इकाई 4 संचयविन्यासिकी–एक परिचय

इकाई की रूपरेखा

4.1 प्रस्तावना
उद्देश्य
4.2 गुणन नियम और योग नियम
4.3 क्रमचय
संकेतन
वृत्तीय क्रमचय
वस्तुओं का क्रमचय जिनका भिन्न-भिन्न होना आवश्यक नहीं है
4.4 संचय
C (n, r) का सूत्र
पुनरावृतीय संचय
4.5 द्विपद प्रसार
(n, r) का पास्कल-सूत्र
द्विपद-गुणांकों से संबंधित कुछ सर्वसमिकाएं
4.6 बहुपद प्रसार
बहुपद गुणांकों का संकेत
4.7 संचयविन्यास प्रायिकता के अनुप्रयोग
चिरसम्मत प्रायिकता सिद्धांत के अवयव
प्रायिकता का योग प्रमेय
4.8 सारांश
4.9 हल/उत्तर
4.10 विविध प्रश्नावली
4.11 विविध प्रश्नावली के उत्तर

4.1 प्रस्तावना

संचय विन्यासिकी (combinatorics) में किसी प्रतिरूप (सूचीकरण) के अनुसार वस्तुओं के विन्यासों और इन विन्यासों को करने की विधियों की संख्या के गणन के बारे में अध्ययन किया जाता है। इसमें अधिकांशतः परिमित संख्या में ली गई वस्तुओं और किसी प्रतिरूप (pattern) के अनुसार परिमित संख्या में ली गई विधियों से इन्हें विन्यासित करने के बारे में अध्ययन किया जाता है। कभी-कभी अनंत संख्या में ली गई वस्तुओं और अनंत विधियों से इन्हें विन्यासित करने के बारे में भी विचार करना होता है।

यहाँ हम क्रमचयों (permutations) और संचयों (combinations) से संबंधित कुछ आधारभूत सूत्र दे रहे है। अंत में हमने प्रायिकता सिद्धांत (probability theory) के कुछ अनुप्रयोग भी दिए हैं। गणन समस्याएं किस-किस प्रकार की होती हैं इनसे परिचित होने के लिए यहाँ हम कुछ सरल उदाहरण दे रहे हैं।

उदाहरण क : अंग्रेजी वर्णमाला 26 अक्षर लीजिए। लंबाई 3 वाले शब्दों (आवश्यक नहीं कि ये सार्थक शब्द ही हों) की संख्या ज्ञात कीजिए।

शब्दों की गिनती aaa, aab, aac, ..., zzz के रूप में की जा सकती है। स्पष्ट है कि शब्दों की संख्या $26 \times 26 \times 26$ होगी।

यह परिमित विधियों से विन्यासित की गई परिमित संख्या में ली गई वस्तुओं से संबंधित एक उदाहरण है।

उदाहरण ख : पिछले उदाहरण में परिमित लंबाई वाले सभी संभव शब्दों की संख्या ज्ञात कीजिए। क्योंकि शब्दों की लंबाई परिबद्ध (bounded) नहीं है, इसलिए इससे यह स्पष्ट है कि शब्दों की संख्या अनंत होगी। यह अनंत विधियों से संबंधित एक उदाहरण है।

उदाहरण ग : सभी धन पूर्णांकों का समुच्चय लीजिए। इनमें कितने पूर्णांकों 100 से कम होंगे। स्पष्ट है कि उत्तर 99 होगा। यह परिमित विधियों से विन्यासित अनंत संख्या में ली गई वस्तुओं से संबंधित एक उदाहरण है।

उदाहरण घ : सभी धन पूर्णांकों का समुच्चय लीजिए। इनमें कितनी संख्याएं अभाज्य (prime) हैं?

इसका उत्तर अनंत होगा, क्योंकि अभाज्य संख्याएं अनंत होती हैं।

उदाहरण ड : मान लीजिए एक मेल आर्डर कंपनी छै स्टाइल की स्लैक बेचती है। प्रत्येक स्टाइल 8 लंबाइयों, 6 कमर साइजों और 4 रंगों में उपलब्ध है। कंपनी को भिन्न-भिन्न कितने प्रकार की स्लैकों का स्टॉक रखना होगा?

उत्तर है $6 \times 8 \times 6 \times 4 = 1152$ प्रकार की स्लैक

यहाँ हमारी अभिरुचि परिमित संख्या में ली गई वस्तुओं को परिमित विधियों से विन्यासित करने में है।

उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ लेने के बाद आप

- संचय-विन्यासिकी की विषय-वस्तु को समझ सकेंगे,
- क्रमगुणितों का प्रयोग कर सकेंगे,
- क्रमचयों और संचयों को समझ सकेंगे,
- क्रमचयों का परिकलन कर सकेंगे,
- संचयों का परिकलन कर सकेंगे,
- द्विपदों श्रेणी का प्रसार कर सकेंगे,
- बहुपद श्रेणी का प्रसार कर सकेंगे,
- संचय विन्यास प्रायिकताओं का परिकलन कर सकेंगे।

