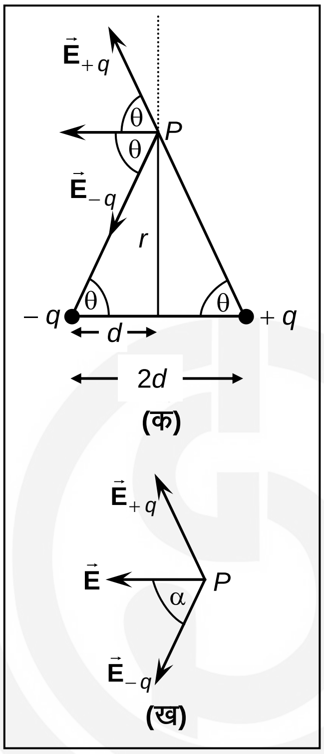
उदाहरण 5.5 : वैद्युत द्विध्रुव के कारण विद्युत्-क्षेत्र

उदाहरण 5.4 के वैद्युत द्विध्रुव के कारण, द्विध्रुव अक्ष के लंब अर्धक पर द्विध्रुव अक्ष के मध्य बिंदु C से दूरी r पर स्थित बिंदु P पर नेट विद्युत्-क्षेत्र ज्ञात करें।

हल ■ उदाहरण 5.4 की तरह हम समीकरण (5.10) से बिंदु P पर प्रत्येक आवेश के कारण विद्युत्-क्षेत्र ज्ञात करेंगे और फिर समीकरण (5.11) लागू करेंगे।

दोनों आवेशों $+q$ और $-q$ से बिंदु P की दूरी $\sqrt{(d^2 + r^2}$ है। अतः,
समीकरण (5.10) से दोनों आवेशों के कारण विद्युत्-क्षेत्रों के परिमाण हैं, क्रमशः,

$$E_{+q} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{d^2 + r^2} \quad \text{और} \quad E_{-q} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{d^2 + r^2}$$



चित्र 5.9: उदाहरण 5.5 के लिए चित्र।

चित्र 5.9क से आप देख सकते हैं कि विद्युत्-क्षेत्र की दिशा आवेश $+q$ से बहिर्मुखी है और आवेश $-q$ की ओर है।

P पर परिणामी विद्युत्-क्षेत्र ज्ञात करने के लिए हम दोनों विद्युत्-क्षेत्रों का सदिश योग **समांतर चतुर्भुज नियम** से प्राप्त करते हैं। चित्र 5.9क से ध्यान दें कि दोनों विद्युत्-क्षेत्रों के बीच का कोण 2θ है। अतः, परिणामी विद्युत्-क्षेत्र के परिमाण और दिशा हैं [याद करें खंड 1 के परिशिष्ट क1 के समीकरण (क1.3क और ख)] :

$$E = \sqrt{E_{+q}^2 + E_{-q}^2 + 2E_{+q}E_{-q}\cos 2\theta} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2q}{d^2 + r^2}\cos\theta$$

या $$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2qd}{(d^2 + r^2)^{3/2}} \quad \text{चूंकि } \cos\theta = \frac{d}{\sqrt{d^2 + r^2}}$$

परिणामी विद्युत्-क्षेत्र की दिशा उस कोण α द्वारा दी जाती है जो वह $\vec{\mathbf{E}}_{-q}$ से बनाता है (चित्र 5.9ख) :

$$\alpha = \tan^{-1}\left[\frac{E_{+q}\sin 2\theta}{E_{-q} + E_{+q}\cos 2\theta}\right] = \tan^{-1}[\tan\theta] = \theta$$

ध्यान दें कि $\vec{\mathbf{E}}$ की दिशा $\vec{\mathbf{p}}$ के विपरीत है। अतः, बिंदु P पर हम $\vec{\mathbf{E}}$ को इस तरह लिख सकते हैं :

$$\vec{\mathbf{E}} = -\frac{\vec{\mathbf{p}}}{4\pi\varepsilon_0(r^2 + d^2)^{3/2}}$$

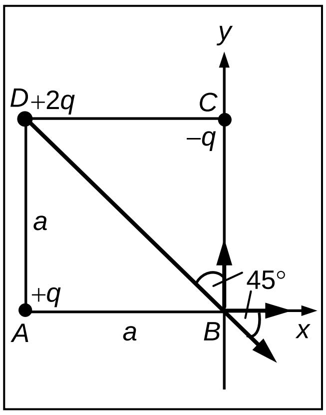
यदि बिंदु P की द्विध्रुव से दूरी बहुत अधिक है यानी $r >> d$ है तो वैद्युत द्विध्रुव के कारण बिंदु P पर नेट विद्युत्-क्षेत्र $\vec{\mathbf{E}}$ को हम इस तरह लिख सकते हैं :

$$\vec{\mathbf{E}} = -\frac{\vec{\mathbf{p}}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \qquad \text{(i)}$$

अब आप दो से अधिक आवेशों वाले निकाय का विद्युत्-क्षेत्र ज्ञात करना सीखेंगे। इसके लिए उदाहरण 5.6 को ध्यान से समझें।

उदाहरण 5.6 : अनेक आवेशों के कारण विद्युत्-क्षेत्र

तीन आवेश $+q, +2q$ और $-q$, xy तल में भुजा a वाले एक वर्ग $ABCD$ के तीन शीर्षों पर रखे हुए हैं जैसाकि चित्र 5.10 में दिखाया गया है। बिंदु B पर इन आवेशों के कारण नेट विद्युत्-क्षेत्र ज्ञात करें।



चित्र 5.10: उदाहरण 5.6 के लिए चित्र।

हल ■ हम समीकरण (5.10) से बिंदु B पर प्रत्येक आवेश के कारण विद्युत्-क्षेत्र ज्ञात करेंगे और फिर समीकरण (5.11) लागू कर नेट विद्युत्-क्षेत्र ज्ञात करेंगे।

आवेश $+q$ के कारण B पर विद्युत्-क्षेत्र है : $\vec{\mathbf{E}}_{+q} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{|q|}{a^2}\hat{\mathbf{i}}$ जहां $\hat{\mathbf{i}}$, x-अक्ष के अनुदिश एकक सदिश है। गणित को आसान रखने के लिए हम लिखते हैं :

$$E_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|q|}{a^2} \quad \text{ताकि} \quad \vec{\mathbf{E}}_{+q} = E_0\,\hat{\mathbf{i}}$$

B पर आवेश $-q$ के कारण विद्युत्-क्षेत्र है : $\vec{\mathbf{E}}_{-q} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{|q|}{a^2}(\hat{\mathbf{j}}) = E_0\,\hat{\mathbf{j}}$

चित्र 5.10 से हम B पर आवेश $+2q$ के कारण विद्युत्-क्षेत्र को x और y-अक्षों के अनुदिश वियोजित करते हैं :

$$\vec{\mathbf{E}}_{+2q} = E_{+2q}\cos 45^\circ\,\hat{\mathbf{i}} - E_{+2q}\sin 45^\circ\,\hat{\mathbf{j}} \quad \text{जहां} \quad E_{+2q} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2q}{(\sqrt{2}a)^2} = E_0$$

अतः, B पर नेट विद्युत्-क्षेत्र है :

$$\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{E}}_{+q} + \vec{\mathbf{E}}_{-q} + \vec{\mathbf{E}}_{+2q} = E_0\,\hat{\mathbf{i}} + E_0\,\hat{\mathbf{j}} + \frac{E_0}{\sqrt{2}}(\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}})$$

या
$$\vec{\mathbf{E}} = E_0\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\hat{\mathbf{i}} + E_0\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\hat{\mathbf{j}}$$

नेट विद्युत्-क्षेत्र का परिणामी है [खंड 1 के परिशिष्ट क1 का समीकरण (क1.3क)] :

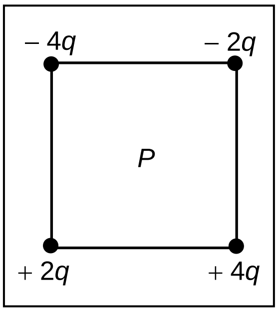
$$E = E_0\sqrt{\left[\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right]} = \sqrt{3}\,E_0$$

परिणामी विद्युत्-क्षेत्र की दिशा कोण θ द्वारा दी जाती है :

$$\theta = \tan^{-1}\left[\frac{\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}\right] = \tan^{-1}[0.17] \Rightarrow \theta = 9.6^\circ$$

परिणामी विद्युत्-क्षेत्र का परिमाण $\dfrac{\sqrt{3}}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{|q|}{a^2}$ है और यह x-अक्ष से 9.6° के कोण पर है।

आगे पढ़ने से पहले, आप अनेक आवेशों के कारण उत्पन्न विद्युत्-क्षेत्र की गणना का अभ्यास करना चाहेंगे।



