इकाई 17

परिक्षेपण-माप और परिवर्तिता

इकाई की रूपरेखा

अध्ययन के उद्देश्य

यह आशा की जाती है कि इकाई 17 पढ़ लेने के बाद आपके लिए संभव होगा:

- आंकड़ों का परिक्षेपण-माप प्राप्त करना;
- शब्द ''परिसर'' के अर्थ की व्याख्या करना और आंकड़ों के परिसर का माप ज्ञात करना;
- आंकड़ों के प्रसरण पर चर्चा करना और उसका मानक विचरण ज्ञात करना; तथा
- आंकड़ों का विचरण-गुणांक ज्ञात करना।

17.1 प्रस्तावना

केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप के अतिरिक्त सामान्यतः आंकड़ों के एक परिक्षेपण-माप की आवश्यकता होती है। परिक्षेपण-माप (या जिसे कभी-कभी परिवर्तनशीलता माप भी कहा जाता है) बंटन के केन्द्र के प्रति मापों के गुच्छन के बारे में बताता है या विलोमतः वह बताता है कि माप कितने परिवर्तनशील है। सेन्डर्स (1955) का कहना था कि औसत मान किस सीमा तक आँकड़ों को प्रदर्शित करते हैं इसे ज्ञात करने के लिए परिक्षेपण का मापन करना आवश्यक होता है। परिक्षेपण का मापन करने का एक अन्य कारण उपस्थित विचरणों को नियंत्रित करने या सुधार लाने के संबंध में फैलाव ज्ञात करना है।

17.2 परिसर (Range)

आंकड़ों के एक वर्ग में उच्चतम माप और न्यूनतम माप के बीच के अंतर को परिसर कहा जाता है। यदि प्रतिदर्श के मापों को परिमाण के बढ़ते क्रम में विन्यासित किया जाए, जैसे कि माध्यिका ज्ञात करनी हो, तो

प्रतिदर्श-परिसर $= X_1 - X_n$ 1

जहां X_1 और X_n श्रेणी के न्यूनतम और उच्चतम मान है।

उदाहरण 1 के लिए कोष्ठक 17.1 देखिए।

कोष्ठक 17.1 उदाहरण 1

एक समुदाय के सदस्यों के पास निम्नलिखित संख्या में पशु हैं. 12,11,13,20,15,18,19,17,22 और 23 परिसर परिकलित कीजिए.

$X_1 = 11, X_n = 23$

प्रतिदर्श परिसर $= 23 - 11 = 12$

परिसर सापेक्षतः परिक्षेपण (dispersion) का एक स्थूल माप होता है क्योंकि इसमें उच्चतम और न्यूनतम माप के अतिरिक्त अन्य किसी माप का कोई महत्व नहीं होता। और, क्योंकि एक प्रतिदर्श में समष्टि के उच्चतम और न्यूनतम दोनों मानों का होना संभव नहीं है और प्रतिदर्श-परिसर प्रायः समष्टि-परिसर को अव-आंकलित करता है, इसलिए यह एक अभिनत (biased) और अदक्ष आकलन (estimater) होता है। फिर भी, कुछ परिस्थितियों में यह उपयोगी सिद्ध होता है जैसे प्रतिदर्श-परिसर को समष्टि-परिसर के एक आकलन के रूप में प्रस्तुत करना। जब कभी परिसर को रिपोर्ट आंकड़े में विनिर्दिष्ट किया गया हो, तो प्रायः यह उत्तम होता है कि एक अन्य परिक्षेपण-माप की भी रिपोर्ट कर दी जाए।

माध्य विचलन (Mean deviation)

यह तो स्पष्ट है कि परसिर से मापों के बंटन के बीच के मापों के बारे में कोई जानकारी प्राप्त नहीं होती। चँकि माध्य केन्द्रीय प्रवृत्ति का एक इतना उपयोगी माप होता है कि प्रायः लोगों द्वारा परिक्षेपण को माध्य-विचलन के रूप में व्यक्त किया जाता है।