4.2 गुणन नियम और योग नियम

अब हम **गुणन-नियम (multiplication principle)** और **योग-नियम (addition principle)** नामक दो मूलभूत गणन-नियमों पर चर्चा करेंगे। गुणन-नियम क्रमचयों (permutations) से भी अधिक व्यापक नियम है। इस नियम की व्याख्या हम विभिन्न विधियों से कर सकते हैं। मानलीजिए एक कार्य / प्रक्रिया में उपकार्यों या चरणों का एक अनुक्रम है, जैसे उपकार्य 1 ..., उपकार्य 2 ... उपकार्य k. आप यह भी मान लीजिए कि उपकार्य 1 को n_1 विधियों से किया जा सकता है, उपकार्य 1 कर लेने के बाद उपकार्य 2 को n_2 विधियों से किया जा सकता है और उपकार्य 1 और उपकार्य 2 को कर लेने के बाद उपकार्य 3 को n_3 विधियों से किया जा सकता है, आदि आदि। तब पूरे कार्य को $n_1 . n_2 ..... n_k$ विधियों से किया जा सकता है। आइए हम इन्हें भरने के लिए बक्सों और वस्तुओं वाला एक मॉडल लें। मानलीजिए बक्सों की संख्या m है। और, मानलीजिए पहले बक्स को k(1) विधियों से भरा जा सकता है यह भी मानलीजिए कि पहले बक्स को भरने की प्रत्येक विधि के साथ दूसरे बक्स को k(2) विधियों से भरा जा सकता है। इस तरह, तब दो बक्सों को $k(1) \cdot k(2)$ विधियों से भरा जा सकता है। व्यापक रूप में, प्रथम $(r-1)$ बक्सों को भरने की प्रत्येक विधि के साथ rवें बक्स को $k(r)$ विधियों से भरा जा सकता

है जहाँ $r = 2, 3, ..., m$, तब सभी बक्सों को कुल $k(1) \cdot k(2) \ldots k(m)$ विधियों से भरा जा सकता है।

इस नियम से ऐसी अनेक स्थितियों को सुलझाया जा सकता है। जोकि साधारण क्रमचय से नहीं किया जा सकता। यहां यह सरलता से देखा जा सकता है कि इस नियम की सहायता से ही $p(n, r)$ के सूत्र को व्युत्पन्न किया गया है।

ठीक गुणन-नियम की भांति **योग-नियम** नामक एक अन्य मूलभूत नियम होता है। मानलीजिए एक कार्य में असंयुक्त (परस्पर अपवर्जी) उपकार्यों, मानलीजिए उपकार्य 1, उपकार्य 2, ..., उपकार्य k के संग्रह से लिए गए ठीक एक कार्य को पूरा करना होता है (अर्थात् कार्य को तब पूरा किया जाता है जबकि या तो उपकार्य 1 पूरा किया गया हो, या उपकार्य 2, ..., उपकार्य k पूरा किया गया हो और यह भी मानलीजिए कि उपकार्य i को n_i विधियों से, जहाँ $i = 1, 2, ..., k$, से पूरा किया जा सकता है, अतः कार्य को योगफल $n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ विधियों से पूरा किया जा सकता है। मानलीजिए हम कुछ संचय विन्यासों का गणन करना चाहते हैं। यदि इन विन्यासों के समूहन (grouping) के k वर्ग $C_1, C_2, ..., C_k$ हों जिससे कि इस अर्थ में ये वर्ग परस्पर अपवर्जी (mutually exclusive) और निरशेस (exhaustive) होते हैं कि प्रत्येक विन्यास केवल एक वर्ग के अंतर्गत आता हो, तो विन्यासों की कुल संख्या इन वर्गों से संबंधित विन्यासों की संख्या के योगफल के बराबर होती है।

उदाहरण 1: तीन राजनैतिक दल P_1, P_2 और P_3 हैं। एक विधान सभा में दल P_1 के 4 सदस्य हैं, P_2 के 5 सदस्य हैं और P_3 के 6 सदस्य हैं। मानलीजिए हम एक सरकारी संगठन के अध्यक्ष और उपाध्यक्ष पद दोनों के लिए एक ही दल से दो व्यक्तियों का चयन करना चाहते हैं। इसे कितनी विधियों से किया जा सकता है?

हल : गुणन-नियम लागू करके P_1 से इसे हम $4.3 = 12$ विधियों से कर सकते हैं। P_2 से इसे हम $5.4 = 20$ विधियों से कर सकते हैं और P_3 से इसे हम $6.5 = 30$ विधियों से कर सकते हैं। और, योग-नियम को लागू करके इसे हम $12 + 20 + 30 = 62$ विधियों से कर सकते हैं।

यद्यपि देखने में गुणन-नियम के साथ योग-नियम काफी सरल मालूम पड़ता है, परन्तु इनके साथ अनेक संचय विन्यास गणन किया जा सकता है।

* * *

4.3 क्रमचय

क्रमचय (permutations), वस्तुओं का एक क्रमित विन्यास (ordered arrangement) होता है। अधिक स्पष्ट रूप में, यदि वस्तुओं की संख्या दी गई हो, तो एक बार में k वस्तुओं को लेने पर (जहां k, वस्तुओं की संख्या से अधिक न हो) इनके क्रमचय में एक रेखा में इनमें से k वस्तुओं को विन्यासित करना होता है, और किस क्रम में इन्हें विन्यासित किया गया है उसका यहां काफी महत्व होता है (रैखिक विन्यास)।

उदाहरण 2: a, b, c, d के क्रमचय, जबकि एक बार में दो अक्षर लिए गए हों,
ab, ba, ac, ca, ad, da, bc, cb, bd, db, cd, dc हैं। इनकी संख्या 12 है। ध्यान दीजिए कि ab और ba अलग-अलग माने गए हैं, यद्यपि इनमें समान वस्तुऐं ही हैं।

4.3.1 संकेत

1 से प्रारंभ होने वाले क्रमागत (consecutive) पूर्णांकों का गुणनफल लिखने के लिए हमें एक संकेतन-पद्धति (notation) की आवश्यकता होती है। गुणनफलों $1, 1 \times 2, 1 \times 2 \times 3, 1 \times 2 \times 3 \times 4$ आदि को संहति रहने में क्रमशः $1!, 2!, 3!, 4!$, आदि से लिखा जा सकता है। इन्हें 'एक क्रमागुणित' (factorial), 'दो क्रमगुणित', 'तीन क्रमगुणित', 'चार क्रमगुणित' आदि पढ़ा जाता है।

व्यापक रूप में हम $1 \times 2 \times 3 \times \ldots\ldots \times n$ को $n!$ के रूप में लिखते हैं और इसे प्रत्येक धन (पूर्णांक) n के लिए n क्रमगुणित पढ़ा जाता है।

E1) $15!/12!$ का मान ज्ञात कीजिए।

E2) $(3+4)!$ और $3!+4!$ अभिकलित कीजिए। क्या ये दोनों बराबर है?