चित्र 5.11: बोध प्रश्न 4 के लिए चित्र।

बोध प्रश्न 4 – अनेक आवेशों के कारण विद्युत्-क्षेत्र

भुजा a वाले वर्ग के शीर्षों पर चार आवेशों $+2q, -2q, +4q$ और $-4q$ को रखा गया है (चित्र 5.11)। वर्ग के केंद्र P पर इन आवेशों के कारण नेट विद्युत्-क्षेत्र ज्ञात करें जबकि दिया है कि $q = 1.0 \times 10^{-9}\,C$ और $a = 6.0$ cm ।

अभी तक हमने विद्युत्-क्षेत्र की परिभाषा दी है और एक विलगित बिंदु आवेश तथा दो या अधिक बिंदु आवेशों के निकाय के लिए इसकी गणना की है। अब आप जानना चाहेंगे : **एक तार, पटल या गोले जैसे संतत आवेश वितरण के कारण विद्युत्-क्षेत्र क्या होता है**? आइए, इसका पता लगाएं।

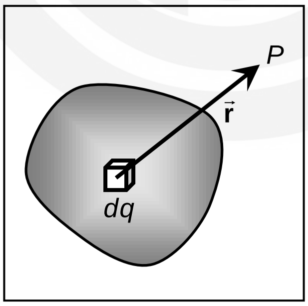
5.3.3 संतत आवेश वितरणों के कारण विद्युत्-क्षेत्र

आइए, हम चित्र 5.12 में दिखाए गए एक संतत आवेश वितरण के कारण स्थिति सदिश $\vec{\mathbf{r}}_i$ वाले बिंदु P पर विद्युत्-क्षेत्र की गणना करें। मान लें कि संतत आवेश वितरण अत्यणु आवेशों dq_j से बना है। तब समीकरण (5.10) से, अत्यणु आवेश dq_j (जिसका स्थिति सदिश $\vec{\mathbf{r}}_j$ है) का बिंदु P पर विद्युत्-क्षेत्र $d\vec{\mathbf{E}}_j$ है :

$$d\vec{\mathbf{E}}_j = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{dq_j}{\left|\vec{\mathbf{r}}_i - \vec{\mathbf{r}}_j\right|^2} \hat{\mathbf{r}}_{ji} \qquad (5.12)$$

अध्यारोपण सिद्धांत से [समीकरण (5.11) और (5.9)], बिंदु P पर आवेश वितरण के कारण नेट विद्युत्-क्षेत्र $\vec{\mathbf{E}}$, **उस वितरण में निहित ऐसे सभी अत्यणु आवेशों के उस बिंदु पर विद्युत्-क्षेत्रों के सदिश योग के बराबर होगा** :

$$\vec{\mathbf{E}} = \sum_j d\vec{\mathbf{E}}_j = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_j \frac{dq_j}{\left|\vec{\mathbf{r}}_i - \vec{\mathbf{r}}_j\right|^2} \hat{\mathbf{r}}_{ji} \qquad (5.13)$$



चित्र 5.12: संतत आवेश वितरण के कारण किसी बिंदु पर विद्युत्-क्षेत्र की गणना ।

लेकिन उस सीमा में जबकि आवेश अत्यणु होते हैं और शून्य की ओर प्रवृत्त होते हैं, तब समीकरण (5.13) का योग निम्नलिखित समाकल के रूप में लिखा जा सकता है :

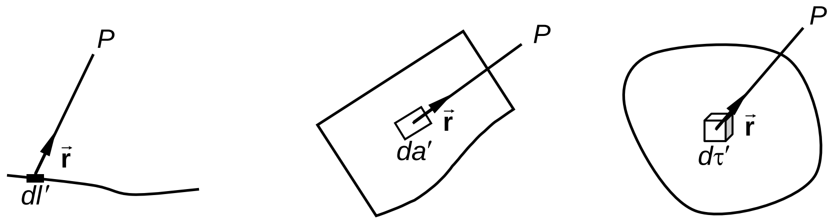
$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{dq}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \qquad (5.14)$$

समाकल की सीमाएं इस तरह निर्धारित की जाती हैं कि जिस प्रदेश पर आवेश वितरित है, वह पूरे तौर पर समाकल में शामिल रहे। याद रहे कि समीकरण (5.14) में, $\hat{\mathbf{r}}$ आवेश dq से बिंदु P की दिशा में, एकक सदिश है ($\vec{\mathbf{r}}$ बिंदु P का स्थिति सदिश है) और उस बिंदु पर ही विद्युत्-क्षेत्र की गणना की जा रही है (चित्र 5.12 देखें)।

अब, आवेश किसी रेखा, सतह या आयतन में वितरित हो सकता है जैसाकि आप चित्रों 5.13क, ख और ग में देख सकते हैं। ऐसे वितरणों में, आवेश के बजाय हम आवेश घनत्व की बात करते हैं। आम तौर पर (रेखा, पृष्ठ या आयतन) आवेश घनत्व निर्देशांकों का फलन होगा। लेकिन इस पाठ्यक्रम में हम केवल अचर आवेश घनत्व वाले आवेश वितरण ही लेंगे। यदि आवेश एक रेखा पर वितरित है (चित्र 5.13क), तब हम **रेखा आवेश घनत्व** (line charge density) यानी **प्रति एकक लंबाई आवेश** की बात

करते हैं और प्रायः इसका प्रतीक λ लेते हैं। λ का SI मात्रक Cm^{-1} है। रेखा आवेश, आम तौर पर रेखा के **अनुदिश** स्थिति का फलन होता है। उसका व्यंजक हाशिए की टिप्पणी में दिया गया है। यदि रेखा आवेश एकसमान रूप से वितरित हो, तो रेखा आवेश घनत्व λ अचर होता है और तब हम लिख सकते हैं :

$$dq = \lambda\, dL \tag{5.15क}$$



रेखा आवेश घनत्व λ पृष्ठ आवेश घनत्व σ आयतन आवेश घनत्व ρ

(क) (ख) (ग)

चित्र 5.13: क) रेखा आवेश वितरण; ख) पृष्ठ आवेश वितरण; ग) आयतन आवेश वितरण के कारण विद्युत्-क्षेत्र की गणना।

अतः, परिभाषा से, **एकसमान रूप से वितरित रेखा आवेश** का विद्युत्-क्षेत्र होता है :

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_C \frac{\lambda\, dL}{r^2}\hat{\mathbf{r}} \quad \text{या} \quad \vec{\mathbf{E}} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_C \frac{dL}{r^2}\hat{\mathbf{r}} \tag{5.15ख}$$

किसी पृष्ठ पर संतत आवेश वितरण (चित्र 5.13ख), के लिए **पृष्ठ आवेश घनत्व σ प्रति क्षेत्रफल आवेश के बराबर** होता है। इसका SI मात्रक Cm^{-2} है। किसी पृष्ठ पर एकसमान रूप से वितरित आवेश के लिए σ अचर होता है। तब हम लिखते हैं :

$$dq = \sigma\, dS \tag{5.16क}$$

और परिभाषा से, **एकसमान रूप से वितरित पृष्ठ आवेश** का विद्युत्-क्षेत्र होता है :

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\iint_S \frac{dS}{r^2}\hat{\mathbf{r}} \tag{5.16ख}$$

समीकरण (5.16ख) एक पृष्ठ समाकल है जिसके बारे में आपने इस पाठ्यक्रम की इकाई 4 में पढ़ा है।

यदि संतत आवेश वितरण किसी आयतन में वितरित है (चित्र 5.13ग) तो हम **आयतन आवेश घनत्व** ρ की बात करते हैं जो **प्रति एकक आयतन आवेश के बराबर** होता है। इसका SI मात्रक Cm^{-3} है। किसी आयतन में एकसमान रूप से वितरित आवेश के लिए ρ अचर होता है और हम लिखते हैं :

$$dq = \rho\, dV \tag{5.17क}$$

परिभाषा से, **एकसमान रूप से वितरित आयतन आवेश** का विद्युत्-क्षेत्र होता है :

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{\rho}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_V \frac{dV}{r^2}\hat{\mathbf{r}} \tag{5.17ख}$$

आइए, हम समीकरण (5.15ख) को जो इन समीकरणों में सबसे सरल है लागू करके, एकसमान रेखा आवेश का विद्युत्-क्षेत्र परिकलित करें।

आम तौर पर, जब रेखा आवेश घनत्व अचर नहीं होता, तब

$$dq = \lambda(\vec{\mathbf{r}}')\, dL'$$

और $q = \int_C \lambda(\vec{\mathbf{r}}')\, dL'$ (i)

मान लें कि हम इन समाकलों को हल करने के लिए कार्तीय निर्देशांकों का उपयोग करते हैं। तब समीकरण (i) में हम एक ही चर x, y या z के सापेक्ष समाकलित करेंगे जो इस पर निर्भर करता है कि रेखा आवेश किस अक्ष (x, y या z-अक्ष) के अनुदिश वितरित है।

