

इकाई की रूपरेखा

- 10.0 उद्देश्य
- 10.1 प्रस्तावना
- 10.2 ब्याज की संकल्पना और उसका अर्थ
- 10.3 साधारण ब्याज
- 10.4 चक्रवृद्धि ब्याज
- 10.5 चक्रवृद्धि ब्याज दर की विशिष्ट स्थितियाँ
- 10.6 सारांश
- 10.7 शब्दावली
- 10.8 बोध प्रश्नों के उत्तर
- 10.9 स्वपरख प्रश्न
- 10.10 संदर्भ पुस्तकें
परिशिष्ट सारणियाँ

10.0 उद्देश्य

इस इकाई का अध्ययन करने के बाद,

- ब्याज की संकल्पना को समझ पाएँगे;
- साधारण ब्याज को परिभाषित कर पाएँगे तथा साधारण ब्याज को परिकलित कर पाएँगे;
- चक्रवृद्धि ब्याज को परिभाषित कर पाएँगे तथा चक्रवृद्धि ब्याज को परिकलित कर पाएँगे;
- संतत संयोजित परिकलन कर पाएँगे; तथा
- बदलती हुई चक्रवृद्धि ब्याज दरों का परिकलन कर पाएँगे।

10.1 प्रस्तावना

इस इकाई में, हम विभिन्न प्रकार की ब्याज दरों के बारे में अध्ययन करेंगे तथा ब्याज को परिकलित करने की विधियों का अध्ययन करेंगे। इस उद्देश्य के लिए, हम साधारण ब्याज और चक्रवृद्धि ब्याज की संकल्पनाओं पर उनके अभिकलनों के साथ चर्चा करेंगे।

10.2 ब्याज की संकल्पना और उसका अर्थ

धनराशि को एक संस्था द्वारा दूसरी संस्था को उधार दिया जा सकता है या एक संस्था द्वारा दूसरी संस्था से उधार लिया जा सकता है। किसी धनराशि का किसी विशेष समय काल तक उपयोग करने के लिए भुगतान किया गया मूल्य ब्याज (Interest) कहलाता है। इसे उधार लेने वाले के लिए व्यय तथा उधार देने वाले के

लिए आय माना जाता है। उधार ली गई या उधार दी गई राशि मूलधन (principal) कहलाती है। ब्याज वार्षिक, अर्धवार्षिक, त्रैमासिक या मासिक देय हो सकता है।

ब्याज की धारणा धनराशि के समय के अनुसार मूल्य, अर्थात् समय मूल्य (time value) पर आधारित है। इसका अर्थ है कि वर्तमान समय—बिंदु पर उपलब्ध धनराशि का भविष्य समय—बिंदु पर उपलब्ध उतनी ही धनराशि की तुलना में अधिक मूल्य है। आज का एक रुपया कल के एक रुपए के बराबर नहीं है। अतः, वास्तव में ब्याज वह धनराशि है जो उधार ली गई राशि के लिए उधार देने वाले को मुआवजे के रूप में इसलिए दी जाती है कि उसे उस धनराशि को उपयोग करने का अवसर नहीं मिला तथा इसलिए भी कि उसने धन उधार देने में विभिन्न जोखिमों, जैसे धनराशि वापिस नहीं मिलने का जोखिम, को सहन करने का प्रयास किया।

10.3 साधारण ब्याज

साधारण ब्याज (simple interest) वह ब्याज है जो उधार ली गई प्रारंभिक धनराशि पर परिकलित किया जाता है। इस प्रकार, अभिकलन की संपूर्ण अवधि में, ब्याज मूलधन पर ही परिकलित किया जाता है। ब्याज की दरें प्रायः प्रतिशत के रूप में व्यक्त की जाती हैं।

साधारण ब्याज के परिकलन के लिए सूत्र:

साधारण ब्याज = मूलधन × दर × समय

$$I = P \times r \times t$$

I = ब्याज, वह धनराशि जो आप उधार लेने के लिए देते हैं या वह धनराशि जो आप अपनी जमा राशि पर अर्जित करते हैं।

P = मूलधन, जो प्रारंभिक धनराशि है।

t = समय काल जिसके लिए धनराशि उधार ली गई है / जमा की गई है।

r = ब्याज की दर, जो उधार लेने के लिए दी जाती है या धनराशि जमा करने के लिए अर्जित की जाती है तथा जो प्रतिशत के रूप में प्रायः व्यक्त की जाती है।

मिश्रधन (amount) परिकलित करना:

$$\text{मिश्रधन (A)} = P + I$$

$$= P + (P \times r \times t), \text{ अर्थात् } P(1 + rt)$$

[मिश्रधन वह राशि है, जो समय अवधि के अंत में देय होती है।]

उदाहरण 1 : एक नई कार खरीदने के लिए, रमेश ने 3 वर्ष के लिए 5,00,000; 8% वार्षिक साधारण ब्याज की दर से उधार लिए। वह कितना ब्याज अदा करेगा ?

हल:

यहाँ, $P = 5,00,000$, $r = 8/100 = 0.08$, $t = 3$ वर्ष, $I = ?$ है।

सूत्र $I = P \times r \times t$ का उपयोग करने पर,

$$\text{साधारण ब्याज (I)} = 500000 \times 0.08 \times 3$$

$$= ₹1,20,000$$

अतः, रमेश कार ऋण (loan) के लिए ₹120000 ब्याज के रूप में देगा।

उदाहरण 2: आदित्य ने 150000 किसी बैंक में 9.8% वार्षिक ब्याज की दर पर जमा कराए। उसको 5 वर्ष के बाद मिलने वाला ब्याज ज्ञात कीजिए। साथ ही, वह मिश्रधन भी ज्ञात कीजिए जो उसे मिलेगा।

हल: यहाँ, $P = 1,50,000$, $r = 0.098$, $t = 5$, $I = ?$, $A = ?$ है।

क्योंकि $I = P \times r \times t$ है, इसलिए

$$I = 150000 \times 0.098 \times 5 = ₹73,500 \text{ है।}$$

अतः, आदित्य को ब्याज के रूप में ₹73500 है।

$$\text{मिश्रधन} = P + I$$

$$\text{या } A = 150000 + 73500 = ₹2,23,500.$$

अतः, आदित्य को ₹73,500 रु ब्याज के रूप में तथा ₹223500 मिश्रधन के रूप में मिलेंगे।

नोट: हम मिश्रधन को सूत्र $A = P(1 + rt)$ के उपयोग से भी परिकलित कर सकते हैं।

$$A = 150000 [1 + (0.098 \times 5)]$$

$$\text{या, } A = ₹2,23,500$$

उदाहरण 3: हिमांशी रमा को ₹45000 उधार देती है। वह समय ज्ञात कीजिए जिसमें इसका ब्याज 11% वार्षिक साधारण ब्याज की दर ₹9900 हो जाएगा।

हल: यहाँ, $I = 9900$, $P = 45000$, $r = 0.11$, $t = ?$ है।

$I = P \times r \times t$ से हम प्राप्त करते हैं:

$$t = I/Pr$$

$$\text{या, } t = 9900 / (45000) (0.11)$$

$$= 2 \text{ वर्ष}$$

उदाहरण 4: कितने वर्षों में कोई धनराशि 5% वार्षिक साधारण ब्याज की दर से स्वयं की दुगुनी हो जाएगी ?

