इकाई 1 आव्यूहों का परिचय

इकाई की रूपरेखा

1.0 उद्देश्य

इस इकाई का अध्ययन करने के बाद, आप निम्नलिखित को समझ पाएँगे:

- आव्यूह की मौलिक संकल्पना;
- आव्यूहों के प्रकार;
- आव्यूह बीजगणित की मूलभूत संक्रियाएँ; तथा
- किसी आव्यूह का परिवर्त

1.1 प्रस्तावना

आव्यूह (matrix; बहुवचन में matrices) संख्याओं को पंक्तियों और स्तभों में रखने की एक व्यवस्था होती है। (i) आँकड़ों के समुच्चयों के लिए एक संक्षिप्त संकेतन तथा (ii) आँकड़ो के समुच्चयों के साथ कार्य करने के लिए प्रभावी विधियों के इसके अभिलक्षणों के कारण, यह उन समस्याओं के हल ज्ञात करने में एक सहायक साधन बन जाता है, जिन्हें रैखिक समीकरण के एक निकाय के रूप में निरूपित किया जा सकता है। यह कहने की आवश्यकता नहीं है कि आव्यूह बीजगणित के अनेक क्षेत्रों जैसे अभियांत्रिकी, अर्थशास्त्र और व्यापार, समाजशास्त्र, सांख्यिकी, भौतिकी, औषधि विज्ञान तथा सूचना

प्रौद्यगिकी में बृहत अनुप्रयोग पाए जाते हैं। इन अनुप्रयोगों की बेहतर समझ के लिए निम्नलिखित उदाहरणों पर विचार कीजिए:समाजशास्त्री एक समूह के ही अंदर प्रभावशीलता के अध्ययन के लिए आव्यूहों का उपयोग करते हैं; जनगणना करने वाले जन्म लेने वालों और उत्तरजीवियों के अध्ययन में इनका उपयोग करते है; उद्योग और व्यापार उत्पादन और बिक्री के लिए ग्राहकों की प्राथमिकताओं के मूल्यांकन जैसे क्षेत्रों में तीव्र और सही निर्णय लेने में आव्यूहों की सहायता लेते हैं। कुछ व्यक्ति रैखिक प्रोग्रामन (Linear Programming) तकनीकों का उपयोग करते हैं; जो लाभ को अधिकतम करने के लिए आँकड़ों के आव्यूह सूत्रणों पर आधारित हैं तथा इससे वह कच्चे माल के उत्पादन या उपलब्धता की योजना बनाते हैं। आव्यूहों का उपयोग व्यापार के स्थान, उत्पादों की मार्किटिंग (खरीद–बिक्री) या वित्तीय संसाधनों की व्यवस्था करने इत्यादि पर निर्णय पर पहुँचने के लिए भी किया जाता है। अर्थशास्त्री आव्यूहों का उपयोग अंतरउद्योग प्रवाहों की जाँच करने के लिए, खेल सिद्धांत का अध्ययन करने के लिए तथा सामाजिक उत्तरदायित्व (हिसाब–किताब) के निकाय की रचना करने में करते हैं।

इसके अतिरिक्त, चिकित्सा संबंधी अध्ययनों में, वैज्ञानिक अस्पतालों और औषधालयों में किसी दवाई का उपयोग करने की सलाह देने से पहले उस दवाई की प्रभावकारिता की सांख्यिकी के रूप में मान्यता दर निर्धारित करने में आँकड़ो का उपयोग आव्यूह रूप में करते हैं। अनेक आई टी कंपनियाँ प्रयोक्ता की सूचना ज्ञान करने, प्रश्नों की जाँच करने तथा डेटाबेसों (databases) के प्रबंधन में आँकड़ों की संरचनाओं के रूप में आव्यूहों का प्रयोग भी करते हैं।

बोध प्रश्न क

1) एक आव्यूह क्या होता है ?

2) उद्योग और व्यापार आव्यूहों का उपयोग क्यों करेंगे ?

3) आँकड़ों का आव्यूह सूत्रण, जो रैखिक प्रोग्रामन में प्रयुक्त किया जाता है, किन उद्देश्यों के लिए उपयोग किया जाता है ?

1.2 आव्यूह

परिभाषा: आव्यूह को पंक्तियों और स्तंभों में व्यवस्थित संख्याओं के एक आयाताकार व्यूह (array) के रूप में परिभाषित किया जाता है, जिसे कोष्ठकों [ ] या ( ) के एक युग्म द्वारा किया गया होता है। उदाहरणार्थ, संख्याओं का निम्नलिखित व्यूह एक आव्यूह दर्शाता है।

$$\begin{bmatrix} 11 & 42 & 22 & 84 \\ 10 & 15 & 60 & 25 \\ 41 & 28 & 45 & 51 \end{bmatrix}$$

किसी आव्यूह में निहित पंक्तियों और स्तभों की संख्या के आधार पर, हम उसकी विमाएँ, अर्थात् उसकी **कोटि (order)** का निर्धारण करते हैं। परिपाटी अनुसार, एक

आव्यूह की कोटि में पंक्तियों को पहले तथा स्तभों को बाद में व्यक्त किया जाता है। क्योंकि उपरोक्त आव्यूह में 3 पंक्तियाँ और 4 स्तंभ हैं; इसलिए हम कहते हैं कि इसकी विमाएँ (या कोटि) 3 × 4 है।