असमान पृष्ठ आवेश वितरण के लिए σ अचर नहीं होता और तब

$$dq = \sigma(\vec{\mathbf{r}}')\, dS'$$

$q = \iint_S \sigma(\vec{\mathbf{r}}')\, dS'$ (ii)

चूंकि क्षेत्रफल द्विविम में परिभाषित होता है, अतः, हम समीकरण (ii) को दो चरों के सापेक्ष समाकलित करेंगे x और y, y और z या z और x ।

असमान आयतन आवेश वितरण के लिए ρ अचर नहीं होता और तब

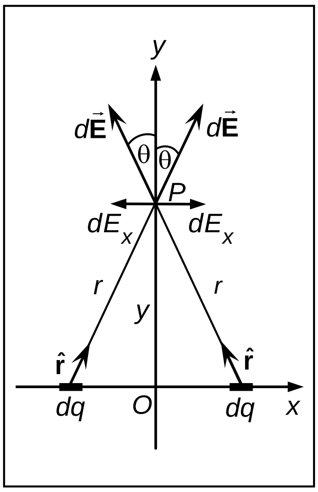
$$dq = \rho(\vec{\mathbf{r}}')\, dV'$$

और

$q = \iiint_V \rho(\vec{\mathbf{r}}')\, dV'$ (iii)

चूंकि आयतन त्रिविम में परिभाषित होता है, अतः, हम समीकरण (iii) को तीन चरों x, y और z के सापेक्ष समाकलित करेंगे।

ये गणनाएं इस पाठ्यक्रम के दायरे से बाहर हैं।



चित्र 5.14: एकसमान अनंत रेखा आवेश के कारण किसी बिंदु पर विद्युत् क्षेत्र।

उदाहरण 5.7 : अनंत रेखा आवेश के कारण विद्युत्-क्षेत्र

अनंत लंबाई की एक रेखा पर रेखा आवेश घनत्व λ वाला एकसमान आवेश वितरित है। रेखा के मध्यबिंदु के ऊपर दूरी y पर स्थित बिंदु पर विद्युत्-क्षेत्र की गणना करें।

हल ■ हम एकसमान रूप से वितरित अनंत रेखा आवेश के विद्युत्-क्षेत्र की गणना के लिए समीकरण (5.15ख) का उपयोग करेंगे। चित्र 5.14 में इस रेखा आवेश वितरण को दिखाया गया है। आइए, इस गणना के लिए हम xy निर्देशांक तंत्र लें जिसका मूलबिंदु रेखा के मध्यबिंदु पर है। यहां

$$dq = \lambda dx \qquad \text{(i)}$$

परिभाषा से, dq के कारण मूलबिंदु के ठीक ऊपर बिंदु P पर विद्युत्-क्षेत्र का **परिमाण** है

$$d\vec{\mathbf{E}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2}\hat{\mathbf{r}} \qquad \text{(ii)}$$

जहां r, P से dq की दूरी है और $\hat{\mathbf{r}}$, dq से P तक एकक सदिश है। ध्यान दें कि $\hat{\mathbf{r}}$ की दिशा अलग-अलग आवेश अवयवों के लिए अलग होगी। अब नेट विद्युत्-क्षेत्र ज्ञात करने के लिए, हम विद्युत्-क्षेत्र $d\vec{\mathbf{E}}$ को उसके x और y-घटकों के पदों में लिखते हैं और फिर संबद्ध चर x या y पर प्रत्येक घटक का समाकलन करते हैं।

निर्देशांक तंत्र के इस चयन के कारण यह गणना आसान हो जाती है। ध्यान दें कि प्रत्येक उस आवेश अवयव dq के लिए जिसे मूलबिंदु के दायीं ओर बिंदु $+x$ पर रखा गया है, हम मूलबिंदु के बायीं ओर बिंदु $-x$ पर संगत अत्यणु आवेश dq रख सकते हैं। अतः, ये एक युग्म बनाते हैं। अब इस युग्म के कारण P पर विद्युत्-क्षेत्रों के x-घटक निरस्त हो जाते हैं जैसाकि आप चित्र 5.14 में देख सकते हैं। यह x-अक्ष पर स्थित प्रत्येक बिंदु युग्म $\pm x$ के लिए सत्य है। अतः, विद्युत्-क्षेत्र $d\vec{\mathbf{E}}$ का x-घटक शून्य होगा। आवेश अवयव dq के कारण विद्युत्-क्षेत्र का y-घटक है :

$$dE = dE_y = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2}\cos\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2}\frac{y}{r} \quad \left(\because \cos\theta = \frac{y}{r}\right) \qquad \text{(iii)}$$

जहां θ, $\hat{\mathbf{r}}$ और y-अक्ष के बीच का कोण है। हम बिंदुओं $\pm x$ पर दोनों आवेश अवयवों के विद्युत्-क्षेत्रों के y-घटकों को जोड़ते हैं जोकि एक ही दिशा में हैं। तब उनके कारण नेट विद्युत्-क्षेत्र होता है :

$$d\vec{\mathbf{E}}_{net} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2dq}{r^2}\frac{y}{r}\hat{\mathbf{j}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2y\lambda dx}{(x^2+y^2)^{3/2}}\hat{\mathbf{j}} \quad (\because dq = \lambda dx)$$

रेखा आवेश के कारण नेट विद्युत्-क्षेत्र का मान हम x के सापेक्ष सीमाओं 0 से ∞ तक $d\vec{\mathbf{E}}_{net}$ को समाकलित करके प्राप्त करते हैं। हालांकि यह रेखा $-\infty$ से $+\infty$ तक विस्तारित है, हम सीमाएं 0 से ∞ तक रखते हैं क्योंकि हम जिस व्यंजक का समाकलन कर रहे हैं, वह आवेश युग्म dq के कारण विद्युत्-क्षेत्र का व्यंजक है।

अतः,
$$\vec{\mathbf{E}}_{net} = \int d\vec{\mathbf{E}}_{net} = \int_{x=0}^{x=\infty}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2y\lambda dx}{(x^2+y^2)^{3/2}}\hat{\mathbf{j}} \qquad \text{(iv)}$$

समीकरण (iv) के दायें पक्ष को समाकलित करने पर हमें मिलता है (हाशिए पर दी गई टिप्पणी पढ़ें) :

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\lambda}{y}\hat{\mathbf{j}}$$

मान लें कि $x = y\tan\theta$ है।

तब $dx = y\,d\theta\sec^2\theta$

जहां सीमाएं 0 से $\frac{\pi}{2}$ तक हैं। तब विद्युत्-क्षेत्र है :

$$\vec{\mathbf{E}}_{net} = \frac{\lambda y}{2\pi\varepsilon_0}\int_0^{\pi/2}\frac{y\sec^2\theta\,d\theta}{y^3\sec^3\theta}\hat{\mathbf{j}}$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 y}\int_0^{\pi/2}\cos\theta\,d\theta\,\hat{\mathbf{j}}$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 y}\sin\theta\Big|_0^{\pi/2}\hat{\mathbf{j}}$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 y}\hat{\mathbf{j}}$$

आप मानेंगे कि विद्युत्-क्षेत्र की गणना का यह तरीका काफ़ी लंबा है और इसमें जटिल समाकलों को हल करना पड़ता है। अगली इकाई में आप ऐसे संतत आवेश वितरणों के, जिनमें कोई सममिति होती है, विद्युत्-क्षेत्रों की गणना का आसान तरीका सीखेंगे।

आइए, अब थोड़ा ठहर कर दोहराएं कि आपने इस भाग में क्या सीखा। सार रूप में, आपने विद्युत्-क्षेत्र की परिभाषा सीखी है और उसकी गणना बिंदु आवेश के लिए की है। साथ ही, आपने वियुक्त आवेशों के निकाय और संतत रेखा आवेश के लिए विद्युत्-क्षेत्र की गणना करना भी सीखा है। लेकिन इस भाग को पढ़ते हुए शायद यह सवाल आपके मन में फिर भी आया हो : **आखिर यह विद्युत्-क्षेत्र वस्तुतः क्या है**?