हल: मिश्रधन = 2 × मूलधन

$r = 0.05$ दिया है। $t = ?$ है।

$$A = P + P \times r \times t \text{ से,}$$

$$A = P(1 + rt)$$

$$\text{प्रश्न के अनुसार } 2P = P [1 + t(0.05)]$$

$$\text{या, } 2 = 1 + t(0.05)$$

$$\text{या, } t = 1/0.05$$

या, $t=20$ है।

अतः, कोई धनराशि 5% वार्षिक साधारण ब्याज की दर से 20 वर्षों में स्वयं की दुगुनी हो जाएगी।

उदाहरण 5: ₹1,20,000 की एक धनराशि 2 वर्षों के लिए साधारण ब्याज पर उधार दी गई है। साहूकार (lender) को कुल मिलाकर ₹153600 प्राप्त हुए। ब्याज की दर प्रति वर्ष (p.a.) ज्ञात कीजिए।

हल: यहाँ, $P = 120000, A = 153600, t = 2, r = ?$ है।

$$A = P(1 + rt) \text{ है।}$$

$$\text{अर्थात् } 153600 = 120000(1 + 2r)$$

$$\text{या, } 153600 = 120000 + 240000r$$

$$\text{या, } 240000r = 153600 - 120000$$

$$\text{या, } r = 33600/240000$$

$$\text{या, } r = 0.14 \text{ अर्थात् } 14\% \text{ है।}$$

अतः, वाँछित ब्याज की दर 14% p.a. है।

उदाहरण 6: वह मूलधन ज्ञात कीजिए, जिस पर 20 वर्षों में 5% साधारण ब्याज की दर से 500.50 रु. ब्याज प्राप्त होगा।

हल: यहाँ $I = 500.50, t = 2, r = 0.05, P = ?$ है।

$I = P \times r \times t$ से हम प्राप्त करते हैं:

$$I = 500.50$$

$$500.50 = P \times 0.05 \times 2$$

$$\text{या, } 500.50 = 0.10P$$

$$\text{या, } P = 5005 \text{ है।}$$

अतः, वाँछित मूलधन ₹ 5005 है।

उदाहरण 7: कितने समय में 17000 रु. की धनराशि 10% वार्षिक साधारण ब्याज की दर से 22100 रु. हो जाएगी ?

हल:

$$P = 17000, A = 22100, r = 0.10, t = ? \text{ है।}$$

$$\text{अतः, } 22100 = 17000 [1 + t(0.10)]$$

$$22100 = 17000 + 1700t$$

$$\text{या, } 1700t = 5100$$

$$\text{या, } t = \frac{5100}{1700} = 3 \text{ वर्ष है।}$$

बोध प्रश्न क

1. ब्याज का भुगतान क्यों किया जाता है ?
2. ₹10000 पर $5\frac{1}{2}\%$ वार्षिक साधारण ब्याज की दर से ₹2200 ब्याज प्राप्त करने में कितना समय लगेगा ?
3. कोई धनराशि साधारण ब्याज पर 3 वर्षों में ₹1120 तथा 5 वर्षों में ₹1200 हो जाती है। मूलधन तथा वार्षिक ब्याज की दर ज्ञात कीजिए।

10.4 चक्रवृद्धि ब्याज

एक अन्य प्रकार का ब्याज चक्रवृद्धि ब्याज (compound interest) होता है। चक्रवृद्धि ब्याज न केवल प्रारंभिक मूलधन पर परिकलित किया जाता है, बल्कि पिछली अवधियों में हुए संचित ब्याज पर भी परिकलित किया जाता है। दूसरे शब्दों में, चक्रवृद्धि ब्याज, ब्याज और मूलधन दोनों पर परिकलित किया जाता है। इसीलिए, चक्रवृद्धि ब्याज की कभी-कभी 'ब्याज पर ब्याज' के रूप में भी व्याख्या की जाती है।

उदाहरणार्थ, यदि ₹5000 की धनराशि 5% वार्षिक ब्याज की दर से 1 वर्ष के अंत में मिश्रधन ₹5000 + ₹250 होगा। 1वर्ष के अंत में मिश्रधन ₹5000 + ₹250 = ₹5250 है यदि यह राशि 5% वार्षिक ब्याज पर एक अन्य वर्ष के लिए उधार दी जाती है, तो ब्याज को प्रारंभिक ₹5000 के स्थान पर ₹5,250 पर परिकलित किया जाएगा। अतः, दूसरे वर्ष के अंत में मिश्रधन ₹5,250 + (5250 × 0.05 × 1) = ₹5250 + ₹262.5 = ₹5512.5 होगा। ध्यान दीजिए की साधारण ब्याज से कुल मिश्रधन 5000 + (5000 × 0.05 × 2) = 5,000 + 500 = ₹5,500 प्राप्त होगा। अतिरिक्त धनराशि ₹12.50 पहले वर्ष के ब्याज ₹250 पर 5% वार्षिक से एक वर्ष का ब्याज है।

चक्रवृद्धि ब्याज से संबंधित कुछ संकल्पनाएँ

चक्रवृद्धि ब्याज: यह संयोजित मिश्रधन (compound amount) तथा प्रारंभिक मूलधन का अंतर होता है।

संयोजन अवधि: दो क्रमागत समय-बिंदुओं के बीच की अवधि जिन पर ब्याज संयोजित किया जाता है।

संयोजित मिश्रधन: अंतिम अवधि के अंत में देय कुल राशि।

संयोजित होने की बारंबारता: यह सूचित करता है कि एक वर्ष में ब्याज कितनी बार संयोजित (compound) किया जाता है।

चक्रवृद्धि ब्याज परिकलित करने के लिए सूत्र

$$A = P(1 + i)^n,$$

जहाँ $i = r/k =$

ब्याज की दर

प्रति वर्ष संयोजन अवधियों की संख्या।

तथा $n = k \times t$ (= प्रतिवर्ष संयोजन अवधियों की संख्या × वर्षों की संख्या) है।

A: t अवधियों के अंत में मिश्रधन

P: मूलधन, जो प्रारंभिक धन राशि है।

r: वार्षिक ब्याज की दर

k: प्रति वर्ष संयोजन अवधियों की संख्या

t: समय वर्षों में

n: संयोजन रूपांतरण अवधियों की कुल संख्या

i: प्रति वर्ष संयोजन अवधि ब्याज की दर

उदाहरणार्थ, यदि वार्षिक ब्याज की दर 10% है तथा ब्याज त्रैमासिक संयोजित होता है, तो एक वर्ष में 4 रूपांतरण अवधियाँ (संयोजित अवधियाँ) हैं।

