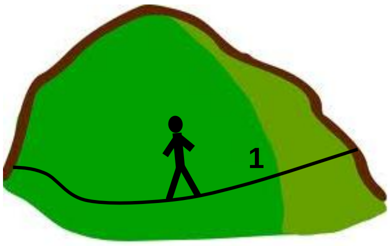


किसी पहाड़ी पर हम अधिकतम प्रवणता वाली चढ़ाई का पथ कैसे ज्ञात करेंगे?

इकाई 1

अदिश क्षेत्र और उनके ग्रेडिएन्ट

इकाई की रूपरेखा

अध्ययन निर्देशिका

इस इकाई में आप अदिश क्षेत्रों और उनके ग्रेडिएन्ट के विषय में पढ़ेंगे। इस इकाई को पढ़ने से पहले आपको भौतिकी के यांत्रिकी नामक पाठ्यक्रम (BPHCT-131) की इकाइयों 1 और 2 को दोहरा लेना चाहिए। अवकलन की मूलभूत अवधारणाएं जिन्हें आपने स्कूल में पढ़ा है, वे भी आपको दोहरा लेनी चाहिए। ये अवधारणाएं गणित के पाठ्यक्रम BMTC-131 में भी समझाई गई हैं। ग्रेडिएन्ट की गणना करने के लिए आपको फलनों के आंशिक अवकलजों की गणना करना भी आना चाहिए। आप इस इकाई के परिशिष्ट से इसे दोहरा सकते हैं। आंशिक अवकलजों को गणित के पाठ्यक्रम BMTC-132 में भी समझाया गया है जिसे आप दोहरा सकते हैं। इस खंड के परिशिष्ट 1 में सदिश बीजगणित और सदिश फलनों के अवकलजों की बुनियादी धारणाओं को संक्षेप में प्रस्तुत किया गया है। इस इकाई को पढ़ने से पहले आप उस परिशिष्ट को पढ़ लें।

"और, मेरा यकीन कीजिए कि अगर मैं अपनी पढ़ाई फिर से शुरू कर रहा होता तो अफलातून की सलाह मानता ओर गणित से शुरुआत करता।"

गैलीलियो गैलिली

1.1 परिचय

भौतिकी के यांत्रिकी नामक प्रथम पाठ्यक्रम (BPHCT-131) के खंड 1 की पहली दो इकाइयों में आप सदिश बीजगणित की मूल अवधारणाओं के बारे में पढ़ चुके हैं। आप सदिशों के ज्यामितीय एवं बीजगणितीय निरूपण में उनको जोड़ना, घटाना और गुणा करना जानते हैं। आपने भौतिकी में सदिशों, उनके योग और अंतर तथा अदिश और सदिश गुणनफलों के उदाहरण भी देखे हैं। पाठ्यक्रम BPHCT-131 की इकाई 2 में आपने सदिश अवकलन की प्रारंभिक अवधारणाएं पढ़ी हैं। आप अब सदिश फलनों या सदिश मान वाले फलनों के बारे में जानते हैं और किसी अदिश के सापेक्ष सदिश फलनों के अवकलज ज्ञात कर सकते हैं। आपने सदिशों के गुणनफलों को अवकलित करना भी सीखा है। इस इकाई में हम सदिश अवकलन की पढ़ाई को आगे बढाएंगे। भाग 1.2 में आप **अदिश क्षेत्रों** की संकल्पना के बारे में पढेंगे। भाग 1.3 में आप अदिश क्षेत्र का **ग्रेडिएन्ट** और **दिक्-अवकलज** ज्ञात करना सीखेंगे।

आप शायद जानना चाहें : **हमें इन अवधारणाओं को सीखने की क्या आवश्यकता है**? इसे समझने के लिए एक असमान तापित (non-uniformly heated) शलाका, प्लेट या बेलन का उदाहरण लें। इनमें भिन्न-भिन्न बिन्दुओं पर तापमान भिन्न होते हैं। शलाका/प्लेट/बेलन के तापमान बंटन को गणितीय रूप में एक **अदिश क्षेत्र** से निरूपित किया जाता है। अब यदि हम निकाय में तापमान की **किसी विशेष दिशा** में **परिवर्तन दर** के बारे में जानना चाहते हैं तो हमें इस ताप वितरण के **दिक्-अवकलज** ज्ञात करने होते हैं। इसके लिए हमें **अदिश क्षेत्र का ग्रेडिएन्ट** ज्ञात होना चाहिए। भाग 1.3.1 में आप अदिश क्षेत्र का ग्रेडिएन्ट परिकलित करना सीखेंगे। फिर भाग 1.3.2 में आप अदिश क्षेत्र का दिक्-अवकलज ज्ञात करना सीखेंगे।

उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप :

- ❖ अदिश क्षेत्र की अवधारणा समझा सकेंगे और भौतिकी में इसके उदाहरण दे सकेंगे;
- ❖ अदिश क्षेत्र का ग्रेडिएन्ट ज्ञात कर सकेंगे; और
- ❖ अदिश क्षेत्र का दिक्-अवकलज ज्ञात कर सकेंगे।

अपने लिखित कार्य में सदैव ही जिस अक्षर से आप सदिश को प्रकट करें उस अक्षर के ऊपर एक तीर का निशान जरूर लगाएं, उदाहरण के लिए $\vec{r}$ । एकक सदिश को व्यक्त करने के लिए हम अक्षर के ऊपर एक कैप का निशान लगाते हैं, उदाहरण के लिए, $\hat{r}$ ।

1.2 अदिश क्षेत्र

यांत्रिकी नामक पाठ्यक्रम BPHCT-131 के खंड 1 में आपने ऐसे सदिश फलनों के विषय में पढ़ा है जो एक या एक से अधिक चरों पर निर्भर कर सकते हैं। जब हम भौतिक राशियों का वर्णन करते हैं तो समय ऐसा एक चर है जिसके साथ अनेक

भौतिक राशियां परिवर्तित होती हैं। किन्तु आपने ऐसी अनेक भौतिक राशियों के बारे में भी पढ़ा है जिनके समष्टि में अलग-अलग बिन्दुओं पर अलग-अलग मान होते हैं। **समष्टि में अलग-अलग बिन्दुओं पर भौतिक राशि का वर्णन करने वाले फलन को क्षेत्र कहते हैं।** चूंकि भौतिक राशियां अदिश या सदिश हो सकती हैं, हम **अदिश** और **सदिश क्षेत्रों** की बात करते हैं। इस भाग में हम **अदिश क्षेत्रों** की ही चर्चा करेंगे।

उदाहरण के लिए, (भूमंडल में) वायु का घनत्व एक अदिश राशि है जो समुद्र तल से ऊपर ऊंचाई के साथ परिवर्तित होती है। इसी प्रकार, वायुमंडलीय दाब भी अदिश राशि है जिसका मान भिन्न-भिन्न ऊंचाइयों पर अलग होता है। इसका मान पृथ्वी के चारों ओर अलग-अलग बिन्दुओं पर भी अलग होता है। परन्तु असमान तापित प्लेट का तापमान स्थानिक निर्देशांकों तथा समय दोनों का फलन होता है। ये सभी **अदिश क्षेत्रों** के उदाहरण हैं। आइए, अब हम अदिश क्षेत्र के विषय में विस्तार से चर्चा करें।

1.2.1 अदिश क्षेत्र की परिभाषा

अदिश क्षेत्र एक ऐसा फलन है जो किसी दिए गए क्षेत्र में प्रत्येक बिन्दु को अद्वितीय अदिश (unique scalar) मान प्रदान करता है। अतः, आप कह सकते हैं कि वास्तव में यह स्थानिक निर्देशांकों का अदिश फलन है। जैसाकि आप स्कूल के गणित में पढ़ चुके हैं, समष्टि में प्रत्येक बिन्दु को उसके कार्तीय निर्देशांकों (x, y, z) द्वारा निरूपित किया जा सकता है। अतः, हम एक अदिश फलन या अदिश क्षेत्र के लिए $f = f(x, y, z)$ लिख सकते हैं। इसका अर्थ यह है कि समष्टि में प्रत्येक बिन्दु (x, y, z) के लिए एक अद्वितीय अदिश राशि $f(x, y, z)$ का अस्तित्व होता है (हाशिए पर दी गई टिप्पणी पढ़ें)।

BPHCT-131 की इकाई 2 में आप पढ़ चुके हैं कि समष्टि में प्रत्येक बिन्दु को स्थिति सदिश $\vec{\mathbf{r}} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}$ द्वारा निरूपित किया जा सकता है। अतः, हम यह भी कह सकते हैं कि स्थिति सदिश $\vec{\mathbf{r}}$ द्वारा निरूपित प्रत्येक बिन्दु के संगत एक अद्वितीय अदिश फलन $f(\vec{\mathbf{r}})$ का अस्तित्व होता है।

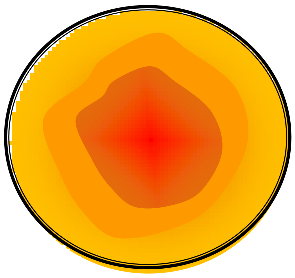
पृथ्वी की सतह के पास एक पिंड की गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा अदिश क्षेत्र का सरल उदाहरण है। मान लें कि हम xy समतल पृथ्वी की सतह पर लेते हैं तथा z-अक्ष ऊपर की ओर इंगित करता है। तब इस पिंड की गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा होती है :

$$\phi(x, y, z) = mgz \qquad (1.1\text{क})$$

जहां m पिंड का द्रव्यमान है। यहां अदिश क्षेत्र केवल z निर्देशांक पर निर्भर करता है। अतः, यह एकविमीय अदिश क्षेत्र है।

तापमान, दाब और घनत्व कुछ अन्य अदिश भौतिक राशियों के उदाहरण हैं जो अदिश क्षेत्र द्वारा निरूपित किए जा सकते हैं। उदाहरण के लिए, पूर्णतया सपाट गर्म प्लेट पर तापमान निम्नलिखित व्यंजक द्वारा व्यक्त किया जा सकता है :

$$T(x, y) = \frac{250}{x^2 + y^2 + 1} \qquad (1.1\text{ख})$$



चित्र 1.1: केन्द्र पर गर्म की गई सपाट प्लेट में तापमान वितरण द्विविम अदिश क्षेत्र का उदाहरण है।

$T(x, y)$ गर्म प्लेट के पृष्ठ पर किसी भी बिन्दु के कार्तीय निर्देशांक (x, y) पर तापमान है (चित्र 1.1)। चूंकि प्लेट की सतह द्विविम है, इसलिए T का मान केवल x और y पर निर्भर करता है। यह द्विविम अदिश क्षेत्र का उदाहरण है। अदिश क्षेत्र का दूसरा चिर परिचित उदाहरण है, निर्वात में एक बिन्दु आवेश q से दूरी r पर स्थिर विद्युत् विभव का। इसका मान निम्नलिखित है :