आपको यह समझना चाहिए कि किसी भी आवेश, आवेश समूहों या संतत आवेश वितरणों के विद्युत्-क्षेत्र का, जो उनके कारण उनके परिवेश में स्थापित होता है, एक **वास्तविक** भौतिक अस्तित्व होता है। विद्युत्-क्षेत्र में रखे किसी भी आवेश पर समीकरण (5.7) द्वारा दिया गया स्थिर वैद्युत बल लगता है। विद्युत्-क्षेत्र की अवधारणा अमूर्त (abstract) है और इसकी यथार्थ या मूर्त रूप में कल्पना करना कठिन है। लेकिन आप विद्युत्-क्षेत्र की गणना करना सीख गए हैं। साथ ही, आप विद्युत्-क्षेत्र में रखे आवेश पर लग रहे स्थिर वैद्युत बल की गणना करना भी सीख गए हैं।

वास्तव में, स्थिर विद्युतिकी में हमारा लक्ष्य भी यही होता है कि हम किसी भी दिए हुए आवेश वितरण के कारण विद्युत्-क्षेत्रों और स्थिर वैद्युत बलों को ज्ञात करें। लेकिन जैसाकि उदाहरण 5.7 को हल करते हुए आपको समझ आया होगा, सरल आवेश वितरणों के कारण उत्पन्न विद्युत्-क्षेत्रों की गणना करना भी काफ़ी जटिल हो सकता है। अतः, स्थिर विद्युतिकी पढ़ते हुए हमारा अधिकतर प्रयास यह होता है कि हम वे तकनीकें और विधियां सीखें जिनसे ये जटिल गणनाएं आसान हो जाएं ताकि हमें ये जटिल समाकल हल न करने पड़ें। इस खंड की बाकी इकाइयों में और अगले खंड की इकाइयों 10 और 11 में आप यही सीखेंगे।

अब आपने इस इकाई में जो कुछ पढ़ा है, हम उसका सारांश देंगे।

5.4 सारांश

अवधारणा	विवरण
विद्युत् आवेश	■ अनेक प्रेक्षणों और प्रयोगों से यह पता लगाया गया है कि प्रकृति में दो प्रकार के विद्युत् आवेशों का अस्तित्व होता है और इन्हें स्वैच्छिक रूप से धनात्मक और ऋणात्मक आवेश कहा जाता है। SI प्रणाली में, विद्युत् आवेश का मात्रक कूलॉम है और इसका प्रतीक C है। सजातीय आवेश एक-दूसरे को प्रतिकर्षित करते हैं और विजातीय आवेश एक-दूसरे को आकर्षित करते हैं। विलगित निकाय में विद्युत् आवेश सदैव संरक्षित रहता है। अतः, एक विलगित निकाय में कुल धनात्मक आवेश, कुल ऋणात्मक आवेश के बराबर होता है। मुक्त विद्युत् आवेश क्वान्टमीकृत होता है और इसके विविक्त मान ही संभव हैं जो इलेक्ट्रॉन के आवेश के पूर्णांक गुणज होते हैं।

स्थिर वैद्युत बल और कूलॉम नियम

- **विरामावस्था में स्थित** दो आवेशित कणों के बीच लग रहे **स्थिर वैद्युत बल** का परिमाण उन पर मौजूद आवेशों के परिमाणों के गुणनफल का समानुपाती होता है और उनके बीच की दूरी के वर्ग का व्युत्क्रमानुपाती। आवेश q_2 द्वारा उससे दूरी r पर स्थित आवेश q_1 पर आरोपित स्थिर वैद्युत बल **कूलॉम नियम** द्वारा दिया जाता है :

$$\vec{\mathbf{F}}_{21} = k \frac{q_1 q_2}{|\vec{\mathbf{r}}_{21}|^2} \hat{\mathbf{r}}_{21}$$

जहां $\hat{\mathbf{r}}_{21}$ कणों को जोड़ने वाली रेखा के अनुदिश q_2 से q_1 की ओर एकक सदिश है। ध्यान दें कि $|\vec{\mathbf{r}}_{21}| = r$ और $\vec{\mathbf{r}}_{21} = \vec{\mathbf{r}}_1 - \vec{\mathbf{r}}_2$ है जहां $\vec{\mathbf{r}}_1$ और $\vec{\mathbf{r}}_2$ क्रमशः q_1 और q_2 के स्थिति सदिश हैं। SI मात्रकों में कूलॉम नियम होता है :

$$\vec{\mathbf{F}}_{21} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{|\vec{\mathbf{r}}_{21}|^2} \hat{\mathbf{r}}_{21}$$

अध्यारोपण का सिद्धांत

- **अध्यारोपण के सिद्धांत** के अनुसार, विरामावस्था में स्थित आवेशित कणों के बहु-कण निकाय में किसी आवेशित कण पर परिणामी स्थिर वैद्युत बल, उस पर बाकी सभी कणों द्वारा आरोपित स्थिर वैद्युत बलों का सदिश योग होता है। आम तौर पर विरामावस्था में स्थित निकाय में बाकी सभी आवेशों $q_1, q_2, \ldots, q_j, \ldots$ द्वारा iवें आवेशित कण पर स्थिर वैद्युत बल होता है :

$$\vec{\mathbf{F}}_i = \sum_{j \neq i} \vec{\mathbf{F}}_{ji} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{j \neq i} \frac{q_i q_j}{r_{ji}^2} \hat{\mathbf{r}}_{ji}$$

ध्यान दें कि ऊपर दिए योग में iवां आवेश शामिल नहीं है और $\hat{\mathbf{r}}_{ji}$, iवें और jवें कणों को जोड़ने वाली रेखा के अनुदिश एकक सदिश है और इसकी दिशा q_j से q_i की ओर है।

बिंदु आवेश के कारण विद्युत्-क्षेत्र

- परिभाषा से, किसी बिंदु पर एक बिंदु आवेश के कारण विद्युत्-क्षेत्र, उस बिंदु पर रखे एक परीक्षण आवेश पर लग रहे स्थिर वैद्युत बल को परीक्षण आवेश के परिमाण से भाग देने पर प्राप्त होता है :

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{\vec{\mathbf{F}}}{q}$$

स्थिति सदिश $\vec{\mathbf{r}}$ वाले बिंदु पर आवेश Q के कारण विद्युत्-क्षेत्र का मान होता है :

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{\vec{\mathbf{F}}}{q} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

जहां $\hat{\mathbf{r}}$ आवेश से उस बिंदु की, जिस पर विद्युत्-क्षेत्र ज्ञात किया जा रहा है, दिशा में एकक सदिश है।

अनेक विविक्त आवेशों के कारण विद्युत्-क्षेत्र

- स्थिति सदिश $\vec{\mathbf{r}}_i$ वाले बिंदु पर विविक्त आवेशित कणों के वितरण के कारण उत्पन्न विद्युत्-क्षेत्र अध्यारोपण के सिद्धांत द्वारा दिया जाता है :

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{\vec{\mathbf{F}}}{q_i} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_j \frac{q_j}{|\vec{\mathbf{r}}_i - \vec{\mathbf{r}}_j|^2} \hat{\mathbf{r}}_{ji}$$

जहां $\hat{\mathbf{r}}_{ji}$, iवें और jवें कणों को जोड़ने वाली रेखा के अनुदिश एकक सदिश है और इसकी दिशा q_j से q_i की ओर है। इस समीकरण को हम इस तरह लिख सकते हैं :

$$\vec{\mathbf{E}} = \sum_j \vec{\mathbf{E}}_j$$

जहां $$\vec{\mathbf{E}}_j = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_j}{\left|\vec{\mathbf{r}}_i - \vec{\mathbf{r}}_j\right|^2} \hat{\mathbf{r}}_{ji}$$

अतः, **आवेशों के एक वितरण के कारण विद्युत्-क्षेत्र, उस वितरण के व्यष्टिगत आवेशों के कारण विद्युत्-क्षेत्रों के सदिश योग के बराबर होता है।**

संतत आवेश वितरणों के कारण विद्युत्-क्षेत्र

- संतत आवेश वितरण के कारण विद्युत्-क्षेत्र का मान होता है :

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{dq}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

एकसमान रूप से वितरित रेखा आवेश, जिसका अचर रेखा आवेश घनत्व λ हो, के कारण विद्युत्-क्षेत्र होता है :

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \int_C \frac{dL}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

एकसमान रूप से वितरित पृष्ठ आवेश, जिसका पृष्ठ आवेश घनत्व σ हो, के कारण विद्युत्-क्षेत्र होता है :

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0} \iint_S \frac{dS}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

एकसमान रूप से वितरित आयतन आवेश, जिसका आयतन आवेश घनत्व ρ हो, के कारण विद्युत्-क्षेत्र होता है :

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{\rho}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_V \frac{dV}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

5.5 अंत में कुछ प्रश्न

1. विरामावस्था में स्थित दो बिंदु आवेशों द्वारा एक-दूसरे पर आरोपित स्थिर वैद्युत बल का परिमाण 10 N है जब इनके बीच की दूरी r है। यदि इनके बीच की दूरी क) $4r$, ख) $100r$, ग) $\frac{r}{4}$ और घ) $\frac{r}{100}$ हो, तो इनके बीच लग रहे स्थिर वैद्युत बल का परिमाण क्या होगा?

2. दो एक-जैसे आवेशित कणों को एक-दूसरे से 1 m की दूरी पर विरामावस्था में रखा जाता है। यदि प्रत्येक कण पर लग रहे स्थिर वैद्युत बल का परिमाण 1 N हो तो उन पर कितना आवेश है?