पंक्तियों और स्तभों में प्रकट होने वाली संख्याएँ उस आव्यूह के **अवयव (elements)** कहलाते हैं। उपरोक्त आव्यूह में; प्रथम पंक्ति के प्रथम स्तंभ में अवयव 11 है; प्रथम पंक्ति के दूसरे स्तंभ में अवयव 42 है। ऐसे ही तर्क का अनुसरण करते हुए, हम अन्य अवयवों की पहचान कर सकते हैं।

एक आव्यूह को सामान्यतः अंग्रेजी के बड़े अक्षरों द्वारा तथा उसके अवयवों को संगत छोटे अक्षरों द्वारा, जिनके नीचे पंक्ति और स्तंभ सूचित करने वाली दो संख्याएँ लिखी जाती हैः व्यक्त किया जाता है। उदाहरणार्थ, किसी आव्यूह में a_{23} के रूप में निरूपित एक अवयव को दूसरी पंक्ति और तीसरे स्तंभ में स्थित अवयव के रूप में पढ़ा जाता है। इस प्रकार m पंक्तियों और n स्तंभों वाले एक आव्यूह को निम्नलिखित रूप में लिखा जा सकता हैः

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & . & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & . & a_{3n} \\ . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & . & a_{mn} \end{bmatrix}$$

उपरोक्त आव्यूह को $A = [a_{ij}]_{mxn}$ के रूप में लिखा जा सकता है, जहाँ $i = 1,2,3,...,m$ और $j=1,2,3,.....,n$ है। यह $m \times n$ कोटि का एक आव्यूह प्रदर्शित करता है।

1.2.1 आव्यूहों के प्रकार

हम सामान्यतः अधिकांश रूप से प्रयुक्त किए जाने वाले आव्यूहों की चर्चा करेंगे, जिससे हम इनका व्यापार से संबंधित समस्याओं में उपयोग करने में समर्थ हो सकें। एक बार जब हम आव्यूह के परिवर्त से परिचित हो जाएँगे, तब हम अन्य प्रकार के आव्यूहों को लेंगे।

1) **पंक्ति आव्यूहः** वह आव्यूह जिसकी केवल एक पंक्ति होती है या कोटि $1 \times n$ का आव्यूह **पंक्ति आव्यूह (row matrix)** कहलाता है।

उदाहरण 1:

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2) **स्तंभ आव्यूहः** वह आव्यूह जिसमें कवेल एक स्तंभ होता है या कोटि $m \times 1$ का आव्यूह **स्तंभ आव्यूह (column matrix)** कहलाता है।

उदाहरण 2:

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3) **आयातकार आव्यूहः** एक आव्यूह आयताकार कहा जाता है, यदि उसमें पक्तियों की संख्या स्तंभों की संख्या के बराबर नहीं हो।

उदाहरण 3:

$$\begin{bmatrix} 3 & 7 & 9 \\ 4 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

4) **वर्ग आव्यूहः** वह आव्यूह जिसमें पंक्तियों की संख्या स्तंभों की संख्या के बराबर होती है वर्ग आव्यूह कहलाता है, अर्थात् कोटि $m \times n$ का आव्यूह एक वर्ग आव्यूह होता है, यदि $m = n$ हो।

उदाहरण 4:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -3 \\ -3 & 0 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

5) **विकर्ण आव्यूहः** एक वर्ग आव्यूह जिसमें विकर्ण अवयवों के अतिरिक्त सभी अवयव शून्य हों विकर्ण आव्यूह (diagonal matrix) कहलाता है।

वर्ग आव्यूह $A = [a_{ij}]$एक विकर्ण आव्यूह होता है,यदि सभी $i \neq j$ के लिये $a_{ij} = 0$ हो।

उदाहरण 5:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

6) **अदिष आव्यूहः** एक विकर्ण आव्यूह जिसमें सभी विकर्ण अवयव एक ही हो अदिश आव्यूह (scalar matrix) कहलाता है।

उदाहरण 6:

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

7) **तत्समक आव्यूह (इकाई आव्यूह):** एक अदिश आव्यूह जिसमें सभी विकर्ण अवयव एक के बराबर हो इकाई आव्यूह (unit matrix) या तत्समक आव्यूह (identity matrix) कहलाता है। एक तत्समक आव्यूह को अंग्रजी के बड़े अक्षर I से व्यक्त किया जाता है।

उदाहरण 7:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

8) **त्रिभुजाकार आव्यूहः** एक वर्ग आव्यूह त्रिभुजाकार आव्यूह कहलाता है, यदि मुख्य विकर्ण के ऊपर के सभी अवयव शून्य हों [**निम्न त्रिभुजाकार आव्यूह**

(lower triangular matrix)] या मुख्य विकर्ण के नीचे के सभी अवयव शून्य हों [**उपरि त्रिभुजाकार आव्यूह (upper triangular matrix)]**

उदाहरण 8:

i) निम्न त्रिभुजाकार आव्यूह

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

ii) उपरि त्रिभुजाकार आव्यूह

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

9) **शून्य आव्यूह:** एक वर्ग आव्यूह जिसमें सभी अवयव शून्य हों शून्य आव्यूह (zero या null matrix) कहलाता है। इसे अंग्रेजी के बड़े अक्षर O द्वारा व्यक्त किया जाता है।

उदाहरण 9:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

10) **सममित आव्यूह** : वर्ग आव्यूह $A = [a_{ij}]$एक सममित आव्यूह (symmetric matrix) होता है, यदि सभी i और j के लिए $a_{ij} = a_{ji}$ हो। हम इस इकाई में आव्यूह के परिवर्त (transpose) के बारे में पढ़ने के बाद इस आव्यूह पर पुनः चर्चा करेंगे।

उदाहरण 10:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & -1 \\ 5 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

11) **उप आव्यूह:** एक दिए हुए आव्यूह की कुछ पंक्तियों या कुछ स्तंभों या दोनों को हटा देने के बाद प्राप्त आव्यूह उस दिए हुए आव्यूह का उप आव्यूह (sub matrix) कहलाता है।

उदाहरण 11:

आव्यूह $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$ और $\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$ आव्यूह $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & -1 \\ 5 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ के उप आव्यूह हैं।

बोध प्रश्न ख

1) किसी आव्यूह के विकर्ण अवयव क्या हैं ?