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}\,\text{volt} \qquad (1.1\text{ग})$$

यहां q को कूलॉम तथा r को मीटर में मापा जाता है और ε_0 निर्वात का परावैद्युतांक (permittivity) है। यदि हम आवेश पर कार्तीय निर्देशांक तंत्र का मूल बिन्दु मान लें, तो हम दूरी r पर विद्युत् विभव के व्यंजक को इस तरह भी लिख सकते हैं :

$$V(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}\right] \qquad (1.1घ)$$

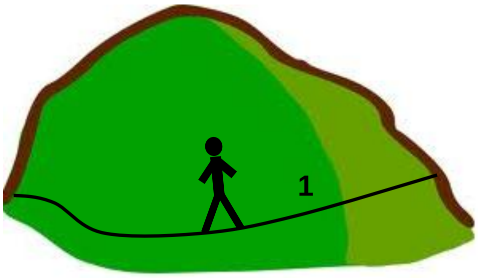
यह फलन त्रिविम अदिश क्षेत्र का वर्णन करता है। इस इकाई में हम ऐसे क्षेत्रों की समष्टि में परिवर्तन दर जानना चाहेंगे।

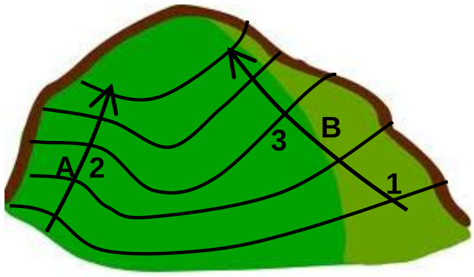
अदिश क्षेत्रों की परिवर्तन दर का भौतिक अर्थ समझने के लिए, इन्हें चित्रित करना एक अच्छा तरीका है। अतः, हमारा अगला प्रश्न है : **अदिश क्षेत्रों को चित्र द्वारा कैसे निरूपित किया जाता है**? अदिश क्षेत्रों को चित्रित करने के लिए **कंटूर वक्रों** या **कंटूर पृष्ठों** का उपयोग किया जा सकता है। आइए, देखें कि यह किस प्रकार होता है।

1.2.2 अदिश क्षेत्र का निरूपण

क्या आप कंटूर रेखाओं के बारे में जानते हैं? क्या आपको भूगोलशास्त्र में वे मानचित्र याद हैं जो आपने स्कूल में पढ़े थे? हम एक मानचित्र पर स्थानों की ऊंचाइयां कैसे निर्दिष्ट करते हैं? आप भूगोलशास्त्र की अपनी स्कूली कक्षाओं से याद करें कि इन्हें दिखाने के लिए हम **कंटूर रेखाओं** और **कंटूर वक्रों** का प्रयोग करते हैं। एक मानचित्र पर **कंटूर रेखाएं या कंटूर वक्र उन बिन्दुओं को मिलाते हैं जो एक निर्धारित तल के ऊपर उससे समान ऊंचाई पर होते हैं**। इस तल को प्रायः समुद्र तल लिया जाता है। ध्यान रहे कि **कंटूर रेखाएं कभी एक दूसरे को नहीं काटतीं**। यदि आप एक कंटूर रेखा के अनुदिश चलें तो आप एक ही ऊंचाई पर रहते हैं। कंटूर रेखाओं की उपयोगिता इसलिए भी है कि ये हमें ज़मीन की सतह के **आकार** के बारे में बताती हैं।

कल्पना करें कि आप किसी पहाड़ी पर एक खास ऊंचाई पर किसी जगह खड़े हैं (चित्र 1. 2क)। चित्र 1. 2ख का अध्ययन करें। इसमें कंटूर वक्र 1 उस ऊंचाई पर पहाड़ी के सभी बिन्दुओं को मिलाता है। वास्तव में, **प्रत्येक कंटूर वक्र पहाड़ी पर समान ऊंचाई के सभी बिन्दुओं को जोड़ता है।** मान लें कि हम बिन्दु (x, y) की ऊंचाई को $z(x, y)$ लिखते हैं। तब हम कह सकते हैं कि चित्र 1.2ख में कंटूर वक्र, उन सभी बिन्दुओं को जोड़ते हैं जिनके लिए $z(x, y) =$ अचर होता है। इस प्रकार, कंटूर वक्र, अदिश फलन $z(x, y)$ का चित्र में निरूपण करते हैं।

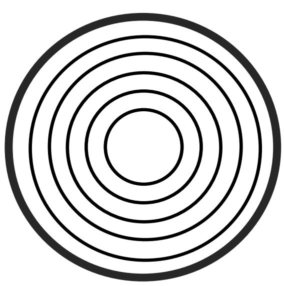




चित्र 1.2: क) कल्पना करें कि आप एक पहाड़ी पर कहीं खड़े हैं; ख) पहाड़ी का कंटूर मानचित्र। अनेक कंटूर रेखाओं के आरेख को कंटूर मानचित्र कहते हैं।

हम समीकरण (1.1क) द्वारा अदिश क्षेत्र के रूप में गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा का पहले ही वर्णन कर चुके हैं। आप जानते हैं कि चित्र 1.2ख के किसी भी कंटूर वक्र द्वारा

ज़मीन से समान ऊंचाई के सभी बिन्दु निर्दिष्ट होते हैं। अतः, समीकरण (1.1क) के अनुसार इस वक्र के अनुदिश किसी निकाय की गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा अचर रहेगी। अतः, चित्र 1.2ख में दिखाए गए कंटूर वक्रों के समुच्चय का उपयोग समीकरण (1.1क) द्वारा व्यक्त गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा क्षेत्र को निरूपित करने के लिए किया जा सकता है। व्यापक तौर पर हम कह सकते हैं कि



चित्र 1.3: गर्म प्लेट के तापमान का कंटूर मानचित्र। प्रत्येक कंटूर रेखा समीकरण (1.1ख) द्वारा परिभाषित तापमान के एक मान के संगत है।

कंटूर वक्र एक ऐसा द्विविम वक्र है जिस पर अदिश क्षेत्र $f(x, y)$ का मान अचर रहता है :

$$f(x, y) = C \qquad (1.2क)$$

अनेक कंटूर वक्रों के आरेख को **कंटूर आरेख** या **कंटूर मानचित्र** कहते हैं। एक गर्म प्लेट का कंटूर मानचित्र चित्र 1. 3 में दिखाया गया है।

अब हम पूछते हैं : अदिश क्षेत्र के कंटूर मानचित्र से हम और क्या पता कर सकते हैं? चित्र 1. 2ख का पुनः अध्ययन करें। इसमें A और B बिन्दुओं के इर्द गिर्द के क्षेत्रों को देखें। ध्यान दें कि बिन्दु A के इर्द गिर्द कंटूर वक्र एक-दूसरे के बहुत समीप हैं जबकि बिन्दु B के इर्द गिर्द कंटूर वक्र एक-दूसरे से दूर हैं। इससे हमें क्या ज्ञात होता है?

कल्पना करें कि आप एक खड़ी चढ़ाई के अनुदिश एक पहाड़ी पर चढ़ रहे हैं चित्र (1.2ख में पथ 2)। चूंकि समुद्र तल से इस पथ पर ऊंचाई तेजी से बदलती है, कंटूर वक्र (जो ज़मीन से समान ऊंचाई के वक्र हैं) एक-दूसरे के समीप हैं। दूसरी ओर, यदि आप पथ 3 के अनुदिश गमन करें वहां कंटूर वक्र कैसे दिखेंगे? वक्र एक-दूसरे से काफ़ी दूरी पर हैं। समुद्र तल से इस पथ की ऊंचाई, पथ 2 की तुलना में धीरे बदलती है। इसका अर्थ है कि कंटूर मानचित्र में कंटूर वक्रों के बीच की दूरी, फलन की परिवर्तन दर की द्योतक है। यदि कंटूर वक्रों के बीच का अंतराल कम हो, तो अदिश क्षेत्र में अधिक परिवर्तन होता है। यदि इनके बीच अंतराल अधिक है तो अदिश क्षेत्र में कम परिवर्तन होता है।

अभी तक हम द्विविम समष्टि में अदिश फलनों की बात कर रहे थे।

अब आप पूछ सकते हैं : **अदिश क्षेत्रों को त्रिविम समष्टि में कैसे निरूपित किया जाता है**? इसका एक तरीका **कंटूर पृष्ठ** परिभाषित करना है। परिभाषा से,

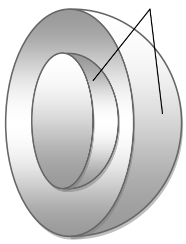
कंटूर पृष्ठ ऐसे पृष्ठ होते हैं जिन पर त्रिविम अदिश क्षेत्र का मान अचर रहता है।

अतः, यदि $\phi(x, y, z)$ एक अदिश क्षेत्र को परिभाषित करता है तो कंटूर पृष्ठ ऐसे सभी (x, y, z) बिन्दुओं का समूह होगा जिन पर ϕ का मान अचर है, माना कि C। अतः, कंटूर पृष्ठ को हम निम्नलिखित समीकरण द्वारा परिभाषित कर सकते हैं :

$$\phi(x, y, z) = C \qquad (1.2ख)$$

हमें C के अलग-अलग मानों के लिए अलग-अलग कंटूर पृष्ठ प्राप्त होते हैं। ऐसे सभी कंटूर पृष्ठों का समूह अदिश क्षेत्र $\phi(x, y, z)$ को निरूपित करेगा।

उदाहरण के लिए, समीकरण (1.1घ) द्वारा परिभाषित अदिश क्षेत्र के लिए, कंटूर पृष्ठ अचर विद्युत् विभव $V(x, y, z) = V_0$ के पृष्ठ हैं तथा इस समीकरण द्वारा वर्णित होते हैं :



चित्र 1.4: अचर विद्युत् विभवों के कंटूर पृष्ठ संकेन्द्री गोलों के पृष्ठ होते हैं। गोलों की त्रिज्या समीकरण (1.3ख) द्वारा परिभाषित होती है।

ऐसा कंटूर वक्र या पृष्ठ जिस पर विभव समान रहता है, **समविभव (equipotential)** कहलाता है। समीकरण (1.3क) द्वारा परिभाषित कंटूर पृष्ठों को **समविभव पृष्ठ** कहते हैं। इसी प्रकार तापमान क्षेत्र के कंटूर वक्रों या पृष्ठों को **समतापी** कहते हैं।

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{x^2+y^2+z^2}\right)^{1/2} = V_0 \qquad \Rightarrow \qquad x^2+y^2+z^2 = R^2 \quad (1.3\text{क})$$

जहां R अचर है। आप देख सकते हैं कि समीकरण (1.3क) द्वारा परिभाषित कंटूर पृष्ठ एक ऐसा गोला है जिसकी त्रिज्या का समीकरण है :

$$R = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\, V_0} \qquad (1.3\text{ख})$$