E3) यदि m और n धन पूर्णांक हों, तो दिखाइए कि $(m+n)! \geq m!+n!$

E4) $\dfrac{n!}{(n-r)!}$ अभिकलित कीजिए जहां $n=20$ और $r=17$.

E5) यदि एक नाच में n जोड़े हो, तो केवल एक नाच में कितनी विधियों से पुरूषों और महिलाओं की जोड़ी बनायी जा सकती है?

मानलीजिए n और r दो धन पूर्णांक हैं जहां $r \leq n$. तब अलग-अलग n वस्तुओं के क्रमचयों की संख्या को, जबकि एक बार में k वस्तुएं ली गई हों, $P(n, r)$, ${}^nP_r$, P_r^n, ${}_nP_r$ को किसी से भी प्रकट किया जा सकता है। यहां हम संकेत $P(n, r)$ का प्रयोग करेंगे।

$P(n, r)$ का मान क्या होता है? इस प्रश्न का उत्तर प्राप्त करने के लिए एक पंक्ति में रखे गए r बक्स लीजिए। n से कोई एक वस्तु लीजिए और उसे पहले बक्स में रख दीजिए। इस कार्य को n विधियों से किया जा सकता है। तब शेष $(n-1)$ वस्तुओं में से कोई एक वस्तु लीजिए और इस दूसरे बक्स में रख दीजिए। पहले दो बक्सों को $n(n-1)$ विधियों से भरा जा सकता है। इस प्रक्रिया को हम तब तक करते जाते हैं जब तक कि rवां बक्स भर नहीं जाता। इस कार्य को $n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-r+1)$ विधियों से पूरा किया जाता है। इस तरह हमें यह प्राप्त होता है।

$$P(n, r) = n(n-1)(n-2)\ldots.(n-r+1)$$

यदि हम $P(n, r)$ के व्यंजक को देखें तो यह स्पष्ट हो जाता है कि यह $n(n-1)(n-2)\ldots\ldots3.2.1$ में से अंतिम $(n-r)$ पदों $(n-r)(n-r-1)\ldots.3.2.1$ को हटा देने पर प्राप्त होता है। इस तरह, यहां हमने यह सिद्ध किया है कि

$$P(n, r) = n!/(n-r)!$$

अब हम इस कथन को एक प्रमेय के रूप में प्रस्तुत कर रहे हैं।

प्रमेय 1: एक n-समुच्चय से, r-क्रमचयों की संख्या, जहां $0 \leq r \leq n$, यह होती है।

$$P(n, r) = n(n-1)(n-1)\ldots\ldots(n-r+1).$$

$$= \frac{n!}{(n-r)!}$$

विशेष रूप से एक n-समुच्चय, जहां $n \geq 0$, के क्रमचय की संख्या यह होती है

$$P(n, n) = n!$$

उदाहरण 3: $P(6, 4) = 6.5.4.3 = 6!/(6-4)!$

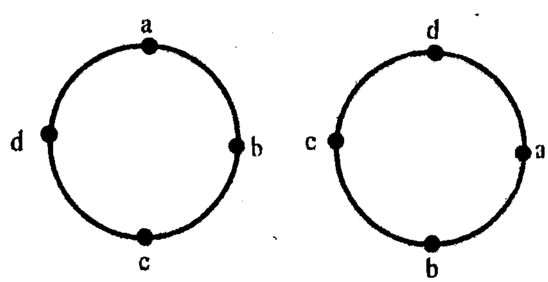
यहां हमने केवल धन पूर्णांकों के क्रमगुणितों को परिभाषित किया है। अतः इस चरण पर 0! या शून्य-क्रमगुणित का कोई अर्थ नहीं है। परन्तु, अब आप $P(n, n)$ लीजिए। स्पष्ट है कि इसका मान $n!$ है। इसके विपरीत, पहले व्युत्पन्न किए गए सूत्र के अनुसार $P(n, n) = \dfrac{n!}{(n-n)!}$. अतः यदि 0! को परिभाषित करना है तो इसका मान केवल 1 ही हो सकता है। अतः इस चरण पर परिभाषा के अनुसार $0! = 1$ लेगें। इस परिभाषा का प्रयोग हम सर्वत्र करेंगे अतः कोई तर्कसंगत कठिनाई उत्पन्न नहीं होगी। विशेष रूप से, $P(n, 0) = 1$ और $P(0, 0) = 1$, यद्यपि इन सर्वसमिकाओं के

समर्थन में गणितीय अनिवार्यता के अतिरिक्त अन्य कोई गंभीर व्याख्या नहीं दी जा सकती है।