माध्य से सभी विचलनों का योगफल ($(\Sigma X_1 - M)$) सदैव ही शून्य होता है। अतः परिक्षेपण के एक माप के रूप में इस प्रकार का संकलन करना समय व्यर्थ करना है। इसके विपरीत, माध्य से विचलन के निरपेक्ष मानों का योगफल माध्य के प्रति परिक्षेपण को व्यक्त करता है। इस योगफल को कुल संख्या से भाग देने पर एक माप प्राप्त होता है जिसे प्रतिदर्श का माध्य विचलन या निरपेक्ष माध्य विचलन कहा जाता है और जो इस प्रकार प्राप्त होता है:

प्रतिदर्श का माध्य विचलन = $(\Sigma| X_1 - M|` / n$ 2

जहां M (प्रतिदर्श) माध्य है, X स्कोर है, n स्कोरों की कुल संख्या है और Σ योगफल है और खड़ी रेखाएं यह प्रकट करती हैं कि मान निरपेक्ष (चिह्न पर विचार किए बिना) है। उदाहरण 2 के लिए कोष्ठक 17.2 देखिए।

कोष्ठक 17.2 उदाहरण 2

एक समुदाय के सदस्यों के पास निम्नलिखित संख्या में पशु हैं: 12,11,13,20,15,18,19,17,22 और 23 माध्य विचलन परिकलित कीजिए.

ΣX_1 = 12 + 11 + 13 + 20 + 15 + 18 + 19 + 17 + 22 + 23 = 170

N = 10

$M = \Sigma X_1 / N; M = 170/10 = 17$

$(\Sigma|X_1\text{-}M$ = (12-17) + (11-17) + (13-17) + (20-17) + (15-17) + (18-17) + (19-17) + (17-17) + (22-17) + (23-17) = 5 + 6 + 4 + 3 + 2 + 1 + 2 + 0 + 5 + 6 = 34

प्रतिदर्श माध्य विचलन= 34 / 10= 3.4

यह तो संभव है कि दो प्रतिदर्श के परिसर समान हों, परन्तु दो प्रतिदर्शों का माध्य विचलन समान नहीं होता। माध्य विचलन की परिभाषा माध्य से न लेकर माध्यिका से लिए गए निरपेक्ष विचलनों के योगफल का प्रयोग करके भी दी जा सकती है।

17.3 प्रसरण (Variance)

माध्य से विचलनों के चिह्न का निराकरण करने की विधि यह है कि विचलनों का वर्ग कर दिया जाए। माध्य से विचलनों के वर्ग के योगफल को वर्गों का योगफल, जिसे संक्षेप में SS कहते हैं वर्गों का योग कहा जाता है और इसकी परिभाषा इस प्रकार दी जाती है।

प्रतिदर्श $SS = \Sigma(X_1 - M)^2$ 3

जहां M (प्रतिदर्श) माध्य है, X_1 स्कोर है, और Σ 'का योगफल' है।

प्रतिदर्श SS से समष्टि SS आकलित किया जा सकता है।

समष्टि $SS = \Sigma(X_1 - \mu)^2$ 4

जहां M (प्रतिदर्श) माध्य है, X_1 स्कोर है, और Σ 'का योगफल' है।

वर्ग के माध्य योगफल को प्रसरण (माध्य वर्ग, जो विचलन माध्य वर्ग का संक्षिप्त रूप है) कहा जाता है और समष्टि के लिए इसे δ से (सिग्मा वर्ग, जहाँ δ छोटा यूनानी अक्षर है) प्रकट किया जाता है।

अवर्गीकृत आंकड़ों का प्रसरण परिकलित करने पर

समष्टि प्रसरण= $\delta^2 = \Sigma(X_1 - \mu)^2 / N$ 5

समष्टि प्रसरण δ^2 का श्रेष्ठतम आकलन प्रतिदर्श प्रसरण S^2 होता है।

प्रतिदर्श प्रसरण= $S^2 = \Sigma(X_1 - M)_2 /(n-1)$ 6

जहां M (प्रतिदर्श) माध्य है, X_1 स्कोर है, n स्कोरों (प्रतिदर्श) की कुल संख्या है और Σ 'का योगफल' है।