इस प्रकार, $i = \frac{0.10}{4} = 0.025$ है। यदि वार्षिक ब्याज की दर 24% है तथा ब्याज मासिक संयोजित होता है, तो एक वर्ष में 12 रूपांतरण (संयोजन) अवधियाँ (conversion periods) हैं। अतः, $i = \frac{0.24}{12} = 0.02$ है।

नोट: $(1 + i)^n$ का मान चक्रवृद्धि ब्याज सारणी का उपयोग करके ज्ञात किया जा सकता है।

चक्रवृद्धि ब्याज के लिए कुछ सूत्र

चक्रवृद्धि ब्याज को वार्षिक, अर्धवार्षिक, त्रैमासिक, मासिक सतत रूप (continuously) से परिकलित किया जा सकता है। विभिन्न स्थितियों के लिए सूत्र नीचे दिए गए हैं।

समय	मिश्रधन
वार्षिक	$A = P(1+i)^n$, जहाँ $i = r$ और $n = t$ है।
अर्धवार्षिक	$A = P(1+i)^n$, जहाँ $i = r/2$ और $n = 2t$ है।
त्रैमासिक	$A = P(1+i)^n$, जहाँ $i = r/4$ और $n = 4t$ है।
मासिक	$A = P(1+i)^n$, जहाँ $i = r/12$ और $n = 12t$ है।

चक्रवृद्धि ब्याज (सभी स्थितियों में) $I = A - P$ है।

उदाहरण 8: कोई बैंक 8% वार्षिक ब्याज की दर से चक्रवृद्धि ब्याज देता है। योगी ने इस बैंक में 4 वर्ष के लिए ₹5000 रु जमा किए। योगी द्वारा प्राप्त किए जाने वाला ब्याज ज्ञात कीजिए।

हल:

यहाँ $P = 5000, n = 4, i = 0.08, A = ?$ है।

हमें प्राप्त है: $A = P(1 + i)^n$

अतः, $A = 5000(1 + 0.08)^4$

या, $A = 5000(1.215506)$ (चक्रवृद्धि ब्याज सारणी के उपयोग से)

या, $A = ₹6077.53$.

अतः, $I = 6077.53 - 5000$

या, $I = ₹1077.53$

अर्थात् योगी को बैंक से ₹1077.53 ब्याज के रूप में मिलेंगे।

उदाहरण 9: मेहक ने किसी वित्तीय खाते में ₹50,000 जमा किए, जो 8% वार्षिक ब्याज देता है, जब कि ब्याज वार्षिक संयोजित होता है। उसके वित्तीय खाते में 10 वर्ष बाद कितनी राशि होगी ?

हल: यहाँ

यहाँ, $P = 50000$, $i = 0.08$, $t = 10$, $A = ?$ है।

क्योंकि $A = P(1 + i)^n$ है, इसलिए

$$A = 50000(1 + 0.08)^{10}$$

या, $A = 50000(2.158925)$ (चक्रवृद्धि ब्याज सारणी के उपयोग से)

या, $A = 1,07,946.25$

मेहक को वित्तीय खाते में 10 वर्ष बाद ₹107946.25 होंगे।

उदाहरण 10: ₹ 8000 पर 5 वर्ष के लिए 6% वार्षिक ब्याज की दर से चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात कीजिए, जबकि ब्याज संयोजित होता है:

(i) अर्धवार्षिक (ii) मासिक

हल:

यहाँ, $P = 8000$, $t = 5$, $r = 0.06$, $A = ?$ है।

$A = P(1 + r/k)^{kt}$ होता है।

i) $A = 8000(1 + 0.06/2)^{2 \times 5}$

या, $A = 8000(1 + 0.03)^{10}$

या, $A = 8000(1.343916)$ (चक्रवृद्धि ब्याज सारणी के उपयोग से)

या, ₹10751.33

हम प्राप्त करते हैं $I = 10751.33 - 8000$

या, $I = ₹ 751.33$

ii) $A = 8000(1 + 0.06/12)^{12 \times 5}$

अर्थात् $A = 8000(1 + 0.005)^{60}$

या, $A = 8000(1.348850)$ (चक्रवृद्धि ब्याज सारणी के उपयोग से)

या, $A = ₹10790.80$ है।

या, $I = 10790.8 - 8000$

या, $I = ₹2790.80$ है।

उदाहरण 11: यदि ₹86400 की धनराशि को 8% वार्षिक ब्याज की दर पर निवेशित किया जाता है, जबकि ब्याज त्रैमासिक संयोजित होता है, तो उस राशि को ₹ 206500 के रूप में संचित होने में कितना समय लगेगा।

हल:

यहाँ, $P = 86,400, r = 0.08, A = 2,06,500.60, t = ?$ है।

क्योंकि $A = P (1 + r/k)^{kt}$ होता है, इसलिए

$$206500.60 = 86400 (1 + 0.08/4)^n \text{ है।}$$

$$\text{या, } 206500.60/86400 = (1.02)^n$$

$$\text{या, } (1.02)^n = 2.39005 \text{ है।}$$

$$\text{या, } n \log (1.02) = \log 2.390056$$

$$\text{या, } n(0.0086) = 0.378408$$

$$\text{या, } n = 0.378408/0.0086$$

$$= 44 \text{ तिमाही या 11 वर्ष}$$

अतः, वाँछित समय 11 वर्ष है।

उदाहरण 12: यदि ब्याज 6% वार्षिक की दर से प्रति वर्ष संयोजित होता है, तो किसी मूलधन के दुगुने होने में कितना समय लगेगा ?

हल:

यहाँ $P = P, A = 2P, r = 0.06, n = ?$ है।

क्योंकि $A = P (1 + r)^n$, इसलिए

$$2P = P(1 + 0.06)^n \text{ है।}$$

$$\text{या, } 2 = (1.06)^n$$

$$\text{या, } \log 2 = n \log 1.06$$

$$\text{या, } n = \log 2 / \log 1.06 = 0.3010/0.0253 \text{ है।}$$

या, $n = 11.9$ वर्ष लगभग है।

उदाहरण 13: कृष्णा द्वारा कोई धनराशि चक्रवृद्धि ब्याज पर जमा की गई, जबकि ब्याज प्रति वर्ष संयोजित होता है। 2 वर्षों के अंत में मिश्रधन ₹5000 है तथा 3 वर्षों के अंत में यह ₹5200 है जमा की गई राशि तथा ब्याज की दर ज्ञात कीजिए।

हल:

यहाँ $A(1) = 5000, n = 2$ और $A(2) = 5200, n = 3, P = ?, r = ?$

अब, $A = P (1 + r)^n$ है।

अतः, $5000 = P (1 + r)^2 \dots$ समीकरण (i)

और $5200 = P(1+r)^3 \dots$ समीकरण (ii)