विभेद्य (distinguishable) और अविभेद्य (indistinguishable) वस्तुएँ: क्रमचय की संकल्पना को परिभाषित करते समय हमने यह मानलिया था कि वस्तुएँ विभेद्य हैं। इससे क्या अर्थ निकलता है और ऐसा करने की आवश्यकता क्यों हैं, ? यदि a, b, c, d के क्रमचयों वाले उदाहरण में जिसमें एक बार में दो अक्षर लेने हैं, अर्थात् ab, ba, ac, ca, ad, da, bc, cb, bd, db, cd, dc, यह मानलिया जाए कि $d = c = b$, जिसका अर्थ केवल यही है कि हमने तीन वस्तुओं b, c, d के बीच कोई भेद नहीं रखा है। तब 12 क्रमचय बदलकर ab, ba, ab, ba, ab, ba, bb, bb, bb, bb, bb, bb हो जाएंगे। इनमें bb के साथ-साथ क्रमचय ab और ba भी बार-बार आते हैं। क्या इन्हें हम क्रमचय मान सकते हैं? बाद में चलकर हम उन क्रमचयों को भी लेंगें जिनमें इनकी पुनरावृत्ति को स्वीकार किया जा सकता है: परन्तु यहाँ पर हम केवल यही मानकर चलेंगें कि सभी वस्तुएँ विभेद्य हैं और किसी भी क्रमचय में कोई पुनरावृत्त वस्तु नहीं हैं।

4.3.2 वृत्तीय क्रमचय (Circular permutations)

प्रायः वस्तुओं के क्रमचय को वस्तुओं का एक रैखिक विन्यास (linear arrangement) माना जाता है। परन्तु, एक ऐसा परिवर्त (variant) होता हैं जिसमें वस्तुएँ एक वृत्त की परिधि में विन्यासित होती हैं। इसमें हम यह पाते हैं कि वस्तुएँ दक्षिणावर्त विन्यासित होती हैं। परिधि पर कोई विशेष मूल बिन्दु नहीं होता, अतः क्रमचय abcd, bcda, cdab, dabc ठीक एकसमान दिखाई पड़ेगें। (देखिए चित्र 1) यदि हम n वस्तुओं के सभी n! क्रमचयों को लें, तो रैखिक क्रमचय में प्रथम स्थिति पर स्थित वस्तु को अंतिम स्थिति पर बार-बार स्थानांतरित करने के प्रक्रम से अर्थात् विन्यासों को उस स्थिति में समान माना गया हो, जबकि घूर्णन करके एक को दूसरे से प्राप्त किया जा सकता हो $(n - 1)$ और प्राप्त क्रमचयों से प्रत्येक क्रमचय अभेद्य होगा। इस तरह, वृत्तीय क्रमचयों में $n!/n = (n - 1)!$ प्राप्त होगा। इस तरह, हमने यह दर्शाया है कि n वस्तुओं के वृत्तीय क्रमचयों की संख्या, जबकि एक बार में सभी वस्तुओं को लिया गया हो, $(n - 1)!$ होता है।



चित्र 1:

उदाहरण 4: एक गोल मेज के चारों ओर आठ व्यक्तियों को कितनी विधियों से बैठाया जा सकता है?

हल: स्पष्ट है कि यहाँ हमें 8 वस्तुओं के वृत्तीय क्रमचयों की आवश्यकता है। अतः उत्तर $7! = 5040$ होगा।

* * *

उदाहरण 5: पिछलें उदाहरण में यदि 8 व्यक्तियों में कुछ जोड़े (i) अगल-बगल न बैठें (ii) अगल-बगल बैठें, तो उत्तर क्या होगा?

हल: 5040 में से हमें उन स्थितियों की संख्या को घटाना होगा जिनमें व्यक्तियों का जोड़ा एक साथ बैठता है। यदि हम जोड़े को एक इकाई मान लें तो हमें 6! वृत्तीय क्रमचय अर्थात् $(7-1)!$ प्राप्त होगा। परन्तु एक इकाई के रूप में होने पर भी इन्हें दो विधियों से विन्यासित किया जा सकता है। अतः भाग (i) का अभीष्ट उत्तर $7! - 6! - 6! = 3600$ होगा।

* * *

उदाहरण 6: मानलीजिए 5 विवाहित जोड़े हैं और इन्हें (10 लोगों को) एक गोल मेज के चारों ओर इस तरह बैठाना है. कि कोई भी दो पुरूष या कोई भी- दो महिलाएँ एक साथ बैठें (अर्थात् एक पुरूष और एक महिला अगल-बगल बैठें। वृत्तीय विन्यासों की संख्या ज्ञात कीजिए।

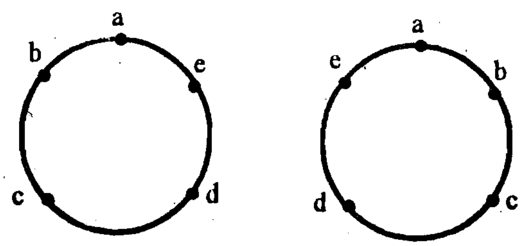
हलः एक गोल मेंज़ के चारों ओर 5 महिलाओं को (5–1) = 4! विधियों से बैठाया जा सकता है। दो महिलाओं के बीच एक पुरूष को बैठाया जा सकता है। ऐसी पांच स्थितियां हैं, अतः 5! विधियों से बैठाया जा सकता है। गुणन-नियम के अनुसार, बैठाने की कुल विधियों की संख्या $4! \times 5! = 2800$ होगी।

* * *

उदाहरण 7: यदि एक गोल मेज के चारों ओर सात लोगों को बैठाना हो, तब उस स्थिति में कितने वृत्तीय विन्यास संभव होगें जबकि किन्हीं भी दो विन्यासों में समान पड़ोसी न हों।