2) निम्नलिखित आव्यूह में अवयव a_{21}, a_{34}, a_{24} और a_{11} ज्ञात कीजिए:

$$\begin{bmatrix} -5 & 12 & 5 & 9 \\ 7 & 6 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 5 \\ 8 & 7 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

इसके विकर्ण अवयव भी ज्ञात कीजिए।

3) x और y ज्ञात कीजिए, यदि

$$\begin{bmatrix} x+y & 2 \\ 1 & x-y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$$ है।

4) निम्नलिखित आव्यूहों का वर्गीकरण कीजिए:

(i) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 5 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} -5 \\ 7 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix}$

(iv) $\begin{bmatrix} 7 & 6 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ (v) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (vi) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

(vii) $\begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$ (viii) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 5 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ (ix) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & -1 \\ 5 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

1.3 आव्यूह बीजगणित

इस अनुच्छेद में, हम आव्यूहों पर मूलभूत संक्रियाओं की चर्चा करेंगे। हम योग और गुणन की संक्रियाओं को लेने से पहले आव्यूह की समानता की धारणा से प्रारंभ करते हैं। आव्यूह बीजगणित में अवयव क्रमित संख्याएँ होते हैं तथा इसीलिए उन पर संक्रियाएँ क्रमित विधि में की जानी होती हैं। इस ओर ध्यान देना उपयोगी होगा कि जब हम योग और गुणन जैसी मुख्य संक्रियाएं कर रहे होते हैं, तब व्यवकलन और विभाजन जैसी अन्य संक्रियाएँ इन्हीं से व्युत्पन्न होती हैं।

1.3.1 आव्यूहों की समानता

दो आव्यूह बराबर (समान) होते हैं यदि निम्नलिखित तीन प्रतिबंध पूरे होते हैं:

i) प्रत्येक आव्यूह में पंक्तियों की संख्या समान हों।

ii) प्रत्येक आव्यूह में स्तंभों की संख्या समान हों ।

iii) प्रत्येक आव्यूह में संगत अवयव बराबर हों।

उपरोक्त प्रतिबंधों से केवल यह वांछित है कि विचाराधीन आव्यूह यथार्थ रूप से एक ही हैं।

उदाहरण 12: नीचे दिए दोनों आव्यूहों पर विचार कीजिए :

$A = \begin{bmatrix} 2 & x \\ y & 3 \end{bmatrix}$ और B $= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

यदि $A = B$ है, तो $x = 3$ और $y = 4$ है क्योंकि समान आव्यूहों के संगत अवयवों को बराबर होना पड़ेगा।

आगे, मान लीजिए कि हमें एक आव्यूह नीचे दिए अनुसार दिया है:

$C = \begin{bmatrix} r & s & t \\ x & y & z \end{bmatrix}$। तब, C न तो A के बराबर है और न ही B के बराबर है, क्योंकि C में तीन स्तंभ हैं। इसके फलस्वरूप, C आव्यूह A या B के बराबर नहीं है।

1.3.2 दो आव्यूहों का जोड़ना और घटाना

- आव्यूहों को तभी और केवल तभी जोड़ा या घटाया जा सकता है, जब वे समान कोटि के हों।
- दो $(m \times n)$ आव्यूहों का योग या अंतर एक अन्य $(m \times n)$ आव्यूह होता है, जिसके अवयव दिए हुए आव्यूहों के संगत अवयवों का योग या अंतर होते हैं।

दो आव्यूहों

$A = [a_{ij}]_{m \times n}$ और $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ के लिए, $A \pm B = C$ है,

जहाँ $C = [c_{ij}]_{m \times n}$ तथा सभी i और j के लिए, $c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$ है।

उदाहरण 13:

$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ और $B = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 5 \\ 5 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ के लिए:

यहाँ

$$A + B \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 3 & 5 \\ 5 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0+7 & 2+3 & 3+5 \\ 2+5 & 1+(-1) & 4+(-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 5 & 8 \\ 7 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

तथा

$$A - B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7 & 3 & 5 \\ 5 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0-7 & 2-3 & 3-5 \\ 2-5 & 1-(-1) & 4-(-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & -1 & -2 \\ -3 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

एक आव्यूह का निषेधन: किसी आव्यूह A के निषेधन (negation) को $-A$ से व्यक्त किया जाता है, जिसे A के सभी अवयवों को उनके निषधनों (ऋणात्मकों) द्वारा प्रतिस्थापित करके प्राप्त किया जाता है।

उदाहरणार्थ, यदि

$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 5 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ है, तो $-A = \begin{bmatrix} -1 & -3 & -5 \\ -5 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ होता है।

अतः, दो आव्यूहों A और B के व्यवकलन (घटाने) को आव्यूह A तथा आव्यूह B के निषेधन के योग के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