(ii) से (i) भाग देने पर,

$$5200/5000 = P(1+r)^3 / P(1+r)^2$$

$$\text{या, } (1+r) = 5200/5000$$

$$\text{या, } r = 5200/5000 - 1 \text{ है।}$$

$$\text{या, } r = 1.04 - 1 = 0.04.$$

अर्थात्, वाँछित ब्याज की दर 4% है।

$$\text{अब समीकरण (i) से } P = 5000 / (1 + 0.04)^2$$

$$\text{या, } P = 5000 / (1.04)^2$$

$$\text{या, } \log P = \log 5000 - 2 \log(1.04)$$

$$= 3.69897 - 2(0.170) = 3.69897 - .340 = 3.35897$$

$$\text{या, } P = \text{antilog}(3.35897)$$

$$= ₹4,623 \text{ (लगभग) है।}$$

उदाहरण 14: विद्या के बचत खातों में इस समय ₹2654.39 की धनराशि है। वार्षिक ब्याज की दर 3% है, जबकि ब्याज प्रति मास संयोजित होता है। दो वर्ष पहले उसके द्वारा जमा कराया गया प्रारंभिक मूलधन ज्ञात कीजिए।

हल:

$$\text{यहाँ, } A = 2654.39, r = 3\%, t = 2, P = ?$$

क्योंकि $i = 3\%/12 = 0.0025$ है तथा $n = 2 \times 12 = 24$ है, इसलिए

$A = P(1+i)^n$ से हम प्राप्त करते हैं:

$$2654.39 = P(1 + 0.0025)^{24}$$

$$\text{या, } 2654.39 = P(1.061757) \text{ (चक्रवृद्धि ब्याज सारणी के उपयोग से)}$$

$$\text{या, } P = 2654.39 / 1.061757$$

$$\text{या, } P = ₹2500$$

10.5 चक्रवृद्धि ब्याज दर की विशिष्ट स्थितियाँ

सतत संयोजन

पिछले अनुच्छेद में, हमने विभिन्न स्थितियों की चर्चा की थी, जहाँ ब्याज मासिक, त्रैमासिक, अर्धवार्षिक संयोजित होता था। परंतु यदि ब्याज प्रति दिन या प्रति घंटे संयोजित हो, तो क्या होगा? जब रूपांतरण अवधि बहुत हो जाती है, तब प्रति वर्ष रूपांतरण (संयोजन) अवधियों की संख्या सतत संयोजन (रूपांतरण) (continuous compounding) की स्थिति कहलाती है। ऐसी स्थितियों में ब्याज को परिकलित करके

मूलधन में प्रत्येक अति सूक्ष्म समय अवधि, जैसे प्रति घंटा या प्रति मिनट के बाद जोड़ा जाता है।

सतत संयोजन के लिए सूत्र

$$A = Pe^{rt}$$

$A = t$ अवधियों के बाद मिश्रधन

P = मूलधन, जो प्रारंभिक धनराशि होती है

r = वार्षिक ब्याज की दर

t = समय काल वर्षों में

बदलती हुई दरों पर संयोजन

हमने उन स्थितियों की चर्चा की है, जब ब्याज की दर संपूर्ण समय अवधि के लिए अचर रहती है। परंतु वास्तविक जीवन में ब्याज दर समय-समय पर बदल भी सकती है। उदाहरणार्थ, रश्मि अपनी एक सहेली को 2 वर्ष के लिए 5% वार्षिक ब्याज की दर पर कुछ धनराशि उधार देती है। उसकी सहेली 2 वर्ष बाद वह धनराशि नहीं चुका पाती है। रश्मि ऋण की अवधि को 2 और वर्षों के लिए बढ़ा देती है, परंतु अब ब्याज की दर 7% वार्षिक है। अतः, अब उसको अंतिम प्राप्त होने वाला मिश्रधन प्रारंभिक मूलधन तथा $(1 + i)^n$ या e^{rt} (प्रत्येक गुणक के लिए i और n या r और t के उचित मानों के साथ) के दो गुणकों के गुणनफल के बराबर होगा।

उदाहरण 15: यदि कोई व्यापारी ₹ 50000 की धनराशि 5% वार्षिक ब्याज की दर पर निवेशित करता है, जब ब्याज सतत रूप से संयोजित होता है, तो परिकलित कीजिए कि 5 वर्षों बाद उसके खाते में कितनी धनराशि होगी।

हल:

यहाँ $P = 50000$, $r = 0.05$, $t = 5$, $A = ?$ है।

क्योंकि $A = Pe^{rt}$ है, इसलिए हम प्राप्त करते हैं:

$$A = 50000 e^{(0.05 \times 5)}$$

$$\text{या, } A = 50000 (1.2840)$$

$$\text{या, } A = ₹64,200.$$

उदाहरण 16: किसी धनराशि पर 3% वार्षिक ब्याज की दर से 8 वर्षों के साधारण और चक्रवृद्धि खातों का अंतर ₹267.70 है। वह मूलधन राशि ज्ञात कीजिए।

हल:

यहाँ, $r = 0.03$, $t = 8$, C.I. – S.I. = ₹267.70 है।

मान लीजिए कि मूलधन 'x' है।

₹ x पर 3% वार्षिक की दर से 8 वर्ष का साधारण ब्याज

$$= x \times 8 \times 0.03 = 0.24x \text{ है।}$$

$$[\text{चक्रवृद्धि ब्याज} = x(1+0.03)^8 - x] = (1.03)^8 x - x = 1.266770x - x$$

प्रश्न के अनुसार $0.266770x - 0.24x = 267.70$ है।

अतः, $0.0266x = 267.70$ है।

$$\text{या, } x = \frac{267.70}{0.02667} \text{ है।}$$

या, ₹10000 है।

उदाहरण 17: वह धनराशि ज्ञात कीजिए, जो 2% वार्षिक चक्रवृद्धि ब्याज की दर से 9 वर्षों में ₹ 16000 हो जाएगी, जबकि ब्याज अर्धवार्षिक संयोजित होता है।

हल:

यहाँ, $A = 16000, t = 9, r = 0.02, P = ?$ है।

अतः, $i = 0.02/2 = 0.01$ और

$$n = 2 \times 9 = 18 \text{ है।}$$

$A = P(1+i)^n$ से हम $16000 = P(1+0.01)^{18}$ प्राप्त करते हैं।

$$\text{या, } P = 16000/(1.01)^{18}$$

$$\text{या, } P = 16000/1.19614748$$

अर्थात् $P = ₹13376.28$ है।

उदाहरण 18: यदि ब्याज 5% वार्षिक की दर से सतत रूप से संयोजित होता है, तो कोई मूलधन कितने समय में स्वयं का दुगुना हो जाएगा ?