हलः निम्नलिखित दो अलग-अलग विन्यासों को देखने से यह पता चलता है कि प्रत्येक में पड़ोसी समान हैं। अतः वृत्तीय विन्यासों की कुल संख्या

$$= (7-1)! \times \frac{1}{2} = 360$$



चित्र 2:

* * *

उदाहरण 8: यदि 7 पुरूष और 5 महिलाएँ हों तो उस स्थिति में कितने वृत्तीय विन्यास संभव हैं जबकि महिलाएँ एक-दूसरे के अगल-बगल न बैठी हों।

हलः पहले 7 पुरूषों को बैठाया जा सकता है। यह कार्य 6! विधियों से किया जा सकता है। दो पुरूषों के बीच महिलाओं को बैठाया जा सकता है। ऐसे सात स्थान हैं जहाँ इन्हें बैठाया जा सकता है। इन महिलाओं को P(7, 5) विधियों से बैठाया जा सकता है। अतः उत्तर $6! \times P(7, 5)$ होगा।

* * *

उदाहरण 9: 10 और 99 के बीच अलग-अलग अंकों वाली कितनी संख्याऐं होगी?

हलः कोई भी व्यक्ति इसका उत्तर P (10, 2) देना चाहेगा। परन्तु इनमें उन स्थितियों को भी सम्मिलित करना होगा जिनमें 0 प्रथम स्थिति पर होगा। सही उत्तर 9.9=81 होगा। क्योंकि, क्योंकि पहली स्थिति को (0 के अतिरिक्त अन्य किसी अंक से) 9 विधियों से भरा जा सकता हैं, इसलिए पहली स्थिति में भर जाने के बाद दूसरी स्थिति का (प्रथम स्थिति वाले अंक को छोड़कर 9 अंकों में से किसी भी अंक से (जिसमें 0 भी हो सकता है) भरा जा सकता है।

अब आप नीचे दिए गए प्रश्न हल कीजिए।

E6 ऐसे कितने लाइसेन्स प्लेट बनाए जा सकते हैं, जबकि प्रत्येक प्लेट में 3 अक्षर हों और कोई भी अक्षर दो बार न आया हो? यदि अक्षर दोबारा आए हों, तो उत्तर क्या होगा?

E7) 100 और 999 के बीच अलग-अलग सम अंकों (even digits) वाले कितने पूर्णांक होंगें?

E8) 100 और 999 के बीच अलग-अलग अंकों वाली सभी संख्याएँ लीजिए। इनमें से कितनी संख्याएँ विषम संख्याएँ होंगी?

E9) सत्यापित कीजिए कि

$P(15, 2) = P(7, 3)$ और $P(5, 5) = P(6, 3)$.

E10) 650000 से बड़े ऐसे पांच अंकों वाले पूर्णांक कितने होंगे जिनमें निम्नलिखित दो गुणधर्म हों, (i) संख्या के अंक अलग-अलग हैं (ii) संख्या में अंक 0 और 1 न हों?

4.3.3 वस्तुओं का क्रमचय जिनका भिन्न-भिन्न होना आवश्यक नहीं है

हमने यह दिखाया है कि अलग-अलग n वस्तुओं से r वस्तुओं का चयन करने और उन्हें एक रैखिक क्रम में रखने का काम $P(n, r)$ विधियों से किया जा सकता है। इस भाग में भी हम उसी समस्या पर विचार करेंगे यहाँ प्रतिबंध केवल यही होगा कि इस संग्रह की कुछ वस्तुएँ अविभेद्य (indistinguishable) हो सकती हैं अर्थात् संग्रहों a, b, π, b, b, π, a जैसी पुनरावृत वस्तुओं वाले वस्तु संग्रह के विन्यासों पर चर्चा करेंगे। मानलीजिए n वस्तुएँ हैं जिनमें m_1 वस्तुएँ संवर्ग 1 की हैं, m_2 वस्तुएँ संवर्ग 2 की हैं, आदि आदि और m_k वस्तुएँ संवर्ग k की हैं और संवर्ग परस्पर अपवर्जी और निश्शेष (exhaustive) हैं जिससे कि $m_1 + m_2 + \cdots + m_k = n$. तब इन वस्तुओं के अलग अलग क्रमचयों की संख्या $\frac{n!}{m_1 ! m_2 ! \ldots m_k !}$. ऐसा होने का कारण यह है कि उस स्थिति में किसी क्रमचय पर कोई प्रभाव नहीं पड़ता जबकि संवर्ग 1 की वस्तुओं की स्वयं में $m_1 !$ विधियों से क्रमचयित किया गया हो, संवर्ग 2 की वस्तुओं को स्वयं में $m_2 !$ विधियों से क्रमचयित किया गया हो, ..., संवर्ग k की वस्तुओं को स्वयं में $m_k !$ विधियों से क्रमचयित किया गया हो। अधिक परिशुद्ध रूप में इस संबंध में हमें निम्नलिखित प्रमेय प्राप्त होता है:

प्रमेय 2: यदि अलग-अलग k प्रकारों में वर्गीकृत n वस्तुएँ हों, जिनमें पहले प्रकार की m_1 अभिन्न वस्तुएँ हैं, दूसरे प्रकार की m_2 अभिन्न वस्तुएँ हैं, ... k वें प्रकार की m_k अभिन्न वस्तुएँ हैं, जहाँ $m_1 + m_2 + \cdots + m_k = n$ तब इन n वस्तुओं के विन्यासों की संख्या $\frac{n!}{m_1 ! \, m_2 ! \ldots m_k !}$ होती है जिसे $P(n ; m_1, m_2, \cdots, m_k)$ से प्रकट किया जाता है।