V_0 के भिन्न मानों के लिए, R भिन्न होगा। V_0 के भिन्न मानों के लिए कंटूर पृष्ठ संकेन्द्री गोलों के पृष्ठ हैं जैसाकि चित्र 1. 4 में दिखाया गया है।

अदिश क्षेत्र को परिभाषित करने तथा इसे चित्रित कर चुकने के बाद अब हम जानना चाहेंगे : **किसी दी गई दिशा में अदिश क्षेत्र की परिवर्तन दर क्या होती है?**

उदाहरण के लिए, यदि आप कहीं पहाड़ी पर खड़े हैं तो आप जानना चाहेंगे कि नीचे जाने का सबसे तेज़ रास्ता (खड़ी प्रवणता) क्या है ताकि आप इससे बच सकें! हमारा विश्वास है कि नीचे जाने के लिए आप न्यूनतम प्रवणता वाला रास्ता चुनेंगे ताकि आप गिरें नहीं! स्कूल के कलन से आपको याद होगा कि प्रवणता हमें परिवर्तन दर भी बताती है। इस तथ्य का उपयोग हम ग्रेडिएन्ट संकारक तथा दिक्-अवकलज परिभाषित करने के लिए करते हैं। अगले भाग में आप पढ़ेंगे कि अदिश क्षेत्र का **ग्रेडिएन्ट, फलन की अधिकतम परिवर्तन दर बताता है**। इसलिए, आइए, अब हम अदिश क्षेत्र का ग्रेडिएन्ट परिभाषित करें। फिर हम इसका उपयोग दिक्-अवकलज प्राप्त करने के लिए करेंगे।

1.3 अदिश क्षेत्र का ग्रेडिएन्ट तथा दिक्-अवकलज

आप अपने स्कूल के कलन के पाठ्यक्रम में एक फलन की प्रवणता के बारे में पढ़ चुके हैं। मान लें कि आप एक पतली छड़ को इसके एक सिरे पर गर्म करते हैं। तब इसकी लम्बाई के अनुदिश भिन्न बिन्दुओं पर तापमान T भिन्न होगा। मान लें कि हम यह जानना चाहते हैं कि छड़ की लम्बाई के अनुदिश T किस दर से परिवर्तित होता है। आइए, हम छड़ को एक-विम पिंड मान कर इसकी लम्बाई के अनुदिश x-अक्ष चुनें। अतः, $T = T(x)$ निर्देशांक x का फलन है। अब सवाल यह है : **यदि आप x के मान में अत्यणु परिवर्तन dx करते हैं तो $T(x)$ में कितना परिवर्तन होगा?** मान लें कि $T(x)$ में इस परिवर्तन को हम dT द्वारा व्यक्त करते हैं। स्कूल के कलन से आप जानते हैं कि इसका उत्तर है :

$$dT = \left(\frac{dT}{dx}\right)dx \qquad (1.4)$$

अतः, यदि x में अत्यणु परिवर्तन dx किया जाता है तो T में परिवर्तन dT का व्यंजक समीकरण (1.4) द्वारा दिया जाता है। अवकलज $\frac{dT}{dx}$ आनुपातिकता-गुणक (proportionality factor) है। यह x-**दिशा** में $T(x)$ की **परिवर्तन दर** बताता है।

इस उदाहरण में तापमान केवल एक चर x का फलन है, जिसे छड़ की लंबाई के अनुदिश मापा गया है। अब एक ऐसे बन्द कमरे की कल्पना करें जिसके एक कोने में आग जली हो (या रूम हीटर चल रहा हो)। कमरे का तापमान अदिश क्षेत्र $T(x, y, z)$

द्वारा वर्णित किया जा सकता है। कमरे में एक बिन्दु, मान लें कि उसके केन्द्र, पर खड़े होकर हम पूछ सकते हैं कि जैसे-जैसे हम x-अक्ष के अनुदिश अत्यणु दूरी Δx चलते हैं तो तापमान किस दर से परिवर्तित होता है। आप अपने स्कूल के कलन के पाठ्यक्रम से जानते हैं कि द्विविम या त्रिविम फलन की परिवर्तन दर **आंशिक अवकलजों** के पदों में व्यक्त की जाती है। अतः, x के सापेक्ष $T(x, y, z)$ का आंशिक अवकलज x-दिशा में इसकी परिवर्तन दर को व्यक्त करता है। क्या हम वह दिशा ज्ञात कर सकते हैं जिसमें तापमान की परिवर्तन दर सर्वाधिक होती है? हां, हम इस प्रश्न का उत्तर अदिश क्षेत्र $T(x, y, z)$ के आंशिक अवकलजों के पदों में दे सकते हैं। इसलिए आप आंशिक अवकलजों का अपना ज्ञान ताजा करना चाहेंगे। इसके लिए आगे बढ़ने से पहले आपको **इस इकाई के अंत में दिए गए परिशिष्ट का अध्ययन करना चाहिए।**

अब हम इस प्रश्न का उत्तर देंगे : **किसी अदिश क्षेत्र की सर्वाधिक परिवर्तन दर को कैसे व्यक्त किया जाता है**? इसके लिए हम आंशिक अवकलजों की अवधारणा का उपयोग कर, अदिश क्षेत्र के ग्रेडिएन्ट की परिभाषा देंगे।

1.3.1 अदिश क्षेत्र का गेडिएन्ट

आइए, पहले हम द्विविम अदिश क्षेत्र $f(x, y)$ की कल्पना करें। फिर हम इसके लिए प्राप्त परिणामों का व्यापकीकरण $f(x, y, z)$ के लिए करेंगे। अदिश क्षेत्र में दो बिन्दु $P(x, y)$ तथा $Q(x+\Delta x, y+\Delta y)$ लें। मान लें कि उन बिन्दुओं के स्थिति सदिश क्रमशः $\vec{\mathbf{r}}$ तथा $\vec{\mathbf{r}}+\Delta\vec{\mathbf{r}}$ हैं। बिन्दु P से बिन्दु Q की लघु दूरी तय करने में $f(x, y)$ में हुए परिवर्तन को हम इस तरह लिख सकते हैं :

$$\Delta f = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y) \qquad (1.5\text{क})$$

समीकरण (1.5क) से समीकरण (1.7ग) तक के सभी चरणों को आप पढ़ते समय एक अलग कागज लेकर स्वयं करें। इससे आप इस अवधारणा को बेहतर समझेंगे।

अभीष्ट परिणाम प्राप्त करने के लिए हम इसमें पद $f(x, y+\Delta y)$ जोड़ते हैं और घटाते हैं। इस प्रकार हम लिख सकते हैं कि

$$\Delta f = \left[f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)\right] + \left[f(x, y+\Delta y) - f(x, y)\right] \qquad (1.5\text{ख})$$

समीकरण (1.5ख) के दक्षिण पक्ष में पदों को क्रमशः Δx और Δy से गुणा और भाग कर हम लिख सकते हैं :

$$\Delta f = \frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)}{\Delta x}\Delta x + \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}\Delta y \qquad (1.5\text{ग})$$

अब हम समीकरण (1.5ग) के दक्षिण पक्ष में दिए गए पदों के लिए Δf का मान सीमा $\Delta x \to 0$ और $\Delta y \to 0$ के लिए ज्ञात करते हैं। आप देख सकते हैं कि :

$$\lim_{\Delta x\to 0, \Delta y\to 0} \Delta f = \lim_{\Delta x\to 0, \Delta y\to 0} \frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)}{\Delta x}\Delta x + \lim_{\Delta x\to 0, \Delta y\to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}\Delta y \qquad (1.5\text{घ})$$

इस इकाई के परिशिष्ट में समीकरण (1) में दी गई आंशिक अवकलज की परिभाषा का प्रयोग कर हम लिख सकते हैं कि :

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)}{\Delta x}\Delta x = \frac{\partial f(x, y+\Delta y)}{\partial x}\, dx$$

तथा $$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} \Delta y = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\, dy$$

इन परिणामों का प्रयोग कर हम समीकरण (1.5घ) को इस तरह लिख सकते हैं :

$$\lim_{\Delta x \to 0, \Delta y \to 0} \Delta f = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\partial f(x, y+\Delta y)}{\partial x} dx + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\, dy$$

$$= \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\, dy \qquad (1.5\text{च})$$

समीकरण (1.5च) का वाम पक्ष फलन df परिभाषित करता है जिसे f का **संपूर्ण अवकल** (total differential) कहते हैं। इस तरह, द्विविम अदिश क्षेत्र $f(x, y)$ का संपूर्ण अवकल है :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y}\, dy \qquad (1.6\text{क})$$

हम इस परिणाम का व्यापकीकरण त्रिविम फलन $f(x, y, z)$ का संपूर्ण अवकल df ज्ञात करने के लिए इस तरह कर सकते हैं :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y}\, dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \qquad (1.6\text{ख})$$

df का महत्व यह है कि अगर $dx\,(=\Delta x)$, $dy\,(=\Delta y)$ तथा $dz\,(=\Delta z)$ क्रमशः x, y और z में लघु परिवर्तन हों तो df का मान Δf के बराबर होता है। जैसे-जैसे dx, dy और dz न्यून होते जाते हैं, df का मान Δf के मान के और निकट होता जाता है और यह सन्निकटन और बेहतर होता चला जाता है।

अब हम ग्रेडिएन्ट की अवधारणा प्रस्तुत करने के लिए तैयार हैं। हम समीकरण (1.6ख) को और अधिक सुविधाजनक रूप में इस तरह लिख सकते हैं :

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{\mathbf{k}} \right) . \,(dx\,\hat{\mathbf{i}} + dy\,\hat{\mathbf{j}} + dz\,\hat{\mathbf{k}}) \qquad (1.7\text{क})$$

आप आसानी से सत्यापित कर सकते हैं कि समीकरण (1.7क) तथा समीकरण (1.6ख) एक ही हैं। आप यह भी देख सकते हैं कि

$$dx\,\hat{\mathbf{i}} + dy\,\hat{\mathbf{j}} + dz\,\hat{\mathbf{k}} \equiv d\vec{\mathbf{r}} \qquad (1.7\text{ख})$$

स्थिति सदिश में परिवर्तन निरूपित करता है। परिभाषा से, सदिश

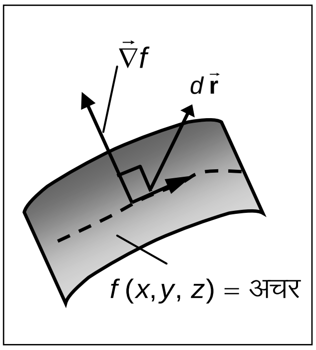
$$\frac{\partial f}{\partial x}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{\mathbf{k}} = \text{grad}\, f \equiv \vec{\nabla} f \qquad (1.7\text{ग})$$