ऊपर के समीकरण में μ के स्थान पर M और n के स्थान पर N का प्रतिस्थापन करने पर एक राशि प्राप्त होती है जो δ^2 का एक अभिनत आकलन है। प्रतिदर्श के वर्गों के योगफल को n-1 से (जिसे स्वातंत्र्य कोटि (degree of freedom) कहा जाता है और संक्षेप में DF से प्रकट किया जाता है) से न कि n से भाग देने से एक अनभिनत आकलन (unbiased estimate) प्राप्त होता है। ऊपर दिए गए समीकरण का प्रयोग प्रतिदर्श प्रसरण का परिकलन करने में करना चाहिए। यदि सभी प्रेक्षण समान हों, तब तो कोई परिवर्तनशील नहीं होती और $S^2 = 0$; परिवर्तनशीलता या परिक्षेपण की मात्रा में वृद्धि होने पर S^2 अत्यधिक वृहत् (large) हो जाता है। क्योंकि S^2 योगफल माध्य का वर्ग है, इसलिए यह ऋण राशि नहीं हो सकती।

प्रसरण ठीक उसी प्रकार की सूचना व्यक्त करता है जैसा कि माध्य विचलन करता है, परन्तु इसमें प्रायिकता (probability) और परिकल्पना-परीक्षण के सापेक्ष कुछ ऐसे महत्वपूर्ण गुणधर्म हैं जो इसे स्पष्ट रूप से उत्तम बना देता है। इस तरह, सामाजिक और जैविक सांख्यिकीय विश्लेषण में माध्य विचलन का प्रयोग विरले ही होता है।

प्रसरण की वर्ग-इकाइयां होती हैं। यदि माप ग्राम में दिए हों तो प्रसरण ग्राम वर्ग होगा और यदि माप घन सेंटीमीटर में हों, तो उनका प्रसरण वर्ग घन सेंटीमीटर होगा, जबकि वर्ग इकाइयों का कोई भौतिक निर्वचन नहीं होता।

निम्नलिखित सूत्र से प्रतिदर्श प्रसरण® परिकलित किया जा सकता है–

प्रतिदर्श प्रसरण= $S^2 = [\Sigma(X_1^2) - (\Sigma X_i)^2) /n)]/ (n-1)$ 7

ऊपर वाले सूत्र को प्रायः यंत्र सूत्र कहा जाता है, क्योंकि इसके कुछ अभिकलनात्मक लाभ हैं। वास्तव में, समीकरण 6 की अपेक्षा समीकरण 7 की सहायता से SS परिकलित करने में दो बड़े लाभ होते हैं। पहला लाभ यह है कि इसमें अपेक्षाकृत कम अभिकलनात्मक (computational) चरणों का प्रयोग होता है, जो एक ऐसा तथ्य है जिससे त्रुटि होने का संयोग कम हो जाता है। एक अच्छे डेस्क कैलकुलेटर पर योग की गई राशियां Σx और

ΣX_1 दोनों ही आंकड़ों में केवल एक पास से प्राप्त हो सकते हैं जबकि समीकरण 6 को M का परिकलन करने के लिए आंकड़ों में एक पास की आवश्यकता होती है और विचलनों X-M के वर्गों का योगफल प्राप्त करने और परिकलन करने के लिए कम से कम एक और पास की आवश्यकता होती है। समीकरण 6 का प्रयोग करने पर प्रत्येक X-M के परिकलन में सन्निकट त्रुटि हो सकती है जिससे अभिकलन की परिशुद्धता में कमी आ सकती है परन्तु समीकरण 7 का प्रयोग करने में इससे बचा जा सकता है। उदाहरण 3 के लिए कोष्ठक 17.3 देखिए।

कोष्ठक 17.3: उदाहरण 3

एक समुदाय के सदस्यों के पास निम्नलिखित पशु हैं: 12,11,13,20,15,18,19,17,22 और 23

प्रतिदर्श प्रसरण परिकलित कीजिए.