उपपत्तिः मान लीजिए इस प्रकार के क्रमचयों की संख्या x है। यदि संवर्ग i की वस्तुओं को अलग-अलग माना जाए, तब इन्हें स्वयं में $m_i !$ विधियों से विन्यासित किया जा सकता है जहाँ $i = 1, 2, \ldots, k$. गुणन-नियम लागू करने पर अलग-अलग n वस्तुओं के क्रमचय की कुल संख्या, जबकि एक बार में सभी वस्तुओं को लिया गया हो $x \, m_1 ! \, m_2 ! \cdots m_k !$ होती है। परन्तु, परिशुद्ध रूप में यह संख्या n! हैं जबकि अलग-अलग n वस्तुएँ हों अतः $x \, m_1 ! \, m_2 ! \cdots m_k ! = n !$ अर्थात् $x = n ! / m_1 ! \, m_2 ! \ldots m_k !$

उदाहरण 9: शब्द CHARIVARI के सभी अक्षरों से 9-अक्षर वाले कितने शब्द (जिनका सार्थक होना आवश्यक नहीं है) बनाए जा सकते हैं?

हलः शब्द CHARIVARI में अक्षरों C,H,V का प्रयोग केवल एक बार हुआ है और अक्षर A, R, I में से प्रत्येक अक्षर का प्रयोग दो बार हुआ है। अतः हम इनसे 9!/ 1! 1! 1! 2! 2! 2! = 45360 शब्द बना सकते हैं।

* * *

E11) शब्दों (क) ASSESSES (ख) PATTIVEERANPATTI के अक्षरों के कितने क्रमचय में होंगे, जबकि एक बार में शब्दों के सभी अक्षर को लिया गया हो ?

4.4 संचय

क्रमचय का संबंध वस्तुओं के क्रमित विन्यास से होता है। परन्तु संचय (combination) का संबंध विभेद्य वस्तुओं के भंडार से नियत संख्या में वस्तुओं के चयन से होता है। मानलीजिए n अलग-अलग वस्तुऐं हैं और इनसे हम r वस्तुओं का, जहाँ $r \le n$ चयन करना चाहते हैं और इसमें चयन क्रम पर ध्यान नहीं देना होता। इसे उस स्थिति में n वस्तुओं का संचय कहा जाता है जबकि एक बार में r वस्तुऐं ली गई हैं। इसे करने की विधियों की संख्या को $nC_r, {}^nC_r, C_r^n, \binom{n}{r}$ और C(n, r) में से किसी से भी निरूपित किया जाता है। यहाँ हम टाइप करने की सुविधा को देखते हुए और साथ ही क्रमचय के संकेत P(n, r) की अनुरूपता को देखते हुए संकेत C (n, r) का प्रयोग करेंगें। यहाँ इस बात को ध्यान में रखकर कि इसका संबंध केवल 'चयन' से है और क्रम से नहीं है, हम C(n, r) को 'n चयन r' के रूप में पढ़ सकते हैं। क्रमचयों और संचयों के संबंध में एक सबसे बड़ी कठिनाई यह आती है कि किस विशेष स्थिति में इनमें से किसका प्रयोग किया जाए। इसके लिए तर्क संगत रूप में विचार करना होता है। केवल अभ्यास से ही इनके अंतर को समझा जा सकता है। समुच्चय सिद्धांत के अनुसार C(n, r) n अवयवों वाले समुच्चय से लिए गए साइज r वाले उपसमुच्चयों की संख्या है। इस दृष्टि से यह स्पष्ट है कि प्रत्येक धन पूर्णांक n के लिए C(n, n), 1 होता है।

4.4.1 C (n, r) का सूत्र

आइए, हम P(n, r) और C(n, r) के बीच एक संबंध स्थापित करें। यदि n अलग-अलग वस्तुऐं हों, तो C(n, r), क्रम की ओर ध्यान दिए बिना इससे r चयन करने की विधियों की संख्या का गणन करता है। इन चयनों में से कोई भी चयन r वस्तुओं का एक समुच्चय होता है। इस प्रकार के समुच्चय को r! विधियों से क्रमित किया जा सकता है। इस तरह, प्रत्येक संचय के संगत r! क्रमचय होते हैं। अतः गुणन-नियम से हमें यह प्राप्त होता है

$$P(n, r) = r!\, C(n, r) \quad \text{या} \quad C(n, r) = P(n, r)/r! = \frac{P(n, r)}{P(r, r)} = \frac{n!}{(n-r)!\, r!}$$

इस तरह हमने इसे सिद्ध कर दिया है।

प्रमेय 3: एक n-समुच्चय से r-संचय की संख्या, जहाँ $0 \le r \le n$. यह होती हैं

$$C(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!\, r!}$$

प्रमेय 4: $C(n, r) = C(n, n-r)$

उपपत्तिः n वस्तुओं से किए गए r वस्तुओं के प्रत्येक चयन के संगत अद्वितीय रूप से n वस्तुओं से किए गए $n-r$ वस्तुओं का एक चयन होता है जिसमें बची हुई वस्तुऐं होती हैं। इस एकैकी संगति (one-to-one correspondence) से यह पता चलता है कि इनकी संख्याऐं समान होंगी। इस तरह प्रमेय सिद्ध हो जाता है। इस प्रमेय की एक अन्य उपपत्ति में यह देखना होता है कि यदि r के स्थान पर $n-r$ किया जाए, तब भी C(n, r) के सूत्र में कोई अंतर नहीं आता।

यद्यपि हमें क्रमगुणितों के रूप में C(n, r) का सूत्र प्राप्त है, फिर भी व्यवहार में हम निम्नलिखित स्पष्ट सर्वसमिका का प्रयोग करते हैं।

$$C(n, r) = \frac{n(n-1)\cdots r \text{ गुणनखंड}}{r(r-1)\cdots r \text{ गुणनखंड}}$$