$A - B = A + (-B)$

1.3.3 एक अदिश राशि द्वारा आव्यूह का गुणन

यदि किसी आव्यूह को एक अदिश राशि द्वारा गुणा किया जाता है, तो उसके सभी अवयवों को उस राशि से गुणा किया जाता है। यदि आव्यूह $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ को किसी अदिश राशि से गुणा किया जाता है तो $\lambda A = \lambda[a_{ij}]_{m \times n} = [\lambda a]_{ijm \times n}$ होता है।

उदाहरणार्थ, यदि

$A = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 5 \\ 5 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ है, तो $3A = 3\begin{bmatrix} 7 & 3 & 5 \\ 5 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 & 9 & 15 \\ 15 & -3 & -3 \end{bmatrix}$ है।

आव्यूहों के योग के गुण

1. **आव्यूहों का योग क्रमविनिमेय (cummutative) होता है** : यदि A और B एक ही कोटि के दो आव्यूह हैं, तो $A + B = B + A$ होता है।

2. **आव्यूहों का योग साहचर्य (associative) होता है** : यदि A, B और C एक ही कोटि के तीन आव्यूह है, तो $(A + B) + C = A + (B + C)$ होता है।

3. **योज्य तत्समक (additive identity) का अस्तित्व** : यदि A कोई आव्यूह है तथा O आव्यूह A जैसी कोटि का ही शून्य आव्यूह है, तो

   $(A + O) = O + A = A$ होता है।

4. **योज्य प्रतिलोम (additive inverse) का अस्तित्व**: किसी भी आव्यूह A के लिए

   $A + (-A) = (-A) + A = O$ होता है।

निम्नलिखित उदाहरण इन गुणों को स्पष्ट करता है:

मान लिजिए कि

$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 5 & -1 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 6 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 6 & 1 & -7 \\ -2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ और $O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, है। तब,

$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 5 & -1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 6 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 8 \\ 11 & -2 & 1 \end{bmatrix}$;

$B + A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 6 & -1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 5 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 8 \\ 11 & -2 & 1 \end{bmatrix} = A + B$;

$(A + B) + C = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 8 \\ 11 & -2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 1 & -7 \\ -2 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 5 & 1 \\ 9 & -2 & 6 \end{bmatrix}$;

$B + C = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 6 & -1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 1 & -7 \\ -2 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 2 & -4 \\ 4 & -1 & 7 \end{bmatrix}$;

$A + (B+C) = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 5 & -1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 11 & 2 & -4 \\ 4 & -1 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 5 & 1 \\ 9 & -2 & 6 \end{bmatrix} = (A + B) + C$;

$$A + O = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 5 & -1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 5 & -1 & -1 \end{bmatrix} = A$$ तथा

$$A + (-A) = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 5 & -1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -3 & -5 \\ -5 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = O$$ है।

1.3.4 दो आव्यूहों का गुणन

दो आव्यूह गुणन की आवश्यकता को तभी संतुष्ट करते हैं, जब पहले आव्यूह के स्तंभों की संख्या दूसरे आव्यूह की पंक्तियों की संख्या के बराबर हो। यदि आव्यूह A कोटि $m \times n$ का एक आव्यूह है, अर्थात् इसमें m पंक्तियाँ और n स्तंभ हैं, तो आव्यूह B को कोटि $n \times p$ का अवश्य होना चाहिए, जहाँ n पंक्तियों की संख्या है तथा p स्तंभों की संख्या है, जिसका m के बराबर होना आवश्यक नहीं है। तब, गुणनफल AB कोटि $m \times p$ (A की पंक्तियों की संख्या और B के स्तंभों की संख्या) का एक अन्य आव्यूह $C = A \times B$ होता है।

मान लीजिए कि $A = [a_{ij}]_{mxn}$ और $B = [b_{ij}]_{nxp}$ दो आव्यूह हैं। तब, गुणनफल AB, एक अन्य आव्यूह C है, जहाँ

$C = [c_{ij}]_{mxp}$, $c_{ij} = \sum_{k=1}^{k=n} a_{ik} b_{kj}$ है, $i = 1,2,3,....,m$ और $j = 1,2,3,......,p$ के लिये

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{np} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mp} \end{bmatrix},$$

जहाँ

$c_{11} = a_{11} b_{11} + a_{12} b_{21} + \ldots + a_{1m} b_{m1}$

$c_{12} = a_{11} b_{12} + a_{12} b_{22} + \ldots + a_{1m} b_{m2}$

$c_{1p} = a_{11} b_{1p} + a_{12} b_{2p} + \ldots + a_{1m} b_{mp}$

$c_{21} = a_{21} b_{11} + a_{22} b_{21} + \ldots + a_{2m} b_{m1}$

$c_{22} = a_{21} b_{12} + a_{22} b_{22} + \ldots + a_{2m} b_{m2}$

$c_{2p} = a_{21} b_{1p} + a_{22} b_{2p} + \ldots + a_{2m} b_{mp}$

$c_{n1} = a_{n1} b_{11} + a_{n2} b_{21} + \ldots + a_{nm} b_{m1}$

$c_{n2} = a_{n1} b_{12} + a_{n2} b_{22} + \ldots + a_{nm} b_{m2}$

$c_{np} = a_{n1} b_{1p} + a_{n2} b_{2p} + \ldots + a_{nm} b_{mp}.$

टिप्पणी: आव्यूह गुणनफल AB में, आव्यूह A पूर्व –गुणक (pre-factor) तथा आव्यूह B अनु–गुणक (post-factor) कहलाता है।