3. तीन आवेशित कणों A, B और C को जिनमें से प्रत्येक पर 1.0 μC आवेश है, एक सीधी रेखा में विरामावस्था में रखा जाता है। A और B के बीच की दूरी 0.01 m है। कण C पर लग रहा नेट स्थिर वैद्युत बल क्या होगा यदि इसे

क) रेखा AB के अनुदिश कण B के दायीं ओर उससे 0.01 m की दूरी पर रखा जाए,

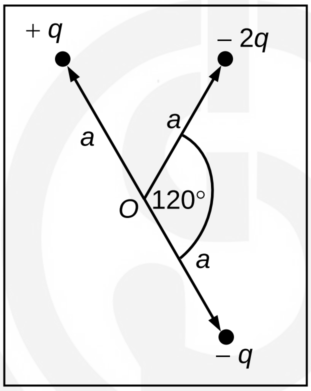
ख) रेखा AB के अनुदिश कण B के बायीं ओर AB के मध्यबिंदु पर रखा जाए?

4. दो बिंदु आवेशों $+4q$ और $+q$ को विरामावस्था में एक-दूसरे से दूरी 'a' पर रखा जाता है। इन आवेशों को जोड़ने वाली रेखा पर रखा गया एक आवेश $+q$ यदि साम्यावस्था में हो, तो उसकी स्थिति ज्ञात करें।

5. आवेश -9.0×10^{-9} C वाले एक कण का उससे 1.0 m की दूरी पर विद्युत्-क्षेत्र क्या है? उस बिंदु पर रखे गए प्रोटॉन पर आरोपित स्थिर वैद्युत बल ज्ञात करें।

6. एक आवेशित कण से 0.5 m की दूरी पर उसके विद्युत्-क्षेत्र का परिमाण 36 NC^{-1} है। उस कण पर आवेश का परिमाण क्या है?

7. जब आवेश -9×10^{-9} C वाले एक कण को किसी विद्युत्-क्षेत्र के बिंदु विशेष पर रखा जाता है तो उस पर परिमाण 3×10^{-9} N वाला स्थिर वैद्युत बल ऋणात्मक x-अक्ष की दिशा में लगता है। इस बिंदु पर विद्युत्-क्षेत्र क्या है? इस बिंदु पर रखे एक इलेक्ट्रॉन पर लग रहे स्थिर वैद्युत बल के परिमाण और दिशा क्या होंगे?



चित्र 5.15: अंत के प्रश्न 9 के लिए चित्र।

8. भुजा r वाले समबाहु त्रिभुज में तीन शीर्षों पर आवेश $+q$ वाले तीन कण रखे जाते हैं। त्रिभुज की किसी भुजा के मध्यबिंदु पर नेट विद्युत्-क्षेत्र की गणना करें।

9. $+q, -q$ और $-2q$ आवेशों वाले तीन कण चित्र 5.15 के अनुसार मूल बिंदु से बराबर दूरी a पर रखे जाते हैं। मूलबिंदु पर नेट विद्युत्-क्षेत्र की गणना करें।

10. चार आवेश $+2q, +2q, -2q$ और $-2q$ भुजाओं 3.0 m और 4.0 m वाले आयत के शीर्षों पर रखे जाते हैं। उनके विकर्णों के प्रतिच्छेद बिंदु पर इन आवेशों का नेट विद्युत्-क्षेत्र क्या है जबकि दिया है कि $q = 3.0\times10^{-9}$ C?

5.6 हल और उत्तर

पूर्व-परीक्षण

1. **प्रेक्षण 1 :** सही उत्तर (क) है क्योंकि रेशम से रगड़े जाने पर शीशे पर धनात्मक आवेश आ जाता है और चूंकि वस्तु शीशे से प्रतिकर्षित होती है, अतः, उस पर उसी प्रकार का आवेश है जैसाकि शीशे पर।

   प्रेक्षण 2 : सही उत्तर (क) है क्योंकि फर से रगड़ने पर एंबर पर ऋणात्मक आवेश आ जाता है और दोनों वस्तुएं उसकी ओर आकर्षित हो रही हैं। अतः, उन पर एंबर के विपरीत चिन्ह वाला आवेश होगा।

2. क) ग़लत। अभी तक मुक्त कणों के लिए ऐसा कोई मापन नहीं किया जा सका है। ख) सही। ग) सही। घ) ग़लत। यह उनके परिमाणों के गुणनफल पर निर्भर करता है। च) सही। छ) सही।

बोध प्रश्न

1. क) समीकरण (5.3ख) से विरामावस्था में स्थित आवेश q_1 पर आवेश q_2 द्वारा आरोपित स्थिर वैद्युत बल कूलॉम नियम से दिया जाता है :

$\vec{\mathbf{F}}_{21} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q_1 q_2}{|\vec{\mathbf{r}}_{21}|^2}\hat{\mathbf{r}}_{21}$ जहां $\hat{\mathbf{r}}_{21}$ दोनों आवेशों को जोड़ने वाली रेखा के अनुदिश है और उसकी दिशा q_2 से q_1 की ओर है और $|\vec{\mathbf{r}}_{21}| = r$ । साथ ही $\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 8.99\times10^9\,\text{Nm}^2\,\text{C}^{-2}$ । दोनों स्थितियों के लिए q_1, q_2 और r के मान रखने पर हमें मिलता है :

i) $$\vec{\mathbf{F}}_{21} = 8.99\times10^9\,\text{Nm}^2\,\text{C}^{-2}\times\frac{(8.0\,\mu\text{C})\,(8.0\,\mu\text{C})}{(0.04\,\text{m})^2}\,\hat{\mathbf{r}}_{21} = 360\,\text{N}\,\hat{\mathbf{r}}_{21}$$

ii) $$\vec{\mathbf{F}}_{21} = 8.99\times10^9\,\text{Nm}^2\,\text{C}^{-2}\times\frac{(15\,\text{mC})\,(-10\,\text{mC})}{(3.0\,\text{m})^2}\,\hat{\mathbf{r}}_{21}$$

$$= -1.5\times10^5\,\text{N}\,\hat{\mathbf{r}}_{21}$$

ख) समीकरण (5.3ख) से इलेक्ट्रॉन और प्रोटॉन के बीच स्थिर वैद्युत बल का परिमाण है $F_{elec} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{|q_1||q_2|}{r^2}$ चूंकि $|\vec{\mathbf{r}}_{21}| = r$

इलेक्ट्रॉन और प्रोटॉन के आवेशों के परिमाणों के मान रखने पर यानी $|q_1| = |q_2| = 1.6\times10^{-19}\,\text{C}$ और $r = 5.3\times10^{-11}\text{m}$ रखने पर हमें मिलता है :

$$F_{elec} = 8.99\times10^9\,\text{Nm}^2\,\text{C}^{-2}\times\frac{(1.6\times10^{-19}\,\text{C})\times(1.6\times10^{-19}\,\text{C})}{(5.3\times10^{-11}\text{m})^2}$$

$$= 8.2\times10^{-8}\,\text{N}$$

इलेक्ट्रॉन और प्रोटॉन के बीच का गुरुत्वाकर्षण बल है $F_{grav} = G\dfrac{m_1 m_2}{r^2}$

इलेक्ट्रॉन और प्रोटॉन के द्रव्यमानों के मान रखने पर यानी

$m_1 = 9.1\times10^{-31}\text{kg}$, $m_2 = 1.7\times10^{-27}\,\text{kg}$, $r = 5.3\times10^{-11}\text{m}$ और $G = 6.7\times10^{-11}\,\text{Nm}^2\,\text{kg}^{-2}$ रखने पर

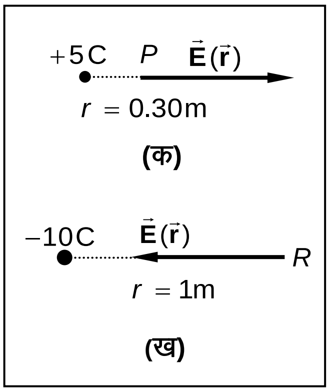
$$F_{grav} = 6.7\times10^{-11}\text{Nm}^2\,\text{kg}^{-2}\times\frac{(9.1\times10^{-31}\text{kg})\times(1.7\times10^{-27}\,\text{kg})}{(5.3\times10^{-11}\text{m})^2}$$

$$= 3.7\times10^{-47}\,\text{N}$$

अतः, $$\frac{F_{elec}}{F_{grav}} = \frac{8.2\times10^{-8}}{3.7\times10^{-47}} = 2.2\times10^{39}$$

अतः, स्थिर वैद्युत बल गुरुत्वाकर्षण बल से $\sim 10^{39}$ गुना प्रबल है।

2. क) चिन्ह समेत Q और r के मान समीकरण (5.6क) में रखने पर हमें मिलता है :



चित्र 5.16: बोध प्रश्न 2क (i) और (ii) के उत्तर के लिए चित्र। चित्र पैमाने के अनुसार नहीं है।

(i) $Q = +5\,\mu C$ और $r = 0.30\,m$ के लिए

$$\vec{E}(\vec{r}) = 8.99\times10^9\,Nm^2C^{-2}\times\frac{(+5\times10^{-6}\,C)}{(0.30\,m)^2}\hat{r} = 5\times10^5\,NC^{-1}\hat{r}$$