ऊपर के व्यंजक में हर और अंश दोनों में ही r गुणनखंड है। अतः यदि r, $(n-r)$ से कम हो, तो हम इसी रूप में सूत्र का प्रयोग करते हैं। इसके विपरीत, यदि r, $(n-r)$ से बड़ा हो, तो हम अंश और हर दोनों में उपस्थित $n-r$ गुणन खंडों वाले व्यंजक का प्रयोग करते हैं।

उदाहरण 10: $C(10,3)=\frac{10.9.8}{3.2.1}$, परन्तु $C(10,8)=\frac{10.9}{2.1}$

* * *

संख्याओं C(n, r) को द्विपद गुणांक (binomial coefficient) भी कहा जाता है। क्योंकि ये x के आरोही घातों (ascending powers) में $(1+x)^n$ के प्रसार में x^r के गुणांकों के रूप में होते हैं। इन प्रसारों पर चर्चा हम बाद में करेंगें यहाँ हम इससे संबंधित कुछ संख्यात्मक उदाहरण दे रहे हैं।

उदाहरण 11: C(6, 2), C(7, 4) और C(9, 3) के मान ज्ञात कीजिए।

हल: $C(6,2)=\frac{6.5}{2.1}=15$. $C(7,4)=\frac{7.6.5}{3.2.1}=35.$

यहाँ हमने इस तथ्य का प्रयोग किया है कि C (7, 4)= C (7, 3)

$C(9.3)=\frac{9.8.7}{3.2.1}=84.$

* * *

इस चरण पर, सरलता से प्राप्त किए जाने वाले कुछ मान यहाँ दिए जा रहे हैं।

$C(n,n)=C(n,0)=P(n,0)=1$.

$C(n,1)=C(n,n-1)=P(n,1)=n$.

4.4.2 पुनरावृत्तीय संचय (Combinations with repitition)

आइए हम इस संबंध में निम्नलिखित उदाहरण लें। मानलीजिए पांच मित्र हैं जो मिठाई की दुकान पर रुकते हैं और उनमें से प्रत्येक व्यक्ति निम्नलिखित खाने की वस्तुओं में से एक वस्तु लेता है: समोसा, टिक्की और बड़ा। अलग-अलग कितनी खरीददारी संभव है? मानलीजिए s, t और v क्रमशः समोसा, टिक्की और बड़ा को निरूपित करते हैं। नीचे की सारणी में हमने पहले स्तंभ में कुछ संभव खरीदारी की सूची दी है और दूसरे स्तंभ में हमने प्रत्येक खरीददारी का एक अन्य निरूपण दर्शाया है।

1.	s	s	t	t	t	x	x	|	x	x	x	|
2.	s	s	s	s	s	x	x	x	x	x	|	|
3.	v	v	v	t	t	|	x	x	|	x	x	x
4.	v	v	t	t	s	x	|	x	x	|	x	x

यहाँ पहले दंड की बायीं ओर का प्रत्येक x एक s को निरूपित करता हैं, पहले दंड और दूसरे दंड के बीच का प्रत्येक x एक t को निरूपित करता है, दूसरे दंड की दायीं ओर का प्रत्येक x एक v को निरूपित करता हैं। किसी भी क्रम में पांच x और दो । होंगे। विलोमतः पांच x और दो । वाला अनुक्रम एक क्रम को निरूपित करता है। इससे वस्तुओं के दो संग्रहों के बीच एक संगति स्थापित हो जाती है, जहाँ हम यह जानते हैं कि एक संग्रह में संख्याओं की गिनती किस प्रकार की जाती है। परन्तु पांच x और दो । के अनुक्रम की संख्या, । के अनुक्रम में दो स्थितियों की संख्या होती है। अतः उत्तर C (7,2) या $C(7.5)=\frac{7!}{5!2!}$ होगा।

यदि पुनरावृत्ति की अनुमति हो, तो n अलग-अलग वस्तुओं के संबंध में इन वस्तुओं से साइज r वाले विन्यास को n^r विधियों से प्राप्त किया जा सकता है, जहाँ $r \geq 0$ एक पूर्णांक है। आइए अब हम संचय की एक तुलनीय समस्या पर चर्चा करें। जब हम पुनरावृत्ति के साथ n अलग-अलग वस्तुओं से r वस्तुओं का चयन करना चाहते हैं, तब हम एक प्रकार के (मानलीजिए x) r के सभी विन्यासों पर विचार कर रहे होते हैं और दूसरे प्रकार के (मानलीजिए 1) के **(n – 1)** जैसे

$(n-1)$। की आवश्यकता n प्रकारों को अलग करने के लिए होती है और उनकी संख्या $\frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!} = C(n+r-1, r)$ होती है जैसा कि नीचे दिखाया गया है।

प्रमेय 5: मानलीजिए n और r प्राकृतिक संख्याएँ हैं। तब समीकरण $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = r$ के प्राकृतिक संख्याओं में हलों की संख्या या तुल्यतः पुनरावृत्ति की अनुमति के साथ n वस्तुओं के संग्रह से r वस्तुओं के चयन करने की विधियों की संख्या $C(n+r-1, r)$ होती है।