अदिश क्षेत्र f का **ग्रेडिएन्ट** होता है।

समीकरणों (1.7ख तथा ग) को संयोजित कर हम समीकरण (1.7क) को इस तरह लिख सकते हैं :

$$df = (\vec{\nabla} f) \,.\, d\vec{\mathbf{r}} \qquad (1.8)$$

प्रतीक ∇ को 'डेल' और $\vec{\nabla} f$ को 'ग्रेड f' बोला जाता है। समीकरण (1.7ग) से हमें पता चलता है कि **अदिश क्षेत्र का ग्रेडिएन्ट एक सदिश** है। ध्यान दें कि $\vec{\nabla} f$ एक ऐसा सदिश है जो यादृच्छिक लघु परिवर्तन $d\vec{\mathbf{r}}$ होने पर फलन f में हुए परिवर्तन df को समीकरण (1.8) द्वारा व्यक्त करता है। आइए, इस परिणाम का भौतिक अर्थ समझें।



चित्र 1.5: अदिश क्षेत्र का ग्रेडिएन्ट उस पृष्ठ के लम्बवत् होता है जिस पर अदिश क्षेत्र अचर है।

मान लें कि $\vec{\nabla} f$ और $d\vec{\mathbf{r}}$ के बीच का कोण θ है। तब हम समीकरण (1.8) को इस तरह लिख सकते हैं :

$$df = \left|\vec{\nabla} f\right| \left|d\vec{\mathbf{r}}\right| \cos\theta = \left|\vec{\nabla} f\right| dr \cos\theta \qquad (1.9\text{क})$$

यदि इस समीकरण में $\theta = 90^\circ$ हो यानी $\vec{\nabla} f$ और $d\vec{\mathbf{r}}$ एक-दूसरे के **लम्बवत्** हों तो क्या होगा? समीकरण (1.9क) से हम कह सकते हैं कि इस स्थिति में $df = 0$ होगा। इसका अर्थ है कि f अचर है। दूसरे शब्दों में हम कह सकते हैं कि सदिश क्षेत्र f का मान इसके ग्रेडिएन्ट की लम्बवत् दिशा में अचर रहता है (चित्र 1.5)। इस परिणाम को हम ऐसे लिख सकते हैं :

सदिश $\vec{\nabla} f$ वक्र (या पृष्ठ) f = अचर पर लम्बवत् होता है।

अब हम dr को अचर रखते हैं और θ का मान बदल कर विभिन्न दिशाओं में df ज्ञात करते हैं। फिर हम पूछते हैं : θ के किस मान के लिए (या किस दिशा में) परिवर्तन अधिकतम होता है? समीकरण (1.8) से आप देख सकते हैं कि $\theta = 0^\circ$ के लिए df का अधिकतम मान प्राप्त होगा। इसका अर्थ है कि अचर dr के लिए, df तब **अधिकतम** होगा जब हम $\vec{\nabla} f$ के अनुदिश गतिमान होते हैं। इसके अतिरिक्त, r के सापेक्ष f की परिवर्तन दर निम्नलिखित होती है :

$$\frac{df}{dr} = \left|\vec{\nabla} f\right| \cos\theta \qquad (1.9\text{ख})$$

अतः, समष्टि में **अदिश क्षेत्र f की वृद्धि दर इसके ग्रेडिएन्ट के अनुदिश अधिकतम होती है तथा इसका परिमाण होता है :**

$$\left(\frac{df}{dr}\right)_{max} = \left|\vec{\nabla} f\right| \qquad (1.10)$$

$\vec{\nabla} f$ के परिमाण से समष्टि में अदिश क्षेत्र की **अधिकतम वृद्धि दर** प्राप्त होती है।

इसी प्रकार, जब $d\vec{\mathbf{r}}$ और $\vec{\nabla} f$ परस्पर विरोधी दिशाओं में होते हैं तो समीकरण (1.8) में $\theta = 180^\circ$ तथा $\dfrac{df}{dr} = -|\vec{\nabla} f|$ होते हैं। यह वह दिशा है जिसमें **क्षेत्र f के घटने की दर सर्वाधिक** होती है।

अब आपने **अदिश क्षेत्र के ग्रेडिएन्ट को परिभाषित करके इसका भौतिक अर्थ** सीख लिया है।

आइए, इन परिणामों को एक साथ रखें।

दोहराएं

अदिश क्षेत्र का ग्रेडिएन्ट

अदिश क्षेत्र f के ग्रेडिएन्ट को निम्नवत् परिभाषित किया जाता है :

$$\text{grad } f \equiv \vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{\mathbf{k}} \qquad (1.11\text{क})$$

द्विविम अदिश क्षेत्र $f(x, y)$ के लिए,

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{\mathbf{j}} \qquad (1.11\text{ख})$$

$\vec{\nabla} f$ के **परिमाण** से हमें समष्टि में अदिश क्षेत्र की सर्वाधिक परिवर्तन दर प्राप्त होती है।

$\vec{\nabla} f$ की **दिशा**, $f =$ अचर वक्र (या पृष्ठ) के **लम्बवत्** होती है।

ध्यान दें : $f(x, y, z)$ एक अदिश क्षेत्र है क्योंकि यह समष्टि में प्रत्येक बिन्दु (x, y, z) के संगत एक **अदिश राशि** संबद्ध करता है। दूसरी ओर, **अदिश क्षेत्र का ग्रेडिएन्ट** $\vec{\nabla} f$, **समष्टि में प्रत्येक बिन्दु के संगत सदिश संबद्ध करता है।** अतः, $\vec{\nabla} f$ एक **सदिश क्षेत्र** है।

आइए, ग्रेडिएन्ट की संकल्पना को समझने के लिए भौतिकी से कुछ उदाहरण लें और इसका मान ज्ञात करें। भौतिकी में अनेक सदिश राशियों को अदिश क्षेत्र के ग्रेडिएन्ट द्वारा निरूपित किया जाता है। उदाहरण के लिए, हम गुरुत्वीय बल को $\vec{\mathbf{F}} = -\vec{\nabla} V$ द्वारा व्यक्त करते हैं, जहां V गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा है। स्थिर वैद्युत आवेश बंटन का विद्युत् क्षेत्र भी विद्युत् विभव का ग्रेडिएन्ट होता है : $\vec{\mathrm{E}} = -\vec{\nabla}\phi$ । आइए, विभव क्षेत्र का ग्रेडिएन्ट परिकलित करने के लिए एक उदाहरण लें।

उदाहरण 1.1 : अदिश क्षेत्र का ग्रेडिएन्ट

व्युत्क्रम वर्ग बल (inverse square force) को निरूपित करने वाला विभव

$V(x, y, z) = \dfrac{k}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}$ है, जहां k अचर है। परिभाषा $\vec{\mathbf{F}} = -\vec{\nabla} V$ का उपयोग कर इस बल के घटक परिकलित करें।

हल ■ हम परिभाषा $\vec{\mathbf{F}} = -\vec{\nabla} V$ का उपयोग कर समीकरण (1.11क) से $V(x, y, z)$ का ग्रेडिएन्ट परिकलित करेंगे। अतः, हम लिख सकते हैं कि

$$(F_x\hat{\mathbf{i}} + F_y\hat{\mathbf{j}} + F_z\hat{\mathbf{k}}) = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{\mathbf{k}}\right)$$

या $$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

अब हमें $V(x, y, z)$ के आंशिक अवकलज ज्ञात करने हैं।

तो $F_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -k\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}\right]$

$= -k\left[-\frac{1}{2}\frac{2x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right]$ (हाशिए में दी गई टिप्पणी पढ़ें)

$= \frac{kx}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$

इसी प्रकार, $F_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{ky}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$

तथा $F_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{kz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$

$\therefore$ $\vec{\mathbf{F}} = -\vec{\nabla}V = \frac{k}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}(x\,\hat{\mathbf{i}} + y\,\hat{\mathbf{j}} + z\,\hat{\mathbf{k}})$ (i)

$= \frac{k\,\vec{\mathbf{r}}}{r^3} = \frac{k}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$ चूंकि $\vec{\mathbf{r}} = r\,\hat{\mathbf{r}}$

जहां $\vec{\mathbf{r}} = x\,\hat{\mathbf{i}} + y\,\hat{\mathbf{j}} + z\,\hat{\mathbf{k}}$ तथा $r = (x^2+y^2+z^2)^{1/2}$ है।

मान लें कि

$x^2+y^2+z^2 = t$

तब

$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}\right]$

$= \left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{t^{1/2}}\right)\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)\right]$

$= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right)$

$\times \frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2+z^2)$

$= -\frac{1}{2t^{3/2}}\cdot 2x$

$= -\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$

उदाहरण 1.1 ग्रेडिएन्ट के एक महत्वपूर्ण अनुप्रयोग को दिखाता है। भौतिकी में विभिन्न भौतिक राशियों को निरूपित करने के लिए अदिश और सदिश क्षेत्र फलनों का प्रयोग किया जाता है। **अदिश क्षेत्र फलन और सदिश क्षेत्र फलन में प्रायः यह संबंध होता है : सदिश क्षेत्र फलन किसी अदिश क्षेत्र फलन के ग्रेडिएन्ट का एक अदिश गुणज होता है।** इस संबंध से यह पता चलता है कि अदिश क्षेत्र का ग्रेडिएन्ट लेकर सदिश क्षेत्र प्राप्त किया जा सकता है। ध्यान दें कि यहां हमने ''सदिश क्षेत्र'' शब्द का प्रयोग किया है। इसके बारे में आप अधिक जानकारी इकाई 2 में पाएंगे।

एक अलग कागज पर उदाहरण 1.1 के सभी चरणों को स्वयं हल करें।

आइए, अदिश क्षेत्र का ग्रेडिएन्ट परिकलित करने के लिए एक और उदाहरण लें।

उदाहरण 1.2 : अदिश क्षेत्र का ग्रेडिएन्ट

एक स्वेच्छ फलन $f(r)$ का ग्रेडिएन्ट ज्ञात करें, जहां $r = (x^2+y^2+z^2)^{1/2}$ है। इसका उपयोग कर निम्न फलन का ग्रेडिएन्ट ज्ञात करें :

$\phi(x,y,z) = \frac{k}{(x^2+y^2+z^2)}$

हल ■ $\phi = f(r)$ लेकर हम समीकरण (1.11क) का प्रयोग करते हैं :

$$\vec{\nabla}\phi = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{\mathbf{k}} \quad \text{(i)}$$

कलन से श्रृंखला नियम का प्रयोग कर हम लिख सकते हैं कि

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} = \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)\frac{\partial}{\partial x}\left[(x^2+y^2+z^2)^{1/2}\right] \quad [\because\ r = (x^2+y^2+z^2)^{1/2}]$$