$\Sigma X_1 = 12 + 11 + 13 + 20 + 15 + 18 + 19 + 17 + 22 + 23 = 170$

n= 10

M= $\Sigma X_1 / n$; M= 170 = 10 = 170

X_1	12	11	13	20	15	18	19	17	22	23	ΣX_1= 170
X_1-M	-5	-6	-4	+3	-2	+1	+2	0	+5	+6	
$(X_1\text{-}M)^2$	25	36	16	9	4	1	4	0	25	36	$(\Sigma X_1\text{-}M)^2$= 156

प्रतिदर्श प्रसरण = $S^2 = \Sigma(X_1\text{-}M)^2/(n\text{-}1) = 156/9 = 17.33$

वैकल्पिक सूत्र (जिसे प्रायः यंत्र सूत्र कहा जाता है)

प्रतिदर्श प्रसरण= $S^2 = [(\Sigma X_1^2) - (\Sigma X_1^2)/n)]/n\text{-}1$

X_1	12	11	13	20	15	18	19	17	22	23	$\Sigma X_1 = 170$
X_1^2	144	121	169	400	225	324	361	289	484	529	$\Sigma X_1^2 = 3046$

प्रतिदर्श प्रसरण= $S^2 = (3046\text{-}[170)^2/10)/9 = 156/9 = 17.33$

वर्गीकृत आंकड़ों के प्रसरण का परिकलन

निम्नलिखित सूत्र को लागू करके वर्गीकृत आंकड़ों का प्रतिदर्श प्रसरण परिकलित किया जा सकता है:

प्रतिदर्श प्रसरण = $S^2 = \Sigma f_1 \ (X_1\text{-}M)^2/n\text{-}1$ 8

जहां M (प्रतिदर्श) माध्य है, f परमाण X_i वाले प्रेक्षणों की बारंबारता है, n (प्रतिदर्श) स्कोर की कुल संख्या है और Σ 'का योगफल' है।

हस्तचल परिकलन जटिल होता है, जबकि माध्य मान में दशमलव के बाद अनेक स्थान हों। सामान्यतः प्रयुक्त होने वाली विधि कल्पित माध्य पर आधारित है। सूत्र नीचे दिया गया है

प्रतिदर्श प्रसरण= $S^2 = \{(\Sigma f_1 * d_1^2/ n - (\Sigma f_1 * d_1 / n)^2 \} * i$ 9

$$d_1 = (X_1\text{-}A)/i.$$

जहां i वर्ग-अंतराल का आमाप है, f परिमाण X_i वाले प्रेक्षण की बारंबारता है, n (प्रतिदर्श) स्कोर की कुल संख्या है और Σ 'का योगफल' है। उदाहरण 4 के लिए कोष्ठक 17.4 देखिए।

कोष्ठक 17.4: उदाहरण 4

विभिन्न घरों के (एकड़ में) खेतों को निम्नलिखित सात वर्गों में वर्गीकृत किया गया है। प्रत्येक संवर्ग में घरों की बारंबारता नीचे दी गई है। खेत के स्वामित्व का प्रसरण ज्ञात कीजिए।

खेत का स्वामित्व (एकड़ में)	बारंबारता (F)	अंतराल का मध्य बिन्दु(x)	$d_1 = (X_1\text{-}A)/i$	$f_1{*}d_1$	d_1^2	$f_1{*}d_1^2$
20-30	18	25	-3	-54	9	172
30-40	19	35	-2	-38	4	76
40-50	12*	45	-1	-12	1	2
50-60	19	कल्पित माध्य(A)	0	0	0	0
60-70	17	65	1	17	1	17
70-80	15	75	2	30	4	60
80-90	10	85	3	30	9	90
	110			-27		417