उदाहरण 14: मान लीजिए कि $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 5 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ और $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ है।

यहाँ आव्यूह A की कोटि 2 x 3 है तथा आव्यूह B की कोटि 3 x 3 है।

अतः, गुणनफल AB परिभाषित है।

AB = $\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{bmatrix}$,

जहाँ c_{11} = (1x0) + (3x5) + 5x(−1) = 0 + 15 − 5 = 10

c_{12} = (1x1) + (3x2) + (5x2) = 1 + 6 + 10 = 17

c_{13} = (1x2) + (3x1) + (5x1) = 2 + 3 + 5 = 10

c_{21} = (5x0) + (−1)x5 + (−1)x(−1) = 0 − 5 + 1 = −4

c_{22} = (5x1) + (−1)x2 + (−1) x 2 = 5 − 2 − 2 = 1

c_{23} = (5x2) + (−1)x1 + (−1)x1 = 10 − 1 − 1 = 8

इस प्रकार, AB = $\begin{bmatrix} 10 & 17 & 10 \\ -4 & 1 & 8 \end{bmatrix}$ है।

अब इन आव्यूहों A और B पर विचार करते हुए देखिए कि क्या गुणनफल BA परिभाषित है। आप पाएँगें कि यह परिभाषित नहीं है। क्यों? क्योंकि B में स्तंभों की संख्या A की पंक्तियों की संख्या के बारबर नहीं है। इससे प्रदर्शित होता है कि आव्यूह गुणन **क्रमविनिमेय** नहीं होता है।

दो आव्यूहों A और B के लिए, यदि AB और BA दोनों परिभाषित हों, तो यह आवश्यक नहीं है कि वे बराबर हों।

उदारणार्थ, यदि A = $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ और B = $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ है, तो

AB = $\begin{bmatrix} 10 & 14 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ और BA = $\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 11 & 5 \end{bmatrix}$ है।

यहाँ $AB \neq BA$ है।

दो आव्युहों A और B के लिए, यदि $AB = O$ है, तो यह आवश्यक नहीं है कि A और B में से कोई शून्य आव्यूह हो।

उदाहरण 15: मान लीजिए कि A = $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ और B = $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ है।

यहाँ AB = $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ = O है परंतु न तो A = O है और न ही B = O है।

आव्यूह गुणन के गुण

1) **साहचर्यता:** आव्यूह गुणन साहचर्य होता है। क्रमशः कोटियो $m \times n, n \times p$ और $p \times q$ के तीन आव्यूहों A, B और C के लिए, $(A\,B)\,C = A(BC)$ होता है।

2) **योग पर वितरण:** आव्यूह गुणन आव्यूह योग पर वितरित होता है। क्रमशः कोटियों $m \times n, n \times p$ और $p \times q$ के तीन आव्यूहों A, B और C के लिए, $A\,(B + C) = AB + AC$ होता है।

3) **तत्समक** : कोटि $m \times n$ के किसी आव्यूह A के लिए, कोटि $n \times n$ का एक तत्समक आव्यूह I_n तथा कोटि $m \times m$ का एक तत्समक आव्यूह ऐसा होता है कि कोटि $n \times n$ के एक वर्ग आव्यूह के लिए, $I_n A = A I_n = A$ होता है।

उदाहरण 16: यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ और $C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, है, तो दर्शाइए कि

i) (AB) C= A (BC)

ii) A (B+C) = AB + AC

iii) AI = IA = A

हल:

i) $AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 11 & -12 \end{bmatrix}$

$(AB)\,C = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 11 & -12 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -11 \\ 11 & -23 \end{bmatrix}$

$BC = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$

$A\,(BC) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -11 \\ 11 & -23 \end{bmatrix}$

अतः, (AB) C= A (BC) है।

ii) $B + C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$

$A\,(B+C) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -5 \\ 14 & -11 \end{bmatrix}$

$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 11 & -12 \end{bmatrix}$

$AC = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

$AB + AC = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 11 & -12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -5 \\ 14 & -11 \end{bmatrix}$

अतः, A (B+C) = AB + AC है।

iii) $I\,A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = A$

$A\,I = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = A$

अतः, AI = IA = A है।

बोध प्रश्न ग

1. निम्नलिखित दोनों आव्यूहों की जाँच कीजिए। बताइए, क्या ये बराबर हैं। अपने उत्तर के समर्थन में कारण दीजिए।

$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$ और $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 5 & 4 & 8 \end{bmatrix}$

2. मान लीजिए कि नीचे दिए दोनों आव्यूह बराबर हैं। x ओर y के मान क्या है ?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} x & 3 \\ 5 & y \end{bmatrix}$$

3. आप कब कहते हैं कि आव्यूह गुणन परिभाषित है ?

4. उदाहरणों की सहायता से आव्यूह गुणन के गुणों को स्पष्ट कीजिए।

5 आप कब कहेगे कि कोई आव्यूह संक्रिया क्रमविनिमेय नहीं है ?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} x & 3 \\ 5 & y \end{bmatrix}$$

6. आप क्यों कहेंगे कि आव्यूह योग साहचर्य है ?