$\frac{\partial}{\partial x}[(x^2+y^2+z^2)^{1/2}]$

$= \frac{1}{2}\left[(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}-1}\right]\times(2x)$

$$= \frac{\partial f}{\partial r} \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} \right] = \frac{x}{r} \frac{\partial f}{\partial r} \qquad (\because \;\; r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}) \quad \text{(ii)}$$

इसी प्रकार,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial r} \cdot \frac{\partial}{\partial y} (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial r} \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{2y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} \right] = \frac{y}{r} \frac{\partial f}{\partial r} \qquad \text{(iii)}$$

तथा $\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial r} \cdot \frac{\partial}{\partial z} (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$

$$= \frac{\partial f}{\partial r} \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{2z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} \right] = \frac{z}{r} \frac{\partial f}{\partial r} \qquad \text{(iv)}$$

समीकरणों (ii), (iii) तथा (iv) को समीकरण (i) में प्रतिस्थापित करने पर हमें यह परिणाम प्राप्त होता है :

$$\vec{\nabla} f(r) = \frac{x}{r} \frac{\partial f}{\partial r} \hat{\mathbf{i}} + \frac{y}{r} \frac{\partial f}{\partial r} \hat{\mathbf{j}} + \frac{z}{r} \frac{\partial f}{\partial r} \hat{\mathbf{k}} = \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} [x \hat{\mathbf{i}} + y \hat{\mathbf{j}} + z \hat{\mathbf{k}}]$$

या $$\vec{\nabla} f(r) = \frac{\partial f}{\partial r} \left[\frac{\mathbf{r}}{r} \right] = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} \qquad \text{(v)}$$

जहां $\hat{\mathbf{r}}$ स्थिति सदिश $\mathbf{r}$ के अनुदिश एकक सदिश है।

भौतिकी में हमें अदिश फलनों के अनेक उदाहरण मिलते हैं। इसका अर्थ है कि समीकरण (v) एक महत्वपूर्ण परिणाम है।

अदिश क्षेत्र $\phi(x, y, z) = \frac{k}{(x^2 + y^2 + z^2)}$ का ग्रेडिएन्ट ज्ञात करने के लिए हम $\phi = \frac{k}{r^2} = f(r)$ लिखते हैं। फिर समीकरण (v) से हम लिख सकते हैं :

$$\vec{\nabla} \phi = \vec{\nabla} f(r) = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{k}{r^2} \right) \hat{\mathbf{r}} = -\left(\frac{2k}{r^3} \right) \hat{\mathbf{r}} = -\frac{2k}{r^3} \hat{\mathbf{r}}$$

बोध प्रश्न 1 – अदिश क्षेत्र का ग्रेडिएन्ट

क) निम्नलिखित अदिश क्षेत्रों के ग्रेडिएन्ट परिकलित करें :

(i) $\phi(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$

(ii) $\phi(x, y, z) = xy + yz + zx$

ख) एक पहाड़ी की ऊंचाई को $z = 50 - x^2 y^2$ द्वारा व्यक्त किया जाता है। बिन्दु (1, 2) पर इसकी अधिकतम परिवर्तन दर ज्ञात करें। इसकी दिशा क्या है?

अदिश क्षेत्र के ग्रेडिएन्ट का भौतिकी में बहुत महत्व है क्योंकि इससे हम संरक्षी बल (conservative force) और अदिश विभव में संबंध स्थापित कर सकते हैं।

संरक्षी बल और अदिश विभव V के बीच निम्नलिखित संबंध होता है :

$$\vec{\mathbf{F}} = -\vec{\nabla} V \qquad (1.12)$$

आपने संरक्षी बलों के बारे में यांत्रिकी नामक पाठ्यक्रम (BPHCT-131) में पढ़ा होगा। आप जानते हैं कि स्थिर वैद्युत बल, गुरुत्वीय बल और कमानी बल संरक्षी बल हैं। इनमें से प्रत्येक बल के संगत एक विभव फलन का अस्तित्व होता है। इस समीकरण में ऋण चिन्ह महत्वपूर्ण है। **यह दर्शाता है कि बल और विभव का ग्रेडिएन्ट विपरीत दिशा में होते हैं**। उदाहरण के लिए, इसका अर्थ है कि गुरुत्वीय बल की दिशा उच्च गुरुत्वीय विभव से निम्न गुरुत्वीय विभव की ओर होती है जैसेकि किसी भवन के ऊपरी भाग से भूमि की ओर। बोध प्रश्न 2 में आप अदिश क्षेत्र के ग्रेडिएन्ट के अनुप्रयोग पर आधारित कुछ प्रश्न हल करेंगे।

बोध प्रश्न 2 – ग्रेडिएन्ट के अनुप्रयोग

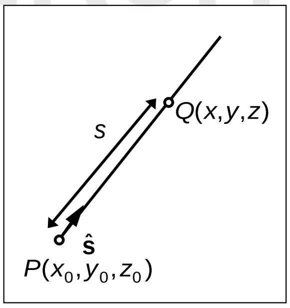
क) $x^2 + 4y^2 = 1$ द्वारा परिभाषित वक्र के लिए बिन्दु $(1, -1)$ पर लंब एकक सदिश ज्ञात करें।

ख) किसी भी बिन्दु पर $x + 2y - z + 5 = 0$ द्वारा परिभाषित पृष्ठ पर लंब एकक सदिश ज्ञात करें।

अभी तक हमने एक अदिश क्षेत्र का ग्रेडिएन्ट परिभाषित किया है। यह हमें अदिश क्षेत्र की अधिकतम स्थानिक परिवर्तन दर की दिशा के बारे में बताता है। हम एक अदिश क्षेत्र की किसी स्वेच्छ दिशा में परिवर्तन दर, उसके दिक्-अवकलज को ग्रेडिएन्ट के पदों में परिभाषित करके ज्ञात कर सकते हैं। अब हम यही करने वाले हैं।

1.3.2 अदिश क्षेत्र का दिक्-अवकलज

आइए, बिन्दु $P\,(x_0, y_0, z_0)$ पर तथा दी गई दिशा में दूरी s के सापेक्ष $f\,(x, y, z)$ की परिवर्तन दर ज्ञात करें (चित्र 1.6)। इसे फलन का दूरी के सापेक्ष **दिक्-अवकलज** df/ds कहते हैं। मान लें कि $\hat{\mathbf{s}}$ उस दिशा के अनुदिश एकक सदिश है जिसमें हम अदिश क्षेत्र की परिवर्तन दर ज्ञात करना चाहते हैं। आइए, एकक सदिश $\hat{\mathbf{s}}$ को निम्नवत् परिभाषित करें :



चित्र 1.6: दिक्-अवकलज।

$$\hat{\mathbf{s}} = a\hat{\mathbf{i}} + b\hat{\mathbf{j}} + c\hat{\mathbf{k}} \qquad (1.13\text{क})$$

मान लें कि हम बिन्दु P से चल कर एकक सदिश $\hat{\mathbf{s}}$ के अनुदिश कुछ परिमित दूरी $s(\geq 0)$ तय करके बिन्दु $Q\,(x, y, z)$ तक पहुंचते हैं। हम विस्थापन सदिश $\overrightarrow{\mathbf{PQ}} = s\,\hat{\mathbf{s}}$ को इस तरह लिख सकते हैं :

$$\vec{\mathbf{s}} = (x - x_0)\,\hat{\mathbf{i}} + (y - y_0)\,\hat{\mathbf{j}} + (z - z_0)\,\hat{\mathbf{k}} \qquad (1.13\text{ख})$$

हम $\vec{\mathbf{s}}$ को एकक सदिश $\hat{\mathbf{s}}$ के पदों में इस तरह भी लिख सकते हैं :

$$\vec{\mathbf{s}} = sa\,\hat{\mathbf{i}} + sb\,\hat{\mathbf{j}} + sc\,\hat{\mathbf{k}} \qquad (1.13\text{ग})$$

समीकरणों (1.13ख और ग) की तुलना करने पर हमें निम्नलिखित परिणाम प्राप्त होता है :

$$x - x_0 = sa; \quad y - y_0 = sb; \quad z - z_0 = sc$$

या
$$x = x_0 + sa; \quad y = y_0 + sb; \quad z = z_0 + sc \tag{1.13घ}$$

समीकरण (1.13घ) हमें क्या बताता है? आप देख सकते हैं कि $x = x(s)$, $y = y(s)$ तथा $z = z(s)$, चर s के फलन हैं। समीकरण (1.13घ), रेखा PQ, जो (x_0, y_0, z_0) तथा (x, y, z) से गुज़रती है, का प्राचल s में **प्राचलिक समीकरण** है। याद करें कि यहां s बिन्दुओं P और Q के बीच रेखा PQ के अनुदिश मापी गई दूरी है। अतः, यदि हम x, y और z की जगह s रख दें तो फलन $f(x, y, z)$, प्राचल s का फलन बन जाता है।

हम दिक्-अवकलज df/ds लिखने के लिए कलन से श्रृंखला नियम (chain rule) का उपयोग कर फलन $f(x, y, z)$ का जहां x, y और z प्राचल s के फलन हैं, s के सापेक्ष अवकलज प्राप्त करते हैं :

$$\frac{df}{ds} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{ds} \tag{1.14क}$$

समीकरण (1.13घ) से हम लिख सकते हैं :

$$\frac{dx}{ds} = a; \qquad \frac{dy}{ds} = b; \qquad \frac{dz}{ds} = c \tag{1.14ख}$$

अतः, समीकरण (1.14क), जो f के दिक्-अवकलज का व्यंजक है, अब निम्न रूप ले लेता है :

$$\frac{df}{ds} = \frac{\partial f}{\partial x}a + \frac{\partial f}{\partial y}b + \frac{\partial f}{\partial z}c \tag{1.14ग}$$

समीकरणों (1.14क, ख, ग) में आप ध्यान दें कि चूंकि f निर्देशांकों x, y और z का फलन है, x के सापेक्ष इसका अवकलज आंशिक अवकलज होगा। चूंकि x केवल s का फलन है, s के सापेक्ष x का अवकलज सामान्य अवकलज है।

अब हम समीकरण (1.11क) द्वारा व्यक्त अदिश क्षेत्र के ग्रेडिएन्ट के व्यंजक का प्रयोग करते हैं :

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{\mathbf{k}}$$

फिर हम $\hat{\mathbf{s}}$ का $\vec{\nabla} f$ के साथ अदिश गुणनफल लेते हैं। इस प्रकार हमें यह परिणाम प्राप्त होता है :

$$\vec{\nabla} f \,.\, \hat{\mathbf{s}} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{\mathbf{k}}\right) . \,(a\,\hat{\mathbf{i}} + b\,\hat{\mathbf{j}} + c\,\hat{\mathbf{k}})$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}a + \frac{\partial f}{\partial y}b + \frac{\partial f}{\partial z}c \tag{1.14घ}$$