हल:

यहाँ $P = P, A = 2P, r = 0.05, t = ?$ है।

क्योंकि $A = Pe^{rt}$ है, इसलिए

$$2P = P e^{0.05t} \text{ है।}$$

$$\text{या, } e^{0.05t} = 2 \text{ है।}$$

$$0.05 t \log e = 2 \text{ है।}$$

$$\text{या, } 0.05 (0.4343)t = 2 \quad (\text{क्योंकि } \log e = 0.4343 \text{ है।})$$

$$\text{या, } t = 2/0.021715$$

$$\text{या, } t = 92.1 \text{ वर्ष} = 14 \text{ वर्ष (लगभग) है।}$$

उदाहरण 19: यदि ब्याज सतत रूप से संयोजित होता है, तो किस वार्षिक ब्याज की दर पर ₹ 3000 का 25 वर्ष में मिश्रधन ₹300000 हो जाएगा ?

हल:

यहाँ $P = 3,000, A = 300000, t = 25, r = ?$ है।

क्योंकि $A = Pe^{rt}$ है, इसलिए हमें प्राप्त है:

$$300000 = 3000 e^{25r} \text{ हमें प्राप्त है।}$$

$$\text{या, } e^{25r} = 300000/3000 = 100$$

$$\text{या, } 25 r \log e = \log 100$$

$$\text{या, } 25 r (0.4343) \log 2 (\log e = 0.4343 \text{ है})$$

या, $r = 2/10.8575$

या, $r = 0.1842044$

या, $r = 18.42\%$ (लगभग) है।

उदाहरण 20: श्री अरविंद ने एक बैंक के बचत खाते में 3 वर्ष के लिए ₹20,000 जमा किए। बैंक पहले वर्ष में 6% वार्षिक की दर से अर्धवार्षिक संयोजित ब्याज देता है, दूसरे वर्ष में 12% वार्षिक की दर से त्रैमासिक संयोजित ब्याज देता है। तथा तीसरे वर्ष में 13% वार्षिक की दर से सतत् संयोजित ब्याज देता है इस बैंक खाते में 3 वर्षों बाद मिश्रधन ज्ञात कीजिए।

हल:

यहाँ, $P = 20000$, $A = ?$ है।

3 वर्षों के बाद मिश्रधन = $20000 (1 + 0.06/2)^2 (1 + 0.12/4)^4 (e^{0.13})$ है।

अतः, $A = 20000 (1.03)^2 (1.03)^4 (e^{0.13})$

या, $A = 20000 (1.03)^6 (e^{0.13})$

या, $A = 20000 (1.19405) (1.13882) (e^x \text{ मान सारणी के उपयोग से})$

या, $A = ₹27196.16$ है।

बोध प्रश्न ख

1. रिक्त स्थानों को भरिए:

- i) दो क्रमागत समय बिंदुओं, जिन पर ब्याज परिकलित किया जाता है, के बीच की समय अवधि कहलाती है। (संयोजन की बारंबारता / संयोजन अवधि)
- ii) जब प्रति वर्ष संयोजन की संख्या में अपरिमित रूप से बड़ी वृद्धि होती है, तब यह स्थिति की होती है। (सतत संयोजन / बदलती हुई दरों पर संयोजन)
- iii) संचित ब्याज पर ब्याज कहलाता है (साधारण ब्याज / चक्रवृद्धि ब्याज)।

2. निम्नलिखित स्थितियों में चक्रवृद्धि मिश्रधन ज्ञात कीजिए:

- i) 10% वार्षिक की दर पर ₹1000 पाँच वर्षों के लिए जमा किए गए।
- ii) 6% वार्षिक की दर पर 4 वर्षों के लिए ₹2000 जमा किए गए, जबकि ब्याज त्रैमासिक संयोजित होता है; तथा
- iii) 5% वार्षिक की दर पर 8 वर्षों के लिए ₹1800 जमा किए गए, जबकि ब्याज अर्धवार्षिक संयोजित होता है।

3. दीपक ने अपने बैंक खाते में 5 वर्षों के लिए 12% वार्षिक साधारण ब्याज की दर पर ₹100 जमा किए। यदि यही राशि इतने ही वर्षों के लिए 10% वार्षिक चक्रवृद्धि ब्याज पर जमा कराई गई होती, तो उसे कितना ब्याज अधिक प्राप्त होता ?

4. कितने समय में ₹1000 की धनराशि ₹5000 हो जाएगी, यदि इस राशि को 7% वार्षिक ब्याज की दर पर निवेश किया जाता है, जबकि ब्याज सतत रूप से संयोजित होता है ?

10.6 सारांश

इस इकाई में, ब्याज की दो मूलभूत संकल्पनाओं साधारण ब्याज और चक्रवृद्धि ब्याज की चर्चा की गई है। एक सहज धारणा कि यह उधार देने वाले को उधार लेने वाले द्वारा किया हुआ भुगतान है, यह प्रेक्षित किया गया है कि प्रारंभिक निवेश तथा भविष्य के समय बिंदु पर संचित हुई राशि का अंतर इस ब्याज की राशि को दर्शाएगा। जहाँ साधारण ब्याज केवल प्रारंभिक मूलधन पर दिया जाता है। (संचित ब्याज पर नहीं), वहीं चक्रवृद्धि ब्याज की स्थिति में यह परिकलन न केवल मूलधन पर होता है, अपितु पिछली अवधियों में हुए संचित ब्याजों पर भी होता है। संयोजन की दो विशिष्ट स्थितियों—सतत संयोजन और बदलती हुई दरों पर संयोजन को स्पष्ट किया गया है।

10.7 शब्दावली

चक्रवृद्धि ब्याज: यह मूलधन तथा साथ ही देय ब्याज पर भी लिया जाता है।

सतत रूप से संयोजित ब्याज: यह मूलधन पर ब्याज है, जो सतत रूप से संयोजित होता रहता है, जिससे हम संयोजन अवधियों की एक अनंत संख्या तक पहुँच जाते हैं।

ब्याज: यह उपयोग की गई धनराशि के लिए एक भुगतान होता है। यह उधार ली गई धनराशि पर दिया जाता है। तथा उधार दी गई धनराशि पर लिया जाता है।

साधारण ब्याज: वह केवल मूलधन पर लिया जाने वाला ब्याज होता है।

धनराशि (मुद्रा) का समय मान: वर्तमान समय में उपलब्ध धनराशि का भविष्य में उपलब्ध इतनी ही धनराशि की तुलना में अधिक मूल्य है।