1.4 एक आव्यूह का परिवर्त

प्रारंभिक आव्यूह की पंक्तियों और स्तंभों को परस्पर बदलने से प्राप्त नया आव्यूह उसका परिवर्त (transpose) कहलाता है। मान लीजिए कि हमारे पास कोटि $m \times n$ का एक आव्यूह A =$[a_{ij}]$ है। हम इसकी पंक्तियों और स्तंभो को परस्पर बदलते हैं। इस प्रकार प्राप्त किया गया आव्यूह A का परिवर्त है तथा इसे A^T या A' से व्यक्त किया जाता है । इस प्रकार, यदि

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \text{ है, तो } A' = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 5 & 4 & 8 \end{bmatrix} \text{ है ।}$$

किसी भी आव्यूह A के लिए, A A' और A'A सदैव परिभाषित होते है; इनका बराबर होना आवश्यक नहीं है। ऊपर दिए आव्यूहों के लिए A A' और A'A परिभाषित हैं, परंतु ये बराबर नहीं है, क्योंकि A A'की कोटि 3×3 तथा A A' की 2×2 कोटि है।

एक आव्यूह के परिवर्त के गुण

i) **(A')' = A**

ii) **(kA)' = k A'** , जहाँ k कोई अदिश राशि है।

iii) **(A + B)' = A' + B'**

iv) **I' = I**

v) **(AB)' = B' A'**

उदाहरण 17: मान लीजिए कि $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ और $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ है।

$A' = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ तथा $(A')' = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = A$ है।

$3A = 3\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ है।

$(3A)' = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 9 & 3 \end{bmatrix}$ and $3A'=3\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = (3A)'$ है।

$A + B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

$(A + B)' = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$

$A' = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ और $B' = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ है।

अतः, $A' + B' = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 2 \end{bmatrix} = (A + B)'$ है।

$AB = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 11 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ और $(AB)' = \begin{bmatrix} 12 & 2 \\ 11 & 1 \end{bmatrix}$ है।

$B'A' = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 2 \\ 11 & 1 \end{bmatrix} = (AB)'$ है।

1.4.1 सममित आव्यूह

आव्यूह A सममित आव्यूह कहलाता है, यदि $A' = A$ हो। उदाहरणार्थ,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 5 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 3 \end{bmatrix} \text{ है, तो}$$

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 5 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 3 \end{bmatrix} = A \text{ है, अतः, } A \text{ एक}$$

सममित आव्यूह है।

1.4.2 विषम सममित आव्यूह

आव्यूह A विषम सममित आव्यूह (Skew symmetric matrix) कहलाता है यदि $A' = -A$ हो। उदाहरणार्थ, यदि

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 4 \\ -5 & 0 & -1 \\ -4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ है, तो}$$

$$A' = \begin{bmatrix} 0 & -5 & -4 \\ 5 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 0 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 & 5 & 4 \\ -5 & 0 & -1 \\ -4 & 1 & 0 \end{bmatrix} = -A, \text{ है।}$$

अतः, A एक विषम सममित आव्यूह है।

1.4.3 लाम्बिक आव्यूह

आव्यूह A लाम्बिक आव्यूह (orthogonal matrix) कहलाता है, यदि $AA' = A'A = I$ हो। उदहारणार्थ, यदि

$$A = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \text{ है, तो}$$

$$A' = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix} \text{ है।}$$

अब, $AA' = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$ है।

$$= \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I \text{ है।}$$

इसी प्रकार, सिद्ध किया जा सकता है कि $A'A = I$ है।

बोध प्रश्न घ

1. आप किसी आव्यूह के परिवर्त से क्या समझते हैं ?

2. आपको एक आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & -5 & 9 \end{bmatrix}$ दिया हुआ है। इसका सत्यापन कीजिए कि $[A']' = A$ है।

3. परिवर्त नियम के उपयोग से आप एक लाम्बिक आव्यूह किस प्रकार प्राप्त करते हैं?

1.5 सारांश

इस इकाई में, हमने आव्यूहों का अध्ययन किया है, जो रैखिक समीकरणों के रूप में व्यक्त की जा सकने वाली समस्याओं के अद्वितीय हल ज्ञात करने में सहायक होते हैं। आव्यूह की संकल्पना का परिचय देने तथा आव्यूहों के प्रकारों के बारे में बताने के बाद, मूलभूत संक्रियाओं योग और गुणन को लिया गया है। हम देख चुके हैं कि आव्यूह को पंक्तियों और स्तंभों में व्यवस्थित संख्याओं के एक आयातकार व्यूह के रूप में परिभाषित किया जाता है। आव्यूह पंक्ति और स्तंभ, तत्समक, विकर्ण, शून्य, सममित, आयातकार, त्रिभुजाकार तथा लम्बिक प्रकारों के होते हैं। यह इकाई आव्यूह के परिवर्त पर एक संक्षिप्त चर्चा के साथ समाप्त होती है जो प्रारंभिक आव्यूह की पंक्तियों और स्तंभो को परस्पर बदलने पर एक नया आव्यूह प्राप्त होता है इस भाग में, लाम्बिक और विषम सममित जैसे कुछ विशिष्ट आव्यूहों की चर्चा की गई है।

1.6 शब्दावली

विकर्ण आव्यूहः उपरि बाएँ के निम्न दाएँ की ओर जाने वाले केवल विकर्ण में शून्येतर अवयव।

आव्यूहों की समानताः दो आव्यूह बराबर (समान) होते हैं, यदि प्रत्येक आव्यूह में पंक्तियों की संख्या, स्तंभो की संख्या एक ही हो तथा प्रत्येक में संगत अवयव बराबर भी हो।

तत्समक आव्यूहः एक आव्यूह जिसे प्रायः I के रूप में लिखा जाता है तथा जिसमें मुख्य विकर्ण पर 1 अवयव होता है और अन्य स्थानों पर शून्य (0) होता है।