$\Sigma f_1{*}d_1^2 = 417$ $\Sigma f_1{*}d_1 = 27$ $n = 110$

प्रतिदर्श प्रसरण $= [(\Sigma f_1{*}d_1^2) / n - (\Sigma f_1{*}d_1 / n^2)]{*}\ i$

प्रतिदर्श प्रसरण $= [(417/110) - (-27/110)^2]\ 10 = (3\text{-}79\text{-}.06)/10 = 37.3$

निम्नलिखित समीकरण को (जिसे प्रायः यंत्र सूत्र कहा जाता है) लागू करके भी वर्गीकृत आंकड़ों का प्रसरण परिकलित किया जा सकता है।

प्रतिदर्श प्रसरण $= S^2 = [(\Sigma f_i X_i^2) - (\Sigma f_i X_i)^2 / n)] / (n\text{-}1)$ 10

जहाँ f_i परिमाण X_i वाले प्रेक्षणों की बारंबारता है।

परन्तु वर्गीकरण चाहे कुछ भी हो, डेस्क कैलकुलेटर से प्रत्येक व्यष्टि प्रेक्षण पर समीकरण 7 का प्रयोग काफी तेजी से होता है। उदाहरण 5 के लिए कोष्ठक 17.5 देखिए।

कोष्ठक 17.5: उदाहरण 5

एक समुदाय में ब्राइड की कीमत के संबंध में किए गए अन्वेषण से निम्नलिखित आंकड़े प्राप्त हुए। ब्राइड की कीमत का प्रसरण ज्ञात कीजिए।

ब्राइड की कीमत (हजार में)	बारंबारता (F_i)	अंतराल का मध्य बिन्दु (x_i)	$f_1{*}X_1$	X_1^2	$f_1{*}X_1^2$
10-20	8	15	120	225	1800
20-30	9	25	225	625	5625
30-40	12	35	420	1225	14700
40-50	9	45	405	2025	18225
50-60	7	55	385	3025	21175
60-70	5	65	325	4225	21125
	50		1880		82650

$\Sigma f_i{}^*X_i{}^2 = 82650$ $\Sigma f_i{}^*X_i = 1880$ $(\Sigma f_i{}^*X_i)^2 = (1880)^2 = 3534400$ $n = 50$

प्रतिदर्श प्रसरण $= S^2 = [(\Sigma f_i{}^*X_i{}^2) - (\Sigma f_i{}^*X_i)^2 / n)] / (n-1)$

प्रतिदर्श प्रसरण $= S^2 = (82650-(3534400/50/49=(82650-70688)/49$

$= 11962/49 = 244.12$

सोचें और करें 17.1

पाठ में दिए गए उदाहरणों को ध्यान में रखकर अवर्गीकृत और वर्गीकृत आंकड़ों का प्रसरण परिकलित करने से संबंधित आप अपने उदाहरण दीजिए।

17.4 मानक विचलन (Standard Deviation)

मानक विचलन प्रसरण का धन वर्गमूल होता है; अतः इसकी वही इकाइयां होती हैं जो मूल मापों की होती हैं। निम्नलिखित सूत्र को लागू करके इसका परिकलन किया जा सकता है।

मानक विचलन (s) = v प्रतिदर्श प्रसरण

उदाहरण 5 में आपने प्रतिदर्श प्रसरण= 244.12 प्राप्त किया था। अतः आप यह परिकलित करें कि मानक विचलन(s) = v 244.12= 15.62

इस तरह प्रसरण के परिकलन से संबंधित ऊपर दिए गए विभिन्न उदाहरणों से मानक विचलन का परिकलन करने की क्रियाविधि की व्याख्या हो जाती है।

17.5 विचरण-गुणांक (Coefficient of Variation)