यह समीकरण (1.14ग) के दक्षिण पक्ष के तुल्य है। अतः, हम लिख सकते हैं :

$$\frac{df}{ds} = \vec{\nabla} f \,.\, \hat{\mathbf{s}} \tag{1.15}$$

दूसरे शब्दों में, **दी गई दिशा में एक बिन्दु पर किसी अदिश क्षेत्र का दिक्-अवकलज उस बिन्दु पर अदिश क्षेत्र के ग्रेडिएन्ट और दी गई दिशा के अनुदिश एकक सदिश का अदिश गुणनफल होता** है। ध्यान दें कि यदि दिशा को एक यादृच्छिक सदिश $\mathbf{a}$, जो दी गई दिशा के अनुदिश एकक सदिश **नहीं** है, वर्णित करता है तो दिक्-अवकलज का व्यंजक निम्नलिखित हो जाता है :

$$\frac{df}{ds} = \vec{\nabla} f \cdot \frac{\vec{\mathbf{a}}}{|\vec{\mathbf{a}}|} \qquad (1.16)$$

समीकरणों (1.15) और (1.16) की समतुल्यता जानने के लिए आप देख सकते हैं कि $\frac{\vec{\mathbf{a}}}{|\vec{\mathbf{a}}|}$ सदिश $\vec{\mathbf{a}}$ के अनुदिश एकक सदिश है।

आइए, अब समीकरण (1.15 या 1.16) द्वारा अदिश फलन का दिक्-अवकलज परिकलित करने के लिए एक उदाहरण लें।

उदाहरण 1.3 : दिक्-अवकलज

अदिश क्षेत्र $\phi = xy^2z^3$ का दिशा $(\hat{\mathbf{i}} - 2\hat{\mathbf{j}} + 2\hat{\mathbf{k}})$ के अनुदिश बिन्दु (3, 1, – 1) पर दिक्-अवकलज ज्ञात करें।

हल ■ दिक्-अवकलज ज्ञात करने के लिए हमें समीकरण (1.15) या (1.16) का प्रयोग करना चाहिए। ध्यान दें कि यहां दिशा एकक सदिश के पदों में नहीं दी गई है (सदिश $\hat{\mathbf{i}} - 2\hat{\mathbf{j}} + 2\hat{\mathbf{k}}$ एकक सदिश नहीं है)। अतः, हम समीकरण (1.16) का प्रयोग करेंगे। प्रथम चरण में हम ϕ का ग्रेडिएन्ट ज्ञात करेंगे।

समीकरण (1.11क) से हम $\vec{\nabla}\phi$ निम्नवत् ज्ञात कर सकते हैं :

$$\vec{\nabla}\phi = \frac{\partial(xy^2z^3)}{\partial x}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial(xy^2z^3)}{\partial y}\hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial(xy^2z^3)}{\partial z}\hat{\mathbf{k}} = y^2z^3\,\hat{\mathbf{i}} + 2xyz^3\,\hat{\mathbf{j}} + 3xy^2z^2\,\hat{\mathbf{k}}$$

समीकरण (1.16) से हम दी गई दिशा में दिक्-अवकलज को निम्नवत् परिकलित कर सकते हैं :

$$\frac{d\phi}{ds} = (y^2z^3\,\hat{\mathbf{i}} + 2xyz^3\,\hat{\mathbf{j}} + 3xy^2z^2\,\hat{\mathbf{k}}) \cdot \frac{(\hat{\mathbf{i}} - 2\hat{\mathbf{j}} + 2\hat{\mathbf{k}})}{3}$$

$$= \frac{1}{3}y^2z^3 - \frac{4}{3}xyz^3 + 2xy^2z^2 \qquad \text{(i)}$$

बिन्दु (3, 1, – 1) पर $x = 3$, $y = 1$ और $z = -1$ है। अतः, $\frac{d\phi}{ds} = \frac{29}{3}$ (हाशिए पर दी गई टिप्पणी पढ़ें।)

समीकरण (i) में $x = 3$, $y = 1$ और $z = -1$ रखने पर हम लिख सकते हैं :

$$\frac{d\phi}{ds} = \frac{1}{3}.1^2.(-1)^3 - \frac{4}{3}(3).(1).(-1)^3 + 2.(3).(1)^2.(-1)^2$$

$$= -\frac{1}{3} + 4 + 6 = \frac{29}{3}$$

अब आप एक बोध प्रश्न हल करना चाहेंगे।

बोध प्रश्न 3 – दिक्-अवकलज

अदिश क्षेत्र $V = x^2 + \cos y - xz$ का बिन्दु $(2, \pi/6, -1)$ पर $\frac{1}{\sqrt{3}}(\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{k}})$ के अनुदिश दिक्-अवकलज ज्ञात करें।

आइए, अब आपने इस इकाई में जो कुछ सीखा है, हम उसका सारांश दें।

1.4 सारांश

अवधारणा	विवरण
अदिश क्षेत्र	■ एक ऐसा फलन f जो किसी दिए गए क्षेत्र में प्रत्येक बिन्दु के साथ अद्वितीय अदिश संबद्ध करता है, **अदिश क्षेत्र फलन** या **अदिश क्षेत्र** कहलाता है। वक्र $f(x, y)$ = अचर या पृष्ठ $f(x, y, z)$ = अचर को क्रमशः **कंटूर वक्र** और **कंटूर पृष्ठ** कहते हैं।
अदिश क्षेत्र का ग्रेडिएन्ट	■ किसी अदिश क्षेत्र के **ग्रेडिएन्ट** को इस तरह परिभाषित किया जाता है : $$\vec{\nabla} f = \hat{\mathbf{i}}\frac{\partial f}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}}\frac{\partial f}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}}\frac{\partial f}{\partial z}$$ यह एक ऐसा सदिश है कि स्वेच्छ लघु परिवर्तन $d\vec{\mathbf{r}}$ के लिए f में परिवर्तन df को इस तरह व्यक्त किया जा सकता है : $$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = \left(\vec{\nabla} f\right).d\vec{\mathbf{r}}$$
ग्रेडिएन्ट के गुणधर्म	■ अदिश क्षेत्र का ग्रेडिएन्ट अदिश क्षेत्र के अचर मान के वक्रों और पृष्ठों के **लंबवत्** होता है। किसी भी बिन्दु पर अदिश क्षेत्र के ग्रेडिएन्ट से **अदिश क्षेत्र की अधिकतम परिवर्तन दर प्राप्त होती** है।
अदिश क्षेत्र का दिक्-अवकलज	■ एक अदिश क्षेत्र f का एकक सदिश $\hat{\mathbf{s}}\left(\equiv \frac{\vec{\mathbf{s}}}{s}\right)$ के अनुदिश **दिक्-अवकलज** होता है : $$\frac{\partial f}{\partial s} = \hat{\mathbf{s}}.\vec{\nabla} f = \frac{\vec{\mathbf{s}}}{s}.\vec{\nabla} f$$ यह $\vec{\nabla} f$ का $\hat{\mathbf{s}}$ पर प्रक्षेप है।

1.5 अंत में कुछ प्रश्न

1. निम्नलिखित अदिश क्षेत्रों के ग्रेडिएन्ट परिकलित करें :

   क) $\phi(x,y,z) = e^{xyz}$

   ख) बिन्दु $(1, 2, \pi/6)$ पर $f = y\sin z - xy$ के लिए किस दिशा में अदिश क्षेत्र के घटने की दर अधिकतम होगी?

2. तापमान क्षेत्र $T(x, y, z) = 2x^2 + xyz + y^2 + 273$ के लिए बिन्दु $(-1, 2, 1)$ पर ग्रेडिएन्ट ज्ञात करें। ऊष्मा प्रवाह की दिशा क्या है?

3. अदिश क्षेत्र $F = e^x \cos y$ के लम्बवत् एकक सदिश ज्ञात करें।

4. $\vec{\mathbf{A}} = 2yz\hat{\mathbf{i}} - x^2y\hat{\mathbf{j}} + xz^2\hat{\mathbf{k}}$ तथा $\phi = 2x^2yz^3$ के लिए $(\vec{\mathbf{A}}.\vec{\nabla})\phi$ ज्ञात करें।

5. बिन्दु (2, 1, 4) पर पृष्ठ $(x-2)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 9$ के लम्बवत् एकक सदिश ज्ञात करें।

6. अदिश क्षेत्र $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ का ग्रेडिएन्ट परिकलित करें।

7. स्थितिज ऊर्जा फलन $V(r) = \alpha r^2$, जहां $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ तथा α अचर नियतांक है, के लिए बल क्षेत्र परिकलित करें।

8. निम्नलिखित स्थितिज ऊर्जा फलन के लिए त्रिविम बल क्षेत्र ज्ञात करें :

$$V = \frac{e^{-\alpha r}}{r}$$

9. अदिश क्षेत्र $\phi = x^2 y + xz$ के लिए बिन्दु (1, 2, 1) पर सदिश $\vec{\mathbf{C}} = 2\hat{\mathbf{i}} - 3\hat{\mathbf{j}} + 4\hat{\mathbf{k}}$ के अनुदिश दिक्-अवकलज ज्ञात करें।

10. अदिश क्षेत्र $\phi = x^2 + y^2 + z^2$ का बिन्दु (3, 0, 1) पर $\hat{\mathbf{i}} - 3\hat{\mathbf{j}} + 2\hat{\mathbf{k}}$ के अनुदिश दिक्-अवकलज ज्ञात करें।

1.6 हल और उत्तर

बोध प्रश्न

1. क) (i) क्योंकि $\phi(x, y)$ एक द्विविम अदिश क्षेत्र है, अतः, हम समीकरण (1.11ख) का प्रयोग करते हैं। $\phi = \ln(x^2 + y^2)$ के लिए :

$$\vec{\nabla}\phi = \frac{\partial}{\partial x}[\ln(x^2 + y^2)]\,\hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial}{\partial y}[\ln(x^2 + y^2)]\,\hat{\mathbf{j}} = \frac{2x}{x^2 + y^2}\,\hat{\mathbf{i}} + \frac{2y}{x^2 + y^2}\,\hat{\mathbf{j}}$$

(ii) समीकरण (1.11क) में $\phi = xy + yz + zx$ रखकर हमें मिलता है :

$$\phi = \frac{\partial}{\partial x}(xy + yz + zx)\,\hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial}{\partial y}(xy + yz + zx)\,\hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial}{\partial z}(xy + yz + zx)\,\hat{\mathbf{k}}$$

$$= (y + z)\,\hat{\mathbf{i}} + (x + z)\,\hat{\mathbf{j}} + (x + y)\,\hat{\mathbf{k}}$$

ख) अधिकतम परिवर्तन दर का परिमाण, ग्रेडिएन्ट के परिमाण के बराबर है जो हमें समीकरण (1.10) से मिलता है।

$$\vec{\nabla} z = \left(\hat{\mathbf{i}}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}}\frac{\partial}{\partial y}\right)(50 - x^2 y^2) = -\,2xy^2\hat{\mathbf{i}} - 2yx^2\,\hat{\mathbf{j}}$$