(ii) $Q = -10\,\mu C$ और $r = 1m$ के लिए

$$\vec{E}(\vec{r}) = 8.99\times10^9\,Nm^2C^{-2}\times\frac{(-10\times10^{-6}\,C)}{(1m)^2}\hat{r} = -9\times10^4\,NC^{-1}\hat{r}$$

ध्यान दें कि ऋणात्मक आवेश के विद्युत्-क्षेत्र की दिशा उसकी ओर है। बिंदुओं P और R पर विद्युत्-क्षेत्रों की दिशाएं चित्रों 5.16क और ख में दिखाई गई हैं। ध्यान दें कि विद्युत्-क्षेत्रों के पुच्छ क्रमशः P और R पर रखे गए हैं।

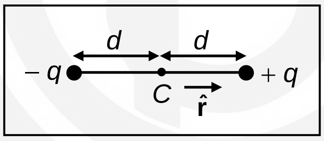
ख) समीकरण (5.7) से स्थिर वैद्युत बल $\vec{F}(\vec{r}) = q\vec{E}(\vec{r})$ है। $q = +6\,\mu C$ के लिए, इसके मान हैं :

(i) $5\times10^5\times6\times10^{-6}\,N\,\hat{r} = 3N\,\hat{r}$

(ii) $-9\times10^4\times6\times10^{-6}\,N\,\hat{r} = -0.5N\,\hat{r}$, एक सार्थक अंक तक।

3. चित्र 5.17 देखें। वैद्युत द्विध्रुव का मध्यबिंदु C प्रत्येक आवेश से दूरी d पर है। समीकरण (5.6ख) से मध्यबिंदु C पर इन दोनों आवेशों के कारण विद्युत्-क्षेत्रों के परिमाण हैं :

$$\left|\vec{E}_{-q}\right| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|(-q)|}{d^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{d^2} \quad \text{और} \quad \left|\vec{E}_{+q}\right| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{d^2}$$

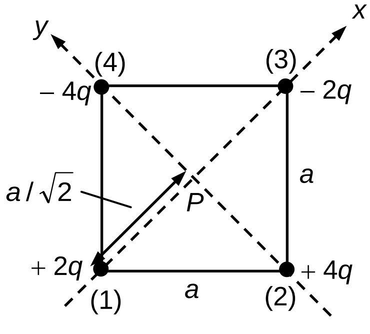


चित्र 5.17: बोध प्रश्न 3 के उत्तर के लिए चित्र।

मध्यबिंदु C पर दोनों आवेशों के कारण विद्युत्-क्षेत्रों की दिशाएं चित्र 5.17 में दिखाए गए एकक सदिश $\hat{r}$ की दिशा के विपरीत हैं। समीकरण (5.11) से मध्यबिंदु C पर दोनों आवेशों के कारण नेट विद्युत्-क्षेत्र है :

$$\vec{E} = \vec{E}_{+q} + \vec{E}_{-q} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2q}{d^2}\hat{r}$$

4. आइए, हम चित्र 5.18 के डैशदार तीरों के अनुदिश x और y-अक्ष चुनें। चित्र 5.18 से ध्यान दें कि बिंदु P की चारों आवेशों से दूरी $\frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a}{\sqrt{2}}$ है, जहां a वर्ग की भुजा है।



चित्र 5.18: बोध प्रश्न 4 के उत्तर के लिए चित्र।

बिंदु P पर नेट विद्युत्-क्षेत्र, चारों आवेशों के कारण बिंदु P पर विद्युत्-क्षेत्रों का सदिश योग है :

$$\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{E}}_1 + \vec{\mathbf{E}}_2 + \vec{\mathbf{E}}_3 + \vec{\mathbf{E}}_4 \qquad \text{(i)}$$

जहां $\vec{\mathbf{E}}_1$, आवेश $+2q$ के कारण विद्युत्-क्षेत्र है, $\vec{\mathbf{E}}_2$, आवेश $+4q$ के कारण विद्युत्-क्षेत्र है, $\vec{\mathbf{E}}_3$, आवेश $-2q$ के कारण विद्युत्-क्षेत्र और $\vec{\mathbf{E}}_4$, आवेश $-4q$ के कारण विद्युत्-क्षेत्र है। हम समीकरण (5.6क) से प्रत्येक विद्युत्-क्षेत्र ज्ञात करके इनका सदिश योग लेते हैं। ध्यान दें कि चित्र 5.18 में अक्षों के इस चुनाव के कारण, प्रत्येक आवेश के सापेक्ष बिंदु P के स्थिति सदिश $\hat{\mathbf{r}}$ को $\hat{\mathbf{i}}$ और $\hat{\mathbf{j}}$ के पदों में या उनके संयोजनों के पदों में लिखा जा सकता है। साथ ही, $r = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$ ।

अतः, चित्र 5.18 से बिंदु P पर आवेश 1 के कारण विद्युत्-क्षेत्र है :

$$\vec{\mathbf{E}}_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(+2q)}{(a/\sqrt{2})^2}\hat{\mathbf{i}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\times 2q}{a^2}\hat{\mathbf{i}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4q}{a^2}\hat{\mathbf{i}} \quad (\because \hat{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{i}}) \qquad \text{(ii)}$$

हम $E_0 = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{4q}{a^2}$ लिखते हैं जिससे विद्युत्-क्षेत्रों के व्यंजक लिखना आसान हो जाता है। बिंदु P पर आवेशों 2, 3, 4 के कारण विद्युत्-क्षेत्र हैं :

$$\vec{\mathbf{E}}_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\times 4q}{a^2}\hat{\mathbf{j}} = 2E_0\,\hat{\mathbf{j}}, \qquad (\because \hat{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{j}}) \qquad \text{(iii)}$$

$$\vec{\mathbf{E}}_3 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\times(-2q)}{a^2}(-\hat{\mathbf{i}}) = E_0\,\hat{\mathbf{i}} \qquad (\because \hat{\mathbf{r}} = -\hat{\mathbf{i}}) \qquad \text{(iv)}$$

और $$\vec{\mathbf{E}}_4 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\times(-4q)}{a^2}(-\hat{\mathbf{j}}) = 2E_0\,\hat{\mathbf{j}} \qquad (\because \hat{\mathbf{r}} = -\hat{\mathbf{j}}) \qquad \text{(v)}$$

समीकरण (ii) से (v) को समीकरण (i) में रखने पर हमें मिलता है :

$$\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{E}}_1 + \vec{\mathbf{E}}_2 + \vec{\mathbf{E}}_3 + \vec{\mathbf{E}}_4 = 2E_0\,\hat{\mathbf{i}} + 4E_0\,\hat{\mathbf{j}} = 2E_0(\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}}) \qquad \text{(vi)}$$

अब $q = 1.0\times 10^{-9}\,\text{C}$ और $a = 0.06\,\text{m}$ के लिए :

$$E_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4q}{a^2} = 8.99\times 10^9\,\text{Nm}^2\,\text{C}^{-2}\times\frac{4.0\times 1.0\times 10^{-9}\,\text{C}}{(0.06\,\text{m})^2} = 1.0\times 10^4\,\text{NC}^{-1}$$

$$\therefore \vec{\mathbf{E}} = 2.0\times 10^4\,\text{NC}^{-1}(\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}})$$

अंत में कुछ प्रश्न

1. स्थिर वैद्युत बल के परिमाण के लिए हम $k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ सहित समीकरण (5.2) का उपयोग करते हैं। दिया है कि $F_1 = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{|q_1||q_2|}{r^2} = 10\text{N}$, दूरी r पर रखे दो आवेशों द्वारा एक-दूसरे पर आरोपित स्थिर वैद्युत बल का परिमाण है। भिन्न दूरियों पर उनके बीच लग रहा स्थिर वैद्युत बल होगा, क्रमशः,

क) $F_2 = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{|q_1||q_2|}{(4r)^2} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{|q_1||q_2|}{16(r)^2} = \dfrac{F_1}{16} = \dfrac{5}{8}\text{N}$ चूंकि

$$F_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|q_1||q_2|}{r^2} = 10\,\text{N}$$

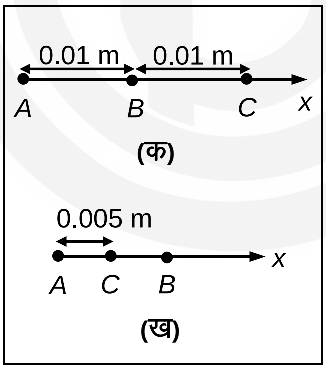
ख) $$F_3 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|q_1||q_2|}{(100r)^2} = \frac{F_1}{10000} = \frac{10}{10000}\text{N} = 10^{-3}\,\text{N}$$

ग) $$F_4 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|q_1||q_2|}{(r/4)^2} = 16F_1 = 160\,\text{N} \text{ और}$$

घ) $$F_5 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|q_1||q_2|}{(r/100)^2} = 10000F_1 = 10^5\,\text{N}$$