सामाजिक विज्ञान के अनुसंधान कार्य में अनुपात मापक्रम तब उपयोगी होता है जबकि शोधकार को अन्य अभिलक्षण की तुलना में एक अभिलक्षण पर प्रतिदर्श की परिवर्तिता का पता लगाने की इच्छा हो।

विचरण-गुणांक मानक विचलन और माध्य का प्रतिशत अनुपात होता है।

विचरण-गुणांक= मानक विचलन *100 / माध्य

इस स्थिति में यह परिक्षेपण का एक उपयोगी माप होता है जब असमान परिमाण वाले और/या माप के विभिन्न इकाइयों वाले, जैसे ऊँचाई और भार, चरों के बीच परिवर्तिता की तुलना की जा रही हो। उदाहरण 4 में आपने यह देखा है कि माध्य $(M) = AM + (\Sigma f_i{}^*d_n / n)^* i = 55 + (-27 / 110)^*10 = 55-2.45 = 52.55$

और मानक विचलन(s) = v प्रतिदर्श प्रसरण = v 37.3 = 6.107

विचरण-गुणांक= $S\,^*100/M = 6.107/52.55 = 11.62$

सोचें और करें 17.2

अनुचिंतन और क्रिया 17.1 के उदाहरणों का मानक विचलन और विचरण-गुणांक ज्ञात कीजिए।

17.6 निष्कर्ष

इकाई 16 में आंकड़ों की केन्द्रीय प्रवृत्ति के मापने की परिकलन विधि से परिचित हो जाने के बाद इकाई 17 में आपने आँकड़ों के परिक्षेपण के मापन का कौशल अर्जित किया है जो बंटन के केन्द्र के प्रति मापों के गुच्छन का द्योतक है या यह कहा जा सकता है कि यह मापों की परिवर्तिता का द्योतक है।

आप सैन्डर्स (1955:90-91) के इस कथन से अवश्य सहमत होंगे कि परिसर परिकलन करने और समझने का एक सरल माप होता है क्योंकि इसमें केवल एक बार घटाने की क्रिया करनी पड़ती है और यह चरम मानों पर ही विशेष बल देता है। इसके विपरीत निरपेक्ष माध्य विचलन में प्रत्येक प्रेक्षण के विचलन पर समान प्रभाव होता है और इसका परिकलन करना और इसे समझना भी सरल होता है। मानव विचलन के परिकलन में विचलनों के वर्णन में चरम मान पर विशेष बल होता है। मानक विचलन एक अति सामान्य परिक्षेपण माप है। श्रेणी के प्रत्येक प्रेक्षण का मान इस माप के मान को प्रभावित करता है। किसी भी प्रेक्षण के मान में परिवर्तन होने पर मानक विचलन के मान में भी परिवर्तन होता है। सापेक्ष रूप से कुल चरम मान से इस मान को निरूपित किया जा सकता है। एक विवृत्तांग बंटन (open ended distribution) के मानक विचलन का परिकलन संभव नहीं है। अंत में, विलचन गुणांक परिसर के समान ही होता है क्योंकि यह केवल उन दो मानों पर आधारित होता है जो मध्य के पचास प्रतिशत मानों का परिसर होता है। इसका प्रयोग अधिकांशतः विषम आंकड़ों वाले समुच्चय में होता है और इसे एक विवृत्तांग बंटन में अभिकलित किया जा सकता है।

17.7 कुछ उपयोगी पुस्तकें

सैन्डर्स, डोनाल्ड 1955: *स्टैटिस्टिकस,* मैक्ग्राहिल, न्यूयॉर्क

सांख्यिकी शब्दावली का हिंदी अनुवाद

अनभिनत	unbiased
अभिनति	bias
निरपेक्ष मान	absolute value
परिक्षेपण	dispersion
परिवर्तिता	variability
परिसर	range
मानक विचलन	standard deviation
विचरण-गुणांक	coefficient of variation
विवृत्तांग बंटन	open-ended distribution
श्रेष्ठतम आकलन	best estimate
स्वातंत्र्य कोटि	degree of freedom