समीकरण (1.11ख) से बिन्दु (1, 2) पर : $\vec{\nabla} z\Big|_{z=(1,\,2)} = -\,8\,\hat{\mathbf{i}} - 4\,\hat{\mathbf{j}}$

$$\therefore \quad |\vec{\nabla} z| = |-8\,\hat{\mathbf{i}} - 4\,\hat{\mathbf{j}}| = 4\sqrt{5}$$

ऊंचाई में अधिकतम परिवर्तन दर की दिशा, जो सीधी चढ़ाई को निर्दिष्ट करती है, बिन्दु (1, 2) पर ग्रेडिएन्ट के अनुदिश है :

$$\vec{\nabla} z\Big|_{z=(1,\,2)} = -\,8\,\hat{\mathbf{i}} - 4\,\hat{\mathbf{j}}$$

2. क) अदिश क्षेत्र $f(x, y)$ का ग्रेडिएन्ट, वक्र $f = c$ पर लंब है। यहां c एक अचर है। अतः, हम क्षेत्र $f(x, y)$ को निम्नवत् परिभाषित कर सकते हैं :

$$f(x, y) = x^2 + 4y^2 - 1$$

अब हम $\vec{\nabla} f(x, y)$ का परिकलन करेंगे जो वक्र $f(x, y) = c$ पर लंब है। समीकरण (1.11ख) का प्रयोग कर हम लिख सकते हैं :

$$\vec{\nabla} f = \left(\hat{\mathbf{i}}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}}\frac{\partial}{\partial y}\right)(x^2 + 4y^2 - 1) = (2x\,\hat{\mathbf{i}} + 8y\,\hat{\mathbf{j}})$$

बिन्दु (1, – 1) पर ग्रेडिएन्ट का मान है : $\vec{\nabla} f(1, -1) = 2\,\hat{\mathbf{i}} - 8\,\hat{\mathbf{j}}$

यह सदिश, बिन्दु (1, – 1) पर वक्र $x^2 + 4y^2 = 1$ पर लंबवत् है। इस बिन्दु पर एकक लंब सदिश है :

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{2\,\hat{\mathbf{i}} - 8\,\hat{\mathbf{j}}}{\sqrt{2^2 + 8^2}} = \frac{\hat{\mathbf{i}} - 4\,\hat{\mathbf{j}}}{\sqrt{17}}$$

ख) इस प्रश्न के लिए भी बोध प्रश्न 2(क) की तरह पहले हम समीकरण (1.11ख) द्वारा पृष्ठ $f(x, y, z) = x + 2y - z + 5$ का ग्रेडिएन्ट ज्ञात करते हैं :

$$\vec{\nabla} f = \left(\hat{\mathbf{i}}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}}\frac{\partial}{\partial z}\right)(x + 2y - z + 5) = (\hat{\mathbf{i}} + 2\,\hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{k}}) \qquad \text{(i)}$$

ध्यान दें कि समीकरण (1) द्वारा निर्दिष्ट $\vec{\nabla} f$ एक अचर सदिश है। अतः, पृष्ठ $f(x, y, z)$ पर किसी भी बिन्दु के लिए ग्रेडिएन्ट समीकरण (i) द्वारा व्यक्त किया जाता है। इस पृष्ठ के किसी भी बिन्दु पर एकक लंब सदिश है :

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{(\hat{\mathbf{i}} + 2\,\hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{k}})}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{6}}(\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{k}})$$

3. हम समीकरण (1.15) का एकक सदिश $\hat{\mathbf{s}} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{k}})$ तथा

$f = V(x,y,z) = x^2 + \cos y - xz$ के लिए उपयोग करते हैं।

हम पहले $\vec{\nabla} V$ ज्ञात करते हैं :

$$\vec{\nabla} V = \left(\hat{\mathbf{i}}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}}\frac{\partial}{\partial z}\right)(x^2 + \cos y - xz) = (2x - z)\,\hat{\mathbf{i}} - \sin y\,\hat{\mathbf{j}} - x\,\hat{\mathbf{k}}$$

बिन्दु (2, π / 6, – 1) पर ग्रेडिएन्ट है :

$$\vec{\nabla} V(2, \pi/6, -1) = 5\,\hat{\mathbf{i}} - \sin\pi/6\,\hat{\mathbf{j}} - 2\hat{\mathbf{k}} = 5\,\hat{\mathbf{i}} - \frac{1}{2}\hat{\mathbf{j}} - 2\hat{\mathbf{k}}$$

समीकरण (1.15) से उस बिन्दु पर $\frac{1}{\sqrt{3}}(\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{k}})$ के अनुदिश दिक्-अवकलज है :

$$\frac{dV}{ds} = \left(5\,\hat{\mathbf{i}} - \frac{1}{2}\hat{\mathbf{j}} - 2\hat{\mathbf{k}}\right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{k}}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(5 - \frac{1}{2} + 2\right) = \frac{13}{2\sqrt{3}}$$

अंत में कुछ प्रश्न

1. क) हम समीकरण (1.11क) में $\phi = e^{xyz}$ का प्रयोग कर लिख सकते हैं :

$$\vec{\nabla}\phi = \frac{\partial}{\partial x}e^{xyz}\,\hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial}{\partial y}e^{xyz}\,\hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial}{\partial z}e^{xyz}\hat{\mathbf{k}}$$

$$= yz\,e^{xyz}\,\hat{\mathbf{i}} + xz\,e^{xyz}\,\hat{\mathbf{j}} + xy\,e^{xyz}\hat{\mathbf{k}}$$

ख) पहले हम बिन्दु (1, 2, $\pi/6$) पर ग्रेडिएन्ट ज्ञात करते हैं :

$$\vec{\nabla} f = \left(\hat{\mathbf{i}}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}}\frac{\partial}{\partial z}\right)(y \sin z - xy) = -y\,\hat{\mathbf{i}} + (\sin z - x)\,\hat{\mathbf{j}} + y\,\cos z\,\hat{\mathbf{k}}$$

$$\vec{\nabla} f\left(1, 2, \frac{\pi}{6}\right) = -2\,\hat{\mathbf{i}} + \left(\sin\frac{\pi}{6} - 1\right)\hat{\mathbf{j}} + 2\cos\frac{\pi}{6}\,\hat{\mathbf{k}} = -2\,\hat{\mathbf{i}} - \frac{1}{2}\,\hat{\mathbf{j}} + \sqrt{3}\,\hat{\mathbf{k}}$$

जिस दिशा में f सर्वाधिक तेज़ी से कम होता है, वह बिन्दु (1, 2, $\pi/6$) पर ग्रेडिएन्ट सदिश की दिशा की विपरीत दिशा है। यह दिशा सदिश $\vec{\mathbf{a}}$ के अनुदिश है :

$$\vec{\mathbf{a}} = -\,\vec{\nabla} f\left(1, 2, \frac{\pi}{6}\right) = 2\,\hat{\mathbf{i}} + \frac{1}{2}\,\hat{\mathbf{j}} - \sqrt{3}\,\hat{\mathbf{k}}$$

2. समीकरण (1.11क) में $f = T$ के साथ हम लिख सकते हैं :

$$\vec{\nabla} T = \left(\hat{\mathbf{i}}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}}\frac{\partial}{\partial z}\right)(2x^2 + xyz + y^2 + 273)$$

$$= (4x + yz)\,\hat{\mathbf{i}} + (xz + 2y)\,\hat{\mathbf{j}} + xy\,\hat{\mathbf{k}}$$

$$\vec{\nabla} T\,(-1, 2, 1) = (-4 + 2)\,\hat{\mathbf{i}} + (-1 + 4)\,\hat{\mathbf{j}} - 2\,\hat{\mathbf{k}} = -2\,\hat{\mathbf{i}} + 3\,\hat{\mathbf{j}} - 2\,\hat{\mathbf{k}}$$

ऊष्मा उच्च तापमान से निम्न तापमान के क्षेत्रों की ओर प्रवाहित होती है। अतः, यह उस दिशा में प्रवाहित होगी जिसमें तापमान बिन्दु $(-1, 2, 1)$ पर सबसे तेज़ी से कम होता है। अतः, ऊष्मा प्रवाह $-\vec{\nabla} T$ के अनुदिश है। अतः, यह $(2\,\hat{\mathbf{i}} - 3\,\hat{\mathbf{j}} + 2\,\hat{\mathbf{k}})$ के अनुदिश है।

3. अदिश क्षेत्र F पर लंब सदिश $\vec{\nabla} F$ होता है। $f = F$ लेकर हमें समीकरण (1.11ख) से यह परिणाम मिलता है : $\vec{\nabla} F = \hat{\mathbf{i}}\,e^x \cos y - \hat{\mathbf{j}}\,e^x \sin y$

अतः, एकक लंब सदिश है :

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{\vec{\nabla} F}{|\vec{\nabla} F|} = \frac{\hat{\mathbf{i}}\,e^x \cos y - \hat{\mathbf{j}}\,e^x \sin y}{\sqrt{e^{2x}\cos^2 y + e^{2x}\sin^2 y}}$$

$$= \frac{\hat{\mathbf{i}}\,e^x \cos y - \hat{\mathbf{j}}\,e^x \sin y}{e^x} = \hat{\mathbf{i}}\cos y - \hat{\mathbf{j}}\sin y$$

4. हम पहले $\vec{\mathbf{A}}$ का डेल संकारक $\vec{\nabla}$ के साथ अदिश गुणनफल ज्ञात करते हैं :

$$(\vec{\mathbf{A}}.\vec{\nabla}) = (2yz\,\hat{\mathbf{i}} - x^2y\,\hat{\mathbf{j}} + xz^2\,\hat{\mathbf{k}}).\left(\hat{\mathbf{i}}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}}\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$= \left(2yz\frac{\partial}{\partial x} - x^2y\frac{\partial}{\partial y} + xz^2\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

ध्यान दें कि यह एक अवकलन संकारक है जो क्षेत्र ϕ पर संक्रिया कर सकता है :

$$(\vec{\mathbf{A}}\,.\,\vec{\nabla})\phi = \left(2yz\frac{\partial}{\partial x} - x^2y\frac{\partial}{\partial y} + xz^2\frac{\partial}{\partial z}\right)(2x^2yz^3)$$

$$= 2yz\frac{\partial}{\partial x}(2x^2yz^3) - x^2y\frac{\partial}{\partial y}(2x^2yz^3) + xz^2\frac{\partial}{\partial z}(2x^2yz^3)$$

$$= 8xy^2z^4 - 2x^4yz^3 + 6x^3yz^4$$

5. समीकरण (1.11क) का प्रयोग कर हम पहले अदिश फलन $f(x, y, z) = (x-2)^2 + (y+1)^2 + z^2 - 9$ का ग्रेडिएन्ट ज्ञात करते हैं :

$$\vec{\nabla} f = \left[\hat{\mathbf{i}}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}}\frac{\partial}{\partial z}\right]\left[(x-2)^2 + (y+1)^2 + z^2 - 9\right]$$

$$= 2(x-2)\hat{\mathbf{i}} + 2(y+1)\hat{\mathbf{j}} + 2z\hat{\mathbf{k}}$$

बिन्दु (2, 1, 4) पर ग्रेडिएन्ट सदिश $\vec{\nabla} f(2, 1, 4) = 4\hat{\mathbf{j}} + 8\hat{\mathbf{k}}$ है। पृष्ठ पर एकक लंब सदिश है :