2. माना कि एक-जैसे कणों पर आवेश q है। स्थिर वैद्युत बल के परिमाण के लिए हम $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ सहित समीकरण (5.2) का उपयोग करते हैं। दिया है कि आवेशित कण एक-जैसे हैं और एक-दूसरे से 1 m की दूरी पर हैं। इन मानों को समीकरण (5.2) में रखने पर हमें मिलता है :

$$1\text{N} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{(1\text{m})^2} \quad \text{या} \quad q = \sqrt{\frac{1\text{N}\times(1\text{m})^2}{8.99\times10^9\,\text{Nm}^2\,\text{C}^{-2}}} = 0.33\,\text{mC}$$



चित्र 5.19: अंत के प्रश्न 3 के उत्तर के लिए चित्र।

3. क) चित्र 5.19क देखें। कण C पर लग रहा नेट स्थिर वैद्युत बल, कणों A और B द्वारा उस पर आरोपित स्थिर वैद्युत बलों का सदिश योग है जिसका मान समीकरण (5.4ख) द्वारा दिया जाता है। x-अक्ष के अनुदिश एकक सदिश $\hat{\mathbf{i}}$ के पदों में इसका मान है :

$$\vec{\mathbf{F}} = \vec{\mathbf{F}}_{AC} + \vec{\mathbf{F}}_{BC} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{(1.0\,\mu\text{C})^2}{(0.02\,\text{m})^2} + \frac{(1.0\,\mu\text{C})^2}{(0.01\text{m})^2}\right)\hat{\mathbf{i}}$$

$$= (8.99\times10^9\,\text{Nm}^2\,\text{C}^{-2}\times10^{-12}\,\text{C}^2\times\frac{5}{4}\times10^4\,\text{m}^{-2})\hat{\mathbf{i}} = 1.1\times10^2\,\text{N}\hat{\mathbf{i}}$$

ख) चित्र 5.19ख देखें। कण C पर लग रहा नेट स्थिर वैद्युत बल, कणों A और B द्वारा उस पर आरोपित स्थिर वैद्युत बलों का सदिश योग है। इस स्थिति में कण B के कारण विद्युत्-क्षेत्र, कण A के कारण विद्युत्-क्षेत्र के विपरीत होगा क्योंकि उसकी दिशा धनात्मक आवेश से परे है। x-अक्ष के अनुदिश एकक सदिश $\hat{\mathbf{i}}$ के पदों में इसका मान समीकरण (5.4ख) द्वारा दिया जाता है :

$$\vec{\mathbf{F}} = \vec{\mathbf{F}}_{AC} + \vec{\mathbf{F}}_{BC} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{(1\mu\,\text{C})^2}{(0.005\,\text{m})^2}\hat{\mathbf{i}} - \frac{(1\mu\,\text{C})^2}{(0.005\,\text{m})^2}\hat{\mathbf{i}}\right) = \vec{\mathbf{0}}$$

4. चित्र 5.20 देखें। मान लें कि आवेश x-अक्ष पर स्थित हैं। मान लें कि आवेश 3 $(=+q)$, आवेश 1 $(=+4q)$ से दूरी x पर स्थित है और $x < a$ है। इस बिंदु पर

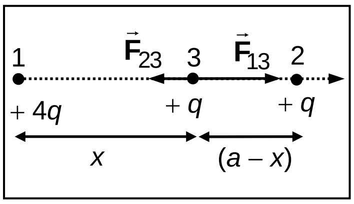
आवेश 2, आवेश 3 से दूरी $(a - x)$ पर स्थित है। अतः, आवेश 3 पर आवेशों 2 और 1 द्वारा आरोपित नेट स्थिर वैद्युत बल समीकरण (5.4ख) द्वारा दिया जाता है :

$$\vec{F}_3 = \vec{F}_{13} + \vec{F}_{23} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{4q \times q}{x^2}\,\hat{\mathbf{i}} + \frac{q \times q}{(a-x)^2}(-\hat{\mathbf{i}})\right)$$

जब आवेश 3 साम्यावस्था में होता है, तो उस पर आरोपित नेट बल शून्य होता है।

अतः, $$\vec{F}_3 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{4q \times q}{x^2}\,\hat{\mathbf{i}} + \frac{q \times q}{(a-x)^2}(-\hat{\mathbf{i}})\right) = \vec{0}$$

या $$\frac{4}{x^2} = \frac{1}{(a-x)^2} \Rightarrow 4(a-x)^2 = x^2 \Rightarrow 2(a-x) = \pm x$$



चित्र 5.20: अंत के प्रश्न 4 के उत्तर के लिए चित्र।

x के धनात्मक चिन्ह के लिए $x = \dfrac{2a}{3}$ और x के ऋणात्मक चिन्ह के लिए $x = 2a$ । क्योंकि $x < a$, अतः, $x = \dfrac{2a}{3}$ ही x का एकमात्र संभव मान है। अतः, आवेश 3 $(+q)$ के साम्यावस्था में होने के लिए उसे आवेश $+4q$ से $\dfrac{2a}{3}$ की दूरी पर रखा जाना चाहिए।

5. समीकरण (5.6क) से आवेश $Q = -9\times10^{-9}\,\text{C}$ वाले कण का उससे 1 m की दूरी पर स्थित बिंदु पर विद्युत्-क्षेत्र है :

$$\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\hat{\mathbf{r}} = 8.99\times10^9\,\text{Nm}^2\,\text{C}^{-2}\,\frac{(-9\times10^{-9}\,\text{C})}{(1\text{m})^2}\,\hat{\mathbf{r}} = -81\text{NC}^{-1}\hat{\mathbf{r}}$$

उसकी दिशा ऋणात्मक आवेश की ओर होगी। उस बिंदु पर रखे गए प्रोटॉन पर आरोपित स्थिर वैद्युत बल आकर्षण बल है जिसकी दिशा आवेश Q की ओर है और उसका मान है :

$$\vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{r}}) = e\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}) = (1.6\times10^{-19})\text{C}\times(-81\text{NC}^{-1})\hat{\mathbf{r}} = -1.3\times10^{-17}\,\text{N}\,\hat{\mathbf{r}}$$

दो सार्थक अंकों तक।

6. समीकरण (5.6क) में $E = 36\,\text{NC}^{-1}$ और $r = 0.5\,\text{m}$ रखने पर हमें मिलता है :

$$E(\vec{\mathbf{r}}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|Q|}{r^2} = 8.99\times10^9\,\text{Nm}^2\,\text{C}^{-2}\,\frac{|Q|}{(0.5\,\text{m})^2} = 36\,\text{NC}^{-1}$$

$$\therefore \quad |Q| = 1\times10^{-9}\,\text{C} = 1\text{nC}$$

7. समीकरण (5.7) से $\vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{r}}) = Q\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}})$ (i)

जहां $Q = -9\times10^{-9}\,\text{C}$ और $\vec{\mathbf{F}} = -3\times10^{-9}\,\text{N}\,\hat{\mathbf{i}}$ । समीकरण (i) में इन मानों को रखने पर हमें मिलता है :

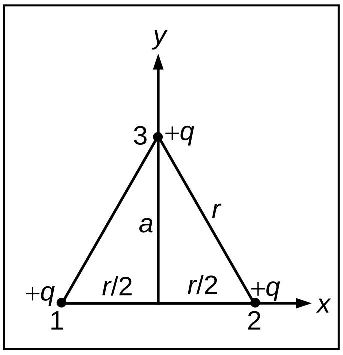
$$\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}) = \frac{\vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{r}})}{Q} = \frac{-3\times10^{-9}\,\text{N}}{-9\times10^{-9}\,\text{C}}\,\hat{\mathbf{i}} = 0.3\,\text{NC}^{-1}\hat{\mathbf{i}}$$

$\vec{\mathbf{E}}$ की दिशा धनात्मक x-अक्ष की ओर होगी। इस बिंदु पर रखे गए इलेक्ट्रॉन पर आरोपित स्थिर वैद्युत बल का मान है :

$$\vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{r}}) = e\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}) = (-1.6\times10^{-19}\,\mathrm{C})\times(0.3\,\mathrm{NC}^{-1})\hat{\mathbf{i}}$$

$$= -0.48\times10^{-19}\,\hat{\mathbf{i}}\,\mathrm{N} = -5\times10^{-20}\,\hat{\mathbf{i}}\,\mathrm{N}$$

8. चित्र 5.21 देखें। हम x और y-अक्षों को चित्र के अनुसार चुनते हैं। तब परिमाण $+q$ वाले आवेशों 1 और 2 के कारण x-अक्ष के अनुदिश विद्युत्-क्षेत्र परिमाण में समान लेकिन दिशा में विपरीत होंगे :



चित्र 5.21: अंत के प्रश्न 8 के उत्तर के लिए चित्र।

$$\vec{\mathbf{E}}_1(\vec{\mathbf{r}}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{(r/2)^2}\hat{\mathbf{i}} \quad \text{और} \quad \vec{\mathbf{E}}_2(\vec{\mathbf{r}}) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{(r/2)^2}\hat{\mathbf{i}}$$