प्रतीकों की सूची

आपकी अध्ययन सामग्री में विभिन्न सूत्रों को लिखने में प्रयुक्त प्रतीकों का बृहत् रूप से उपयोग किया जाता है। नीचे दी सूची में विभिन्न शब्दों के अंतर्गत प्रथम प्रतीक हैं। अनेक पाठ्य पुस्तकों ने इनसे भिन्न प्रतीक दिए हैं। सामान्यतः अधिकतर रूप से उपयोग जाने वाले प्रतीक भी इस सूची में दिए गए हैं। जब भी आप कोई पुस्तक पढ़ें, तब यह महत्वपूर्ण है कि आप विभिन्न प्रतीकों के अर्थ को स्पष्ट रूप से समझें, जो उस पुस्तक में दिए गए हैं। विभिन्न सूत्रों के लिखने के लिए, आप जिन प्रतीकों के समूह का उपयोग करना चाहें कर सकते हैं। परंतु ऐसा करने से पहले उनके अर्थ को स्पष्ट करना आवश्यक और वाँछनीय है।

t अवधियों के बाद मिश्रधन	A, S, A_n
वार्षिक ब्याज की दर	r, i
ब्याज	I
प्रति संयोजन अवधि ब्याज की दर	i

प्रति वर्ष संयोजन अवधियों की संख्या	k, m
मूलधन जो प्रारंभिक धनराशि होती है	P, A_0
वर्षों में समय काल:	t
संयोजन (रूपांतरण) अवधियों की संख्या	n

10.8 बोध प्रश्नों के उत्तर

(क)

1. उधार देने वाले (साहूकार) की धनराशि के उपयोग करने के लिए शुल्क
2. 4 वर्ष
3. ₹1000, 4% वार्षिक

(ख)

1. (i) संयोजन अवधि (ii) सतत संयोजन (iii) चक्रवृद्धि ब्याज
2. (i) ₹1610.50 (ii) 2537.97 (iii) ₹2672.10
3. ₹162
4. 23 वर्ष (लगभग)

10.9 स्पष्ट प्रश्न/अभ्यास

1. उदाहरणों की सहायता से साधारण और चक्रवृद्धि ब्याजों में अंतर बताइए।
2. सतत संयोजन क्या होता है ? एक उदाहरण की सहायता से स्पष्ट कीजिए।
3. 8 मास के लिए उधार ली गई राशि ₹12000 पर साधारण ब्याज ज्ञात कीजिए। साधारण ब्याज की वार्षिक दर 9% है।
(उत्तर: ₹720)
4. मोनिका ने ₹5000 के एक ऋण पर ₹675 ब्याज का भुगतान किया। ब्याज की दर 9% वार्षिक साधारण ब्याज थी। ऋण का समय काल ज्ञात कीजिए।
(उत्तर: 1.5 वर्ष)
5. यदि ₹700 की धनराशि 15 वर्ष के लिए 7% वार्षिक ब्याज की दर पर उधार दी जाए, तो मिश्रधन और चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात कीजिए, जबकि अर्धवार्षिक संयोजित किया जाता है।
(उत्तर: ₹1964.76 उत्तर ₹1264.75)
6. मोहन अपने बैंक खाते में ₹600 जमा कराता है। वह अपने खाते में ₹900 संचित करना चाहता है। ज्ञात कीजिए कि 8% वार्षिक ब्याज की दर पर, इस राशि को संचित करने में कितना समय लगेगा, जबकि ब्याज त्रैमासिक संयोजित होता है।
(उत्तर: 5.12 वर्ष)

7. यदि तीन वर्षों के लिए निवेश किया जाता है, तो निम्नलिखित में से किस निवेश से अधिकतम मिश्रधन प्राप्त होगा ?

- क) 6% वार्षिक की दर से ₹5000, ब्याज वार्षिक संयोजित;
 ख) 5% वार्षिक की दर से ₹5125, ब्याज वार्षिक संयोजित;
 ग) 6.5% वार्षिक की दर से ₹4950, ब्याज वार्षिक संयोजित;

इसलिए, स्थिति (ग) में अधिकतम मिश्रधन है।)

(उत्तर: (क) ₹5978.09, (ख) ₹5954.40, (ग) ₹5979.35.)

8. यदि ब्याज की वार्षिक दर 14% मासिक संयोजित है, तो एक मूलधन P स्वयं का दुगुना होने में कितना समय लेगा ?

(उत्तर 4.98 वर्ष)

9. कोई बैंक 5% वार्षिक ब्याज सतत संयोजित देता है। 6 वर्षों के लिए ₹ 400 जमा कराए गए हैं। 6 वर्षों के बाद मिश्रधन ज्ञात कीजिए।

(उत्तर: ₹5399.44)

नोट: इन प्रश्नों द्वारा आपको इस इकाई की पठन सामग्री को समझने में सहायता मिलेगी। इन प्रश्नों के उत्तरों को मूल्यांकन के लिए विश्वविद्यालय भेजने की आवश्यकता नहीं है क्योंकि ये केवल आपके अभ्यास एवं पुनरावृत्ति के लिए दिए गए हैं।

10.10 संदर्भ पुस्तकें

- Ayres, Frank Jr. *Theory and Problems of Mathematics of Finance*. Schaum's Outlines Series. McGraw Hill Publishing Co., New York, 1963.
- Mizrahi and Sullivan, John. *Mathematics for Business and Social Sciences*. Wiley and Sons., New Jersey, 1987.
- Singh, J.K., *Business Mathematics*. Himalaya Publishing House., New Delhi, 2010.
- Prasad, Bindra. and Mittal, P.K., *Fundamentals of Business Mathematics*. Har Anand Publications., New Delhi, 2007.

परिशिष्ट : चक्रवृद्धि ब्याज सारणी पर मिश्रधन

n	0.25%	0.50%	0.75%	1.00%	1.25%	1.50%	2.00%
1	1.002500	1.005000	1.007500	1.010000	1.012500	1.015000	1.020000
2	1.005006	1.010025	1.015056	1.020100	1.025156	1.030225	1.040400
3	1.007519	1.015075	1.022669	1.030301	1.037971	1.045678	1.061208
4	1.010038	1.020151	1.030339	1.040604	1.050945	1.061364	1.082432
5	1.012563	1.025251	1.038067	1.051010	1.064082	1.077284	1.104081
6	1.015094	1.030378	1.045852	1.061520	1.077383	1.093443	1.126162
7	1.017632	1.035529	1.053696	1.072135	1.090850	1.109845	1.148686
8	1.020176	1.040707	1.061599	1.082857	1.104486	1.126493	1.171659
9	1.022726	1.045911	1.069561	1.093685	1.118292	1.143390	1.195093
10	1.025283	1.051140	1.077583	1.104622	1.132271	1.160541	1.218994
11	1.027846	1.056396	1.085664	1.115668	1.146424	1.177949	1.243374
12	1.030416	1.061678	1.093807	1.126825	1.160755	1.195618	1.268242
13	1.032992	1.066986	1.102010	1.138093	1.175264	1.213552	1.293607
14	1.035574	1.072321	1.110276	1.149474	1.189955	1.231756	1.319479
15	1.038163	1.077683	1.118603	1.160969	1.204829	1.250232	1.345868
16	1.040759	1.083071	1.126992	1.172579	1.219890	1.268986	1.372786
17	1.043361	1.088487	1.135445	1.184304	1.235138	1.288020	1.400241
18	1.045969	1.093929	1.143960	1.196147	1.250577	1.307341	1.428246
19	1.048584	1.099399	1.152540	1.208109	1.266210	1.326951	1.456811
20	1.051206	1.104896	1.161184	1.220190	1.282037	1.346855	1.485947
21	1.053834	1.110420	1.169893	1.232392	1.298063	1.367058	1.515666
22	1.056468	1.115972	1.178667	1.244716	1.314288	1.387564	1.545980
23	1.059109	1.121552	1.187507	1.257163	1.330717	1.408377	1.576899
24	1.061757	1.127160	1.196414	1.269735	1.347351	1.429503	1.608437
25	1.064411	1.132796	1.205387	1.282432	1.364193	1.450945	1.640606
26	1.067072	1.138460	1.214427	1.295256	1.381245	1.472710	1.673418
27	1.069740	1.144152	1.223535	1.308209	1.398511	1.494800	1.706886
28	1.072414	1.149873	1.232712	1.321291	1.415992	1.517222	1.741024
29	1.075096	1.155622	1.241957	1.334504	1.433692	1.539981	1.775845
30	1.077783	1.161400	1.251272	1.347849	1.451613	1.563080	1.811362
31	1.080478	1.167207	1.260656	1.361327	1.469759	1.586526	1.847589
32	1.083179	1.173043	1.270111	1.374941	1.488131	1.610324	1.884541
33	1.085887	1.178908	1.279637	1.388690	1.506732	1.634479	1.922231