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{\vec{\nabla} f}{|\vec{\nabla} f|} = \frac{4\hat{\mathbf{j}} + 8\hat{\mathbf{k}}}{\sqrt{80}} = \frac{1}{\sqrt{5}}(\hat{\mathbf{j}} + 2\hat{\mathbf{k}})$$

6. समीकरण (1.7ग) का प्रयोग कर हम लिख सकते हैं कि

$$\vec{\nabla} r = \frac{\partial r}{\partial x}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial r}{\partial y}\hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial r}{\partial z}\hat{\mathbf{k}} \qquad \text{(i)}$$

आइए, समीकरण (i) का प्रत्येक घटक ज्ञात करें :

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} = \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} = \frac{x}{r} \qquad \text{(ii)}$$

इसी तरह, अन्य दो आंशिक अवकलज $\frac{\partial r}{\partial y}$ और $\frac{\partial r}{\partial z}$ हैं :

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} = \frac{y}{r} \qquad \text{(iii)}$$

तथा $$\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} = \frac{z}{r} \qquad \text{(iv)}$$

अतः, $$\vec{\nabla} r = \frac{x}{r}\hat{\mathbf{i}} + \frac{y}{r}\hat{\mathbf{j}} + \frac{z}{r}\hat{\mathbf{k}} = \frac{x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}}{r} = \frac{1}{r}\vec{\mathbf{r}} \qquad \text{(v)}$$

जहां $\vec{\mathbf{r}}$, बिन्दु (x, y, z) का स्थिति सदिश है। क्या आप समीकरण (v) के दक्षिण पक्ष को पहचानते हैं? आप जानते हैं कि $\vec{\mathbf{r}}/r$, $\hat{\mathbf{r}}$ के अनुदिश एकक सदिश है। इससे हमें भौतिकी में प्रायः इस्तेमाल होने वाला परिणाम प्राप्त होता है :

$$\vec{\nabla} r = \hat{\mathbf{r}} \qquad \text{(vi)}$$

7. समीकरण (1.12) में $V = \alpha r^2$ लेकर हम बल क्षेत्र $\vec{\mathbf{F}}$ परिकलित करते हैं :

$$\vec{\mathbf{F}} = -\vec{\nabla}(\alpha r^2)$$

$\vec{\nabla} V$ परिकलित करने के लिए हम स्वेच्छ अदिश फलन $f(r)$ के ग्रेडिएन्ट के लिए उदाहरण 1.2 के परिणाम का उपयोग करते है :

$$\vec{\nabla} f(r) = \frac{\partial f}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} \qquad \text{(i)}$$

$f(r) = \alpha r^2$ लेकर हमें निम्न परिणाम मिलता है :

$$\vec{\mathbf{F}} = -\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(\alpha r^2)\,\hat{\mathbf{r}} = -2\alpha r\,\hat{\mathbf{r}}$$

8. बल क्षेत्र $\vec{\mathbf{F}}$ को समीकरण (1.12) द्वारा प्राप्त किया जाता है। उदाहरण 1.2 के समीकरण (v) में $f(r) = V = \dfrac{e^{-\alpha r}}{r}$ प्रतिस्थापित करने पर हम देखते हैं कि

$\vec{\nabla} V = \dfrac{\partial V}{\partial r}\hat{\mathbf{r}}$

चूंकि $\vec{\mathbf{F}} = -\vec{\nabla} V$, हम लिख सकते हैं :

$$\vec{\mathbf{F}} = -\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)\hat{\mathbf{r}} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{e^{-\alpha r}}{r}\right)\hat{\mathbf{r}}$$

$$= -\left[-\frac{\alpha e^{-\alpha r}}{r} - \frac{e^{-\alpha r}}{r^2}\right]\hat{\mathbf{r}} = \frac{e^{-\alpha r}}{r}\left[\alpha + \frac{1}{r}\right]\hat{\mathbf{r}}$$

9. हम समीकरण (1.16) में $\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{C}}$ रखते हैं। $\vec{\mathbf{C}}$ के अनुदिश एकक सदिश है :

$$\hat{\mathbf{C}} = \frac{\vec{\mathbf{C}}}{|\vec{\mathbf{C}}|} = \frac{2\hat{\mathbf{i}} - 3\hat{\mathbf{j}} + 4\hat{\mathbf{k}}}{\sqrt{4+9+16}} = \frac{2\hat{\mathbf{i}} - 3\hat{\mathbf{j}} + 4\hat{\mathbf{k}}}{\sqrt{29}}$$

$f = \phi$ के लिए समीकरण (1.11क) से हम लिख सकते हैं कि

$$\vec{\nabla}\phi = \hat{\mathbf{i}}\,(2xy + z) + \hat{\mathbf{j}}\,(x^2) + \hat{\mathbf{k}}\,(x)$$

बिन्दु (1, 2, 1) पर ग्रेडिएन्ट का मान है : $\vec{\nabla}\phi(1, 2, 1) = 5\,\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}$

अतः, दिक्-अवकलज है :

$$\frac{d\phi}{ds} = \hat{\mathbf{C}}.\,(\vec{\nabla}\phi) = \left(\frac{2\hat{\mathbf{i}} - 3\hat{\mathbf{j}} + 4\hat{\mathbf{k}}}{\sqrt{29}}\right).(5\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}) = \frac{10}{\sqrt{29}} - \frac{3}{\sqrt{29}} + \frac{4}{\sqrt{29}} = \frac{11}{\sqrt{29}}$$

10. हम पहले बिन्दु (3,0,1) पर समीकरण (1.11क) का प्रयोग करके $f = \phi = x^2 + y^2 + z^2$ का ग्रेडिएन्ट ज्ञात करते हैं :

$$\vec{\nabla}\phi = \left(\hat{\mathbf{i}}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}}\frac{\partial}{\partial z}\right)(x^2 + y^2 + z^2) = 2x\,\hat{\mathbf{i}} + 2y\,\hat{\mathbf{j}} + 2z\,\hat{\mathbf{k}}$$

बिन्दु (3, 0, 1) पर $\phi(x, y, z)$ का ग्रेडिएन्ट सदिश है : $\vec{\nabla}\phi(3, 0, 1) = 6\,\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{k}}$

बिन्दु (3, 0, 1) पर सदिश $\hat{\mathbf{i}} - 3\hat{\mathbf{j}} + 2\hat{\mathbf{k}}$ के अनुदिश दिक्-अवकलज ज्ञात करने के लिए हम $\vec{\mathbf{a}} = \hat{\mathbf{i}} - 3\hat{\mathbf{j}} + 2\hat{\mathbf{k}}$ के लिए समीकरण (1.16) का प्रयोग करते हैं। ऐसा करने पर हमें निम्नलिखित परिणाम प्राप्त होता है :

$$\frac{d\phi}{ds} = (6\,\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{k}})\,.\,\frac{(\hat{\mathbf{i}} - 3\,\hat{\mathbf{j}} + 2\hat{\mathbf{k}})}{\sqrt{14}} = \frac{10}{\sqrt{14}}$$

परिशिष्ट : आंशिक अवकलज

परिभाषा से, फलन $f(x, y, z)$ का x के सापेक्ष आंशिक अवकलज होता है :

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y, z) - f(x,y,z)}{\Delta x} \qquad (1)$$

बाकी चरों y, z को **अचर मानते हुए** फलन $f(x, y, z)$ को x के सापेक्ष सामान्य कलन के अनुसार अवकलित करने पर फलन $\partial f / \partial x$ प्राप्त होता है। इसी तरह आप $\partial f / \partial y$ और $\partial f / \partial z$ ज्ञात कर सकते हैं। किसी फलन $f(x,y,z)$ के आंशिक अवकलज $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ हमें क्रमशः x, y या z-अक्षों की दिशाओं में f के परिवर्तन की दर बताते हैं। इस तरह, $\frac{\partial f}{\partial x}$ समष्टि के दिए हुए बिंदु पर x के सापेक्ष f के परिवर्तन की दर बताता है। आइए, हम समझाएं कि **बाकी चरों को अचर रखते हुए** फलन $f(x, y, z)$ के x, y और z के सापेक्ष आंशिक अवकलन कैसे परिकलित किए जाते हैं।

उदाहरण के लिए $f(x,y,z) = 2x^2 y z^3$ । तब क्योंकि y और z को अचर माना जाता है, अतः, $\frac{\partial f}{\partial x} = \left[\frac{\partial}{\partial x}(x^2)\right](2yz^3) = 4xyz^3$

इसी तरह किसी अन्य चर के सापेक्ष आंशिक अवकलज के परिकलन में, बाकी के चर अचर माने जाते हैं। अतः,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \left[\frac{\partial}{\partial y}(y)\right](2x^2 z^3) = 2x^2 z^3 \quad \text{और} \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \left[\frac{\partial}{\partial z}(z^3)\right](2x^2 y) = 6x^2 yz^2$$

अब आप एक फलन के आंशिक अवकलजों की गणना करें।

क) $f(x, y) = x^2 y^3 + \exp(x^2 y)$ के लिए $\frac{\partial f}{\partial x}$ और $\frac{\partial f}{\partial y}$ की गणना करें।

ख) फलन $u(x, y, z) = 2x + yz - xy$ के लिए $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ और $\frac{\partial u}{\partial z}$ प्राप्त करें।

इनके हल निम्नवत् हैं :

क) $$\frac{\partial f}{\partial x} = \left[\frac{\partial}{\partial x}(x^2 y^3) + \frac{\partial}{\partial x}\exp(x^2 y)\right] = \left[\frac{\partial}{\partial x}(x^2)\right] y^3 + 2x\exp(x^2 y)$$

$= 2xy^3 + 2x\exp(x^2 y)$ क्योंकि y और z को अचर माना गया है।

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \left[\frac{\partial}{\partial y}(x^2 y^3) + \frac{\partial}{\partial x}\exp(x^2 y)\right] = 3y^2 x^2 + \exp(x^2 y)$$

ख) $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(2x + yz - xy) = 2 - y$ क्योंकि y और z को अचर माना गया है।

इसी तरह, $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(2x + yz - xy) = z - x$ और $\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}(2x + yz - xy) = y$