नेट विद्युत्-क्षेत्र का परिमाण आवेश 3 के कारण y-अक्ष पर विद्युत्-क्षेत्र के परिमाण के बराबर है। x-अक्ष के अनुदिश त्रिभुज की भुजा के मध्यबिंदु से आवेश 3 की दूरी है :

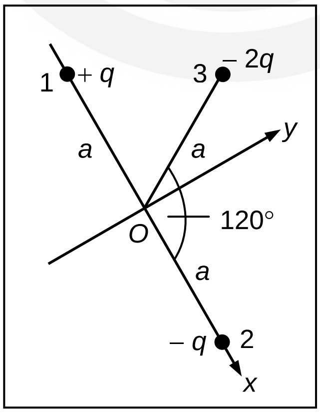
$$a = \sqrt{r^2 - \left(\frac{r}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}r$$

अतः, समबाहु त्रिभुज की आधार भुजा के मध्यबिंदु पर नेट विद्युत्-क्षेत्र का परिमाण है :

$$E_3(\vec{\mathbf{r}}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{a^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4q}{3r^2} = \frac{q}{3\pi\varepsilon_0 r^2}$$

यह परिणाम त्रिभुज की हर भुजा पर लागू होता है।

9. चित्र 5.22 देखें। आइए, अक्षों को ऐसे चुनें कि सवाल सरल हो जाए। हम x-अक्ष को आवेशों 1 और 2 को मिलाने वाली रेखा के अनुदिश चुनते हैं (चित्र 5.22)। मूलबिंदु पर नेट विद्युत्-क्षेत्र, आवेशों 1, 2 और 3 के कारण विद्युत्-क्षेत्रों के सदिश योग के बराबर है :



चित्र 5.22: अंत के प्रश्न 9 के उत्तर के लिए चित्र।

$$\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}) = \vec{\mathbf{E}}_1(\vec{\mathbf{r}}) + \vec{\mathbf{E}}_2(\vec{\mathbf{r}}) + \vec{\mathbf{E}}_3(\vec{\mathbf{r}}) \qquad \text{(i)}$$

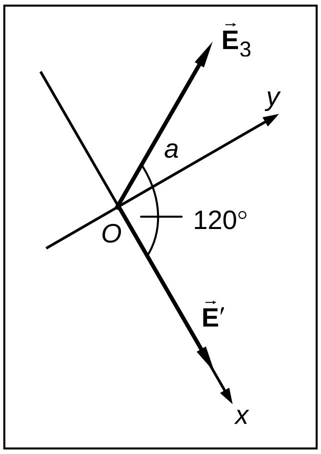
आइए, अब हम मूल बिंदु पर आवेशों 1, 2 और 3 के कारण विद्युत्-क्षेत्रों के मान ज्ञात करें। आप देख सकते हैं कि आवेश $+q$ और आवेश $-q$ मूल बिंदु से बराबर दूरी a पर हैं। अतः, x-अक्ष के इस चुनाव के लिए

$$\vec{\mathbf{E}}_1(\vec{\mathbf{r}}) + \vec{\mathbf{E}}_2(\vec{\mathbf{r}}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2q}{a^2}\hat{\mathbf{i}} \qquad \text{(ii)}$$

आवेश 3 $(-2q)$ के कारण विद्युत्-क्षेत्र का परिमाण है :

$$E_3(\vec{\mathbf{r}}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2q}{a^2}$$

चूंकि आवेश 3 ऋणात्मक आवेश है, अतः, इसके कारण विद्युत्-क्षेत्र की दिशा आवेश 3 की ओर है। आवेशों 1 और 2 के कारण नेट विद्युत्-क्षेत्र $\vec{\mathbf{E}}'$ और आवेश 3 के कारण विद्युत्-क्षेत्र $\vec{\mathbf{E}}_3$ चित्र 5.23 में दिखाए गए हैं।



चित्र 5.23: अंत के प्रश्न 9 के उत्तर के लिए चित्र।

ध्यान दें कि सदिशों के पुच्छ उस बिंदु पर रखे गए हैं जिस पर नेट विद्युत्-क्षेत्र ज्ञात करना है।

मूलबिंदु पर नेट विद्युत्-क्षेत्र ज्ञात करने के लिए, हम विद्युत्-क्षेत्र $\vec{\mathbf{E}}_3(\vec{\mathbf{r}})$ को x और y-अक्षों के अनुदिश वियोजित करते हैं :

$$E_{3x} = E_3 \cos 120^\circ = -\frac{E_3}{2} \quad \text{और} \quad E_{3y} = E_3 \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} E_3 \qquad \text{(iii)}$$

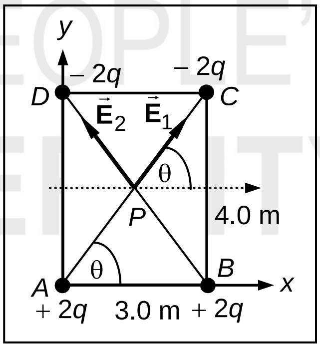
अतः, समीकरणों (ii) और (iii) के परिणामों को समीकरण (i) के परिणाम के साथ लेने पर, O पर नेट विद्युत्-क्षेत्र होता है :

$$\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2q}{a^2}\hat{\mathbf{i}} - \frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2q}{a^2}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2q}{a^2}\hat{\mathbf{j}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{a^2}\left(\hat{\mathbf{i}} + \sqrt{3}\,\hat{\mathbf{j}}\right)$$

नेट विद्युत्-क्षेत्र का परिमाण है :

$$E(\vec{\mathbf{r}}) = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{a^2}\sqrt{1+3} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{q}{a^2}$$

10. चित्र 5.24 देखें जिसमें भुजाओं $AB = 3.0\,\text{m}$ और $BC = 4.0\,\text{m}$ वाले आयत के शीर्षों पर रखे चारों आवेश A, B, C, D यानी $+2q, +2q, -2q$ और $-2q$ दिखाए गए हैं। आयत के विकर्णों के प्रतिच्छेद बिंदु पर आवेशों के कारण नेट विद्युत्-क्षेत्र उस बिंदु पर व्यष्टिगत आवेशों के कारण विद्युत्-क्षेत्रों के सदिश योग के बराबर होता है। आइए, अक्षों को चित्र 5.24 के अनुसार चुनें।



चित्र 5.24: अंत के प्रश्न 10 के उत्तर के लिए चित्र।

आयत के विकर्णों की लंबाई है $\sqrt{(3.0)^2 + (4.0)^2}\,\text{m} = 5.0\,\text{m}$।

चित्र 5.24 से ध्यान दें कि शीर्षों A और C पर रखे आवेशों के कारण विद्युत्-क्षेत्रों की दिशाएं समान हैं क्योंकि ये आवेश विजातीय हैं। यही बात शीर्षों B और D पर रखे आवेशों के लिए भी सत्य है।

चूंकि आवेशों के परिमाण समान हैं और बिंदु P से उनकी दूरियां समान हैं, अतः, चारों आवेशों के कारण विद्युत्-क्षेत्रों के परिमाण समान होंगे। प्रत्येक आवेश के कारण विद्युत्-क्षेत्र का परिमाण है :

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|2q|}{r^2} = 8.99\times10^9\,\text{Nm}^2\text{C}^{-2}\,\frac{6.0\times10^{-9}\,\text{C}}{(2.5\,\text{m})^2} = 8.6\,\text{NC}^{-1}$$

नेट विद्युत्-क्षेत्र, विद्युत्-क्षेत्रों $\vec{\mathbf{E}}_1$ और $\vec{\mathbf{E}}_2$ का परिणामी है और इसे हमने चित्र 5.24 में दिखाया है जिसमें इनके पुच्छ बिंदु P पर रखे गए हैं। ध्यान दें कि इनके परिमाण हैं :

$$E_1 = E_2 = 2E$$

चित्र 5.24 से यह भी ध्यान दें कि इन विद्युत्-क्षेत्रों के x-घटक परिमाण में समान लेकिन दिशा में विपरीत हैं और वे निरस्त हो जाते हैं। इन विद्युत्-क्षेत्रों के y-घटक परिमाण में समान हैं और दिशा में भी समान हैं और इनके मान हैं :

$$E_{1y} = E_{2y} = E_1 \sin\theta = 2E\frac{BC}{AC} = 2\times 8.6\,\text{NC}^{-1}\frac{4}{5} = 13.8\,\text{NC}^{-1}$$

अतः, नेट विद्युत्-क्षेत्र का परिमाण है :

$$E = E_{1y} + E_{2y} = 13.8\,\text{NC}^{-1} + 13.8\,\text{NC}^{-1} = 28\,\text{NC}^{-1}$$

दो सार्थक अंकों तक। इसकी दिशा y-अक्ष के अनुदिश है।