निम्न त्रिभुजाकार आव्यूहः एक विशेष प्रकार का वर्ग आव्यूह, जिसमें मुख्य विकर्ण के ऊपर की सभी प्रविष्टियाँ शून्य होती हैं।

आव्यूह गुणनः एक सुसंगत संक्रिया, जब पहले आव्यूह में स्तंभो की संख्या दूसरे आव्यूह की पंक्तियों की संख्या के बराबर हो।

आव्यूहः आँकड़ों को एक आयातकार व्यूह में निरूपित करने की विधि।

एक आव्यूह का निषेधनः आव्यूह के अवयवों को उनके निषधनों (ऋणात्मकों) द्वारा प्रतिस्थापित करने पर प्राप्त आव्यूह।

लाम्बिक आव्यूहः आव्यूह A लांबिक आव्यूह कहलाता है, यदि

$$A\,A' = A'\,A = I \text{ हो।}$$

आयातकर आव्यूह : ऐसा आव्यूह जिसमें पंक्तियों की संख्या स्तंभों की संख्या के बराबर नहीं हों।

अदिश आव्यूहः एक ऐसा विकर्ण आव्यूह जिसमें सभी विकर्ण अवयव एक ही हों।

अदिशः एक अकेला अचर, चर या व्यंजक

विषम सममित आव्यूहः आव्यूह A विषम सममित आव्यूह कहलाता है,

यदि $A' = -A$ हो।

वर्ग आव्यूह : एक आव्यूह जिसमें पंक्तियों की संख्या स्तंभों की संख्या के बराबर हो।

उप आव्यूह : एक दिए हुए आव्यूह में से कुछ पंक्तियों या स्तंभों या दोनों के हटाने से प्राप्त आव्यूह दिए हुए आव्यूह का उप आव्यूह कहलाता है।

सममित आव्यूहः एक आव्यूह सममित होता है, यदि वह अपने परिवर्त के बराबर हो।

विमाएँ या कोटिः किसी आव्यूह में पक्तियों की संख्या तथा स्तभों की संख्या।

आव्यूह का परिवर्त : प्रारंभिक आव्यूह की पंक्तियों और स्तंभों को परस्पर बदलने से प्राप्त नया आव्यूह।

उपरि त्रिभुजाकार आव्यूहः एक विशेष प्रकार का वर्ग आव्यूह, जिसमें मुख्य विकर्ण के नीचे की सभी प्रविष्टियाँ शून्य हों।

शून्य आव्यूहः ऐसा आव्यूह जिसके सभी अवयव शून्य हों।

1.7 बोध प्रश्नों के उत्तर

क) 1. आव्यूह पंक्तियों और स्तंभों में संख्याओं को रखने की एक व्यवस्था है।

2. उद्योग और व्यापार में आव्यूह का उपयोग व्यापार के स्थान, उत्पादों की मार्किटिंग या वित्तीय संसाधनों की व्यवस्था से संबंधित विषयों पर निर्णय पर पहुँचने के लिए किया जाता है।

3. कच्चे माल के उत्पादन या उपलब्धता के लिए योजना बनाने के लिए।

ख) 1. **विकर्ण अवयवः** सभी अवयव a_{ij} विकर्ण अवयव कहलाते है; यदि $i=j$ अवयव $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots, a_{nn}$ विकर्ण अवयव हैं। उपरोक्त आव्यूहों में, आव्यूह A में 1, 4 विकर्ण अवयव हैं तथा आव्यूह B में 2, 0, -2 विकर्ण अवयव है और C में 1, 0, विकर्ण अवयव है।

2. $a_{21} = 7$, $a_{34} = 5$, $a_{24} = 1$ और $a_{11} = -5$ है। -5, 6, 0, 2 विकर्ण अवयव हैं

3. x = 5, y = -2

   2 x = 5; y = -2

4. (i) तत्समक आव्यूह (ii) निम्न त्रिभुजाकार आव्यूह (iii) स्तंभ आव्यूह (iv) पंक्ति आव्यूह (v) शून्य आव्यूह (vi) उपरि त्रिभुजाकार आव्यूह (vii) अदिश आव्यूह (viii) 2×3 आव्यूह (ix) 4×3 आव्यूह

ग) 1. ये दोनों आव्यूह बराबर नहीं है, क्योंकि ये एक ही विमांओं के नहीं हैं।

2. $x = 1$ और $y = 4$

3. आव्यूह गुणन AB तभी परिभाषित होता है, जब A में स्तंभो की B संख्या की पंक्तियों की संख्या के बराबर होती है।

4. साहचर्यता, वितरण और तत्समक गुणों को स्पष्ट कीजिए।

5. यह देखने के लिए कि गुणनफल BA परिभाषित है या नहीं, आव्यूहों A और B पर विचार कीजिए। यदि नहीं है, तो यह इस कारण हो सकता है कि B में स्तंभों की संख्या A की पंक्तियों की संख्या के बराबर नहीं है। ऐसा ही परिणाम यह इंगित करता है कि आव्यूह गुणन क्रमविनिमेय नहीं है।

6. क्योंकि (A+B) +C = A= (B+C) है।

घ) 1. प्रारंभिक आव्यूह की पंक्तियों और स्तंभों को परस्पर बदलने से प्राप्त नया आव्यूह उसका परिवर्त कहलाता है।

2. $[A]' = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -5 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}$, प्राप्त कीजिए तथा फिर इसका परिवर्त ज्ञात करके $[\boldsymbol{A}']' = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & -5 & 9 \end{bmatrix}$ प्राप्त कीजिए।

3. एक ऐसा उदाहरण लीजिए ताकि $AA' = A'A = \mathrm{I}$ हो।

1.8 स्वपरख प्रश्न/अभ्यास

1 आपको बताया गया है कि नीच दिए दोनों आव्यूह बराबर हैं। x, y और z के मान क्या है ?