34	1.088602	1.184803	1.289234	1.402577	1.525566	1.658996	1.960676
35	1.091323	1.190727	1.298904	1.416603	1.544636	1.683881	1.999890
36	1.094051	1.196681	1.308645	1.430769	1.563944	1.709140	2.039887
37	1.096787	1.202664	1.318460	1.445076	1.583493	1.734777	2.080685
38	1.099528	1.208677	1.328349	1.459527	1.603287	1.760798	2.122299
39	1.102277	1.214721	1.338311	1.474123	1.623328	1.787210	2.164745
40	1.105033	1.220794	1.348349	1.488864	1.643619	1.814018	2.208040
41	1.107796	1.226898	1.358461	1.503752	1.664165	1.841229	2.252200
42	1.110565	1.233033	1.368650	1.518790	1.684967	1.868847	2.297244
43	1.113341	1.239198	1.378915	1.533978	1.706029	1.896880	2.343189
44	1.116125	1.245394	1.389256	1.549318	1.727354	1.925333	2.390053
45	1.118915	1.251621	1.399676	1.564811	1.748946	1.954213	2.437854
46	1.121712	1.257879	1.410173	1.580459	1.770808	1.983526	2.486611
47	1.124517	1.264168	1.420750	1.596263	1.792943	2.013279	2.536344
48	1.127328	1.270489	1.431405	1.612226	1.815355	2.043478	2.587070
49	1.130146	1.276842	1.442141	1.628348	1.838047	2.074130	2.638812
50	1.132972	1.283226	1.452957	1.644632	1.861022	2.105242	2.691588
51	1.135804	1.289642	1.463854	1.661078	1.884285	2.136821	2.745420
52	1.138644	1.296090	1.474833	1.677689	1.907839	2.168873	2.800328
53	1.141490	1.302571	1.485894	1.694466	1.931687	2.201406	2.856335
54	1.144344	1.309083	1.497038	1.711410	1.955833	2.234428	2.913461
55	1.147205	1.315629	1.508266	1.728525	1.980281	2.267944	2.971731
56	1.150073	1.322207	1.519578	1.745810	2.005034	2.301963	3.031165
57	1.152948	1.328818	1.530975	1.763268	2.030097	2.336493	3.091789
58	1.155830	1.335462	1.542457	1.780901	2.055473	2.371540	3.153624
59	1.158720	1.342139	1.554026	1.798710	2.081167	2.407113	3.216697
60	1.161617	1.348850	1.565681	1.816697	2.107181	2.443220	3.281031
61	1.164521	1.355594	1.577424	1.834864	2.133521	2.479868	3.346651
62	1.167432	1.362372	1.589254	1.853212	2.160190	2.517066	3.413584
63	1.170351	1.369184	1.601174	1.871744	2.187193	2.554822	3.481856
64	1.173277	1.376030	1.613183	1.890462	2.214532	2.593144	3.551493
65	1.176210	1.382910	1.625281	1.909366	2.242214	2.632042	3.622523
66	1.179150	1.389825	1.637471	1.928460	2.270242	2.671522	3.694974
67	1.182098	1.396774	1.649752	1.947745	2.298620	2.711595	3.768873
68	1.185053	1.403758	1.662125	1.967222	2.327353	2.752269	3.844251

69	1.188016	1.410777	1.674591	1.986894	2.356444	2.793553	3.921136
70	1.190986	1.417831	1.687151	2.006763	2.385900	2.835456	3.999558
71	1.193964	1.424920	1.699804	2.026831	2.415724	2.877988	4.079549
72	1.196948	1.432044	1.712553	2.047099	2.445920	2.921158	4.161140
73	1.199941	1.439204	1.725397	2.067570	2.476494	2.964975	4.244363
74	1.202941	1.446401	1.738337	2.088246	2.507450	3.009450	4.329250
75	1.205948	1.453633	1.751375	2.109128	2.538794	3.054592	4.415835
76	1.208963	1.460901	1.764510	2.130220	2.570529	3.100411	4.504152
77	1.211985	1.468205	1.777744	2.151522	2.602660	3.146917	4.594235
78	1.215015	1.475546	1.791077	2.173037	2.635193	3.194120	4.686120
79	1.218053	1.482924	1.804510	2.194768	2.668133	3.242032	4.779842
80	1.221098	1.490339	1.818044	2.216715	2.701485	3.290663	4.875439