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 6 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 6 & y+4 \\ \frac{z}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

उत्तरः A = B दिया हुआ है। इसलिए इनकी सभी संगत प्रविष्टियाँ बराबर होनी चाहिए। अतः, हमें ज्ञात है कि

$a_{11} = b_{11}$, $a_{1,2} = b_{12}$, $a_{21} = b_{21}$, इत्यादि। इस प्रकार,

$4 = x$, $-2 = y + 4$ और $3 = {}^{z}/_{3}$ है।

आव्यूहो को $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 6 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 6 & y+4 \\ \frac{z}{3} & 1 \end{bmatrix}$, के रूप में पुनः लिखकर

हम $x = 4$, $y = -6$ और $z = 9$ प्राप्त करते हैं।

2. आव्यूह गुणन, क्रमविनिमेय क्यों नहीं है ?

उत्तर: जब हम वर्ग आव्यूहों का उपयोग नहीं करते है, तब हम क्रम बदल कर आव्यूहों का गुणा करने का प्रयास भी नहीं कर सकते, क्योंकि उनकी विमाएँ सुमेलित नहीं हो सकेंगी। परंतु वर्ग आव्यूहों के हाने पर भी क्रमविनिमेय वाली विशषता सदैव नहीं होती। उदाहरणार्थ, 2×2 आव्यूहों A और B की इस स्थिति पर विचार कीजिए:

मान लीजिए

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ और $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$, है।

तब, $AB = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{21} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$ है।

$BA = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{21}b_{12} & a_{12}b_{11} + a_{22}b_{12} \\ a_{11}b_{21} + a_{21}b_{22} & a_{21}b_{21} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$

इस ओर ध्यान दिया जा सकता है कि ये दोनों आव्यूह समान (बराबर) नहीं हैं, जब तक कि हम A और B के लिए मानों पर कुछ प्रतिबंध न लगाएँ। क्योंकि हम पहले आव्यूह की पंक्तियों को लेकर दूसरे आव्यूह के स्तंभों से गुणा करते हैं; इसलिए ऐसी प्रक्रिया से जो क्रम पलट देती है, मानों में परिवर्तन हो जाता हैं।

3. यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 1 \\ -2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 5 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ और $C = \begin{bmatrix} 7 & -6 & 2 \\ 1 & -4 & 11 \end{bmatrix}$,

है, तो मान निकालिए:

(i) A + B

(ii) B – C

(iii) 2A + B – C

उत्तर: (i) $\begin{bmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 3 & -3 & 7 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} -4 & 10 & -2 \\ 4 & 2 & -8 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

4. निम्नलिखित संबंधो से आव्यूहों A और B को ज्ञात कीजिए:

$2A - B = \begin{bmatrix} 6 & -6 & 0 \\ -4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ और $2B + A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & -7 \end{bmatrix}$

उत्तर: $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

5. यदि $A = \begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ और $B = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 7 & 12 \end{bmatrix}$ है, तो ऐसा आव्यूह X ज्ञात कीजिए कि

$3A + 5B + 2X = O$ हो।

उत्तर: $\begin{bmatrix} -16 & -14 \\ -47/2 & -69/2 \end{bmatrix}$

6. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ और $C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ तो दर्शाइए कि

   i) A (B + C) = AB + AC

   ii) (AB)C = A(BC)

7. यदि $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, है, तो ज्ञात कीजिए (A – 2I) (A – 3I).

8. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ है, तो दर्शाइए कि गुणनफल AA' और $A'A$ सममित हैं, परंतु बराबर नहीं हैं।

नोट: इन प्रश्नों द्वारा आपको इस इकाई की पठन सामग्री को समझने में सहायता मिलेगी। इन प्रश्नों के उत्तरों को मूल्यांकन के लिए विश्वविद्यालय भेजने की आवश्यकता नहीं है क्योंकि ये केवल आपके अभ्यास एवं पुनरावृत्ति के लिए दिए गए है।

1.9 संदर्भ पुस्तकें

- Allen, R.G.D., “Mathematical Analysis for Economists”, London: English Language Book Society and Macmillan, 1974.
- Archibald, G.C., Richard G.Lipsey. “An Introduction to a Mathematical Treatment of Economics”, Delhi: All India Traveller Bookseller, 1984
- Chiang, A. and Kalvin Wainwright, “Fundamental Methods of Mathematical Economics” (Paperback), Mac Grow Hill, 2017.
- Dowling, Edward,T. “Schaum’s Outline Series: Theory and Problems of Mathematics for Economists”, New York: McGraw Hill Book Company, 1986.
- K. Sydsaeter and P. Hammond, Mathematics for Economic Analysis, PearsonEducational Asia, Delhi, 2002.
- Wegner, Trevor. (2016). *Applied Business Statistics: Methods and Excel-Based Applications,* Juta Academic. ISBN 9781485111931
- Yamano, Taro, “Mathematics for Economists: An Elementary Survey”,New Delhi: Prentice Hall of India Private Limited, 1970.