ignou
THE PEOPLE'S
UNIVERSITY

n	3.00%	4.00%	5.00%	6.00%	7.00%	8.00%
1	1.030000	1.040000	1.050000	1.060000	1.070000	1.080000
2	1.060900	1.081600	1.102500	1.123600	1.144900	1.166400
3	1.092727	1.124864	1.157625	1.191016	1.225043	1.259712
4	1.125509	1.169859	1.215506	1.262477	1.310796	1.360489
5	1.159274	1.216653	1.276282	1.338226	1.402552	1.469328
6	1.194052	1.265319	1.340096	1.418519	1.500730	1.586874
7	1.229874	1.315932	1.407100	1.503630	1.605781	1.713824
8	1.266770	1.368569	1.477455	1.593848	1.718186	1.850930
9	1.304773	1.423312	1.551328	1.689479	1.838459	1.999005
10	1.343916	1.480244	1.628895	1.790848	1.967151	2.158925
11	1.384234	1.539454	1.710339	1.898299	2.104852	2.331639
12	1.425761	1.601032	1.795856	2.012196	2.252192	2.518170
13	1.468534	1.665074	1.885649	2.132928	2.409845	2.719624
14	1.512590	1.731676	1.979932	2.260904	2.578534	2.937194
15	1.557967	1.800944	2.078928	2.396558	2.759032	3.172169
16	1.604706	1.872981	2.182875	2.540352	2.952164	3.425943
17	1.652848	1.947900	2.292018	2.692773	3.158815	3.700018
18	1.702433	2.025817	2.406619	2.854339	3.379932	3.996019
19	1.753506	2.106849	2.526950	3.025600	3.616528	4.315701
20	1.806111	2.191123	2.653298	3.207135	3.869684	4.660957
21	1.860295	2.278768	2.785963	3.399564	4.140562	5.033834
22	1.916103	2.369919	2.925261	3.603537	4.430402	5.436540
23	1.973587	2.464716	3.071524	3.819750	4.740530	5.871464
24	2.032794	2.563304	3.225100	4.048935	5.072367	6.341181
25	2.093778	2.665836	3.386355	4.291871	5.427433	6.848475
26	2.156591	2.772470	3.555673	4.549383	5.807353	7.396353
27	2.221289	2.883369	3.733456	4.822346	6.213868	7.988061
28	2.287928	2.998703	3.920129	5.111687	6.648838	8.627106
29	2.356566	3.118651	4.116136	5.418388	7.114257	9.317275
30	2.427262	3.243398	4.321942	5.743491	7.612255	10.062657
31	2.500080	3.373133	4.538039	6.088101	8.145113	10.867669
32	2.575083	3.508059	4.764941	6.453387	8.715271	11.737083
33	2.652335	3.648381	5.003189	6.840590	9.325340	12.676050
34	2.731905	3.794316	5.253348	7.251025	9.978114	13.690134
35	2.813862	3.946089	5.516015	7.686087	10.676581	14.785344
36	2.898278	4.103933	5.791816	8.147252	11.423942	15.968172
37	2.985227	4.268090	6.081407	8.636087	12.223618	17.245626
38	3.074783	4.438813	6.385477	9.154252	13.079271	18.625276

व्यावसायिक गणित

39	3.167027	4.616366	6.704751	9.703507	13.994820	20.115298
40	3.262038	4.801021	7.039989	10.285718	14.974458	21.724521
41	3.359899	4.993061	7.391988	10.902861	16.022670	23.462483
42	3.460696	5.192784	7.761588	11.557033	17.144257	25.339482
43	3.564517	5.400495	8.149667	12.250455	18.344355	27.366640
44	3.671452	5.616515	8.557150	12.985482	19.628460	29.555972
45	3.781596	5.841176	8.985008	13.764611	21.002452	31.920449
46	3.895044	6.074823	9.434258	14.590487	22.472623	34.474085
47	4.011895	6.317816	9.905971	15.465917	24.045707	37.232012
48	4.132252	6.570528	10.401270	16.393872	25.728907	40.210573
49	4.256219	6.833349	10.921333	17.377504	27.529930	43.427419
50	4.383906	7.106683	11.467400	18.420154	29.457025	46.901613
51	4.515423	7.390951	12.040770	19.525364	31.519017	50.653742
52	4.650886	7.686589	12.642808	20.696885	33.725348	54.706041
53	4.790412	7.994052	13.274949	21.938698	36.086122	59.082524
54	4.934125	8.313814	13.938696	23.255020	38.612151	63.809126
55	5.082149	8.646367	14.635631	24.650322	41.315001	68.913856
56	5.234613	8.992222	15.367412	26.129341	44.207052	74.426965
57	5.391651	9.351910	16.135783	27.697101	47.301545	80.381122
58	5.553401	9.725987	16.942572	29.358927	50.612653	86.811612
59	5.720003	10.115026	17.789701	31.120463	54.155539	93.756540
60	5.891603	10.519627	18.679186	32.987691	57.946427	101.257064
61	6.068351	10.940413	19.613145	34.966952	62.002677	109.357629
62	6.250402	11.378029	20.593802	37.064969	66.342864	118.106239
63	6.437914	11.833150	21.623493	39.288868	70.986865	127.554738
64	6.631051	12.306476	22.704667	41.646200	75.955945	137.759117
65	6.829983	12.798735	23.839901	44.144972	81.272861	148.779847
66	7.034882	13.310685	25.031896	46.793670	86.961962	160.682234
67	7.245929	13.843112	26.283490	49.601290	93.049299	173.536813
68	7.463307	14.396836	27.597665	52.577368	99.562750	187.419758
69	7.687206	14.972710	28.977548	55.732010	106.532142	202.413339
70	7.917822	15.571618	30.426426	59.075930	113.989392	218.606406
71	8.155357	16.194483	31.947747	62.620486	121.968650	236.094918
72	8.400017	16.842262	33.545134	66.377715	130.506455	254.982512
73	8.652018	17.515953	35.222391	70.360378	139.641907	275.381113
74	8.911578	18.216591	36.983510	74.582001	149.416840	297.411602
75	9.178926	18.945255	38.832686	79.056921	159.876019	321.204530
76	9.454293	19.703065	40.774320	83.800336	171.067341	346.900892
77	9.737922	20.491187	42.813036	88.828356	183.042055	374.652964
78	10.030060	21.310835	44.953688	94.158058	195.854998	404.625201
79	10.330962	22.163268	47.201372	99.807541	209.564848	436.995217
80	10.640891	23.049799	49.561441	105.795993	224.234388	471.954834

Appendix: e^x and e^{-x} value table

x	e^x	e^{-x}
0.00	1.0000	1.0000
0.01	1.0101	0.99005
0.02	1.0202	0.98020
0.03	1.0305	0.97045
0.04	1.0408	0.96079
0.05	1.0513	0.95123
0.06	1.0618	0.94176
0.07	1.0725	0.93239
0.08	1.0833	0.92312
0.09	1.0942	0.91393
0.10	1.1052	0.90484
0.11	1.1163	0.89583
0.12	1.1275	0.88692
0.13	1.1388	0.87810
0.14	1.1503	0.86936
0.15	1.1618	0.86071
0.16	1.1735	0.85214
0.17	1.1853	0.84366
0.18	1.1972	0.83527
0.19	1.2092	0.82696
0.20	1.2214	0.81873
0.21	1.2337	0.81058
0.22	1.2461	0.80252
0.23	1.2586	0.79453
0.24	1.2712	0.78663
0.25	1.2840	0.77880
0.26	1.2969	0.77105

0.27	1.3100	0.76338
0.28	1.3231	0.75578
0.29	1.3364	0.74826
0.30	1.3499	0.74082
0.31	1.3634	0.73345
0.32	1.3771	0.72615
0.33	1.3910	0.71892
0.34	1.4049	0.71177
0.35	1.4191	0.70469
0.36	1.4333	0.69768
0.37	1.4477	0.69073
0.38	1.4623	0.68386
0.39	1.4770	0.67706
0.40	1.4918	0.67032