उपपत्ति : लंबाई $n + r - 1$ वाली सभी रज्जुओं (strips) का समुच्चय लीजिए जिसमें ठीक r तारे और $n - 1$ दंड हों। इस समुच्चय की गणन-संख्या (cardinality) $C(n + r - 1, r)$ है। अब हम यह दिखाएंगे कि किस प्रकार इस प्रकार की रज्जुऐं समीकरण $x_1 + \cdots + x_n = r$ के हल के संगत होती हैं। तब रज्जु के $n - 1$ दंड रज्जु को तारों की n उपरज्जुओं में विभाजित करते हैं। इन n उपरज्जुओं में तारों की संख्या x_n के माध्यम से x_1 के मान होती हैं। क्योंकि कुल तारे r हैं, इसलिए योगफल r होगा। रज्जुओं और हलों के बीच एकैकी संगति है और इस तरह प्रमेय सिद्ध हो जाता है।

उदाहरण 12: एक लड़का कुछ पालतू पक्षी खरीदना चाहता है। पक्षी की दुकान में तोते, बुलबुल और मैना बिकती हैं। यदि लड़का छैः पक्षियों को घर ले जाना चाहता है, तो भिन्न-भिन्न कितने चयन संभव हैं।

हलः यहाँ $r = 6, n = 3$ अतः पालतू पक्षियों के संभव चयन की संख्या
$= C(6+3-1, 6) = C(8, 6) = \frac{8 \times 7}{2} = 28$

वस्तुतः यहाँ हम छैः x और दो दंडों वाले 8 प्रतीकों के सभी विन्यासों का गणन कर रहे होते हैं।

* * *

उदाहरण 13: समीकरण

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$, जहाँ $x_i \geq 0$ और समी $1 \leq i \leq 4$ के सभी पूर्णांक हल ज्ञात कीजिए।

हलः इस समीकरण का हल पुनरावृत्ति के साथ साइज 4 के संग्रह से साइज़ 7 के चयन के संगत है। अतः $C(4+7-1, 7) = 120$ हल होंगे। $(n = 4, r = 7)$

* * *

हम इस भाग को निम्नलिखित टिप्पणी देकर समाप्त कर रहे हैं। आइए हम निम्नलिखित की तुल्यता को पहचानेः

(क) समीकरण $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = r, x_i \geq 0, 1 \leq i \leq n.$ के पूर्णांक हलों की संख्या।

(ख) पुनरावृत्ति के साथ साइज n के संग्रह से साइज r के चयनों की संख्या।

(ग) r अभिन्न वस्तुओं की विधियों की संख्या को n अलग-अलग पात्रों में वितरित किया जा सकता है। (देखिए इकाई 5)।

4.5 द्विपद प्रसार

दो अलग-अलग प्रतीकों के योगफल, जैसे $a + b$, $p + q$, $x + y$ आदि, को द्विपद (binomial) कहा जाता है और द्विपद प्रसार (binomial expansion) यह मानकर कि प्रतीक वास्तविक संख्याओं (real numbers) या सम्मिश्र संख्याओं (complex numbers) को निरूपित करते हैं, इस प्रकार के द्विपद का धन पूर्णांक घात का प्रसार होता है। प्रारंभिक गुणन से निम्नलिखित प्रसार तुरंत प्राप्त हो जाते हैं

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$

$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10\,a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

उदाहरण 14: आइए हम अंतिम सर्वसमिका लें। दक्षिण पक्ष में छैः पद $a^5, 5a^4 b, 10a^3 b^2, 10a^2 b^3, 5ab^4$ और b^5 हैं। यहाँ हमारा उद्देश्य गुणांकों 1, 5, 10, 10, 5, 1 की सार्थकता की व्याख्या करना है।

इस संबंध में आइए हम निम्नलिखित लें

$(a+b)^5 = (a+b)\,(a+b)\,(a+b)\,(a+b)\,(a+b)$

मान लीजिए हम इस प्रसार में $a^3 b^2$ का गुणांक प्राप्त करना चाहते हैं। स्पष्ट है कि पांच कोष्ठकों के प्रत्येक कोष्ठक के द्विपद से एक पद का चयन करके प्रत्येक पद को प्राप्त किया जा सकता है। a^3b^2 प्राप्त करने के लिए हमें 3 कोष्ठकों से a का चयन करना होता है और शेष 2 कोष्ठकों से b का चयन करना होता है। स्पष्ट है कि a के लिए कोष्ठकों का चयन C(5, 3) अर्थात् 10 विधियों से किया जा सकता है।

* * *

ऊपर दिए गए तर्क को $(a+b)^n$ के प्रसार में $a^r b^{n-r}$ का गुणांक प्राप्त करने में लागू किया जा सकता है। $(a+b)^n$ को निरूपित करने वाले n कोष्ठकों से a के लिए r का चयन करना होता है और b के लिए शेष (n – r) का चयन करना होता है। इस कार्य को C (n, r) विधियों से किया जा सकता है। इस तरह, $(a+b)^n$ के प्रसार में $a^r b^{n-r}$ का गुणांक C (n, r) होगा। यह जानते हुए कि $C(n, r) = C(n, n-r)$, $a^r b^{n-r}$ और $a^{n-r} b^r$ के गुणांक समान होगे। स्पष्ट है कि r केवल मान 0, 1, 2, ..., n ले सकता है। हम यह भी जानते हैं कि $C(n, 0) = C(n, n) = 1$, a^n और b^n के गुणांक हैं। इस तरह, हमने निम्नलिखित द्विपद-प्रसार स्थापित किया है

$$(a+b)^n = a^n + C(n, 1)\,a^{n-1}\,b + C(n, 2)\,a^{n-2}\,b^2 + \cdots + C(n, r)\,a^{n-r}\,b^r + \cdots + b^n.$$

4.5.1 C (n, r) का पास्कल सूत्र

द्विपद-गुणांकों के एक रोचक गुणधर्म से इनके मानों को सरलता से सारणी रूप में रखा जा सकता है। सूत्र यह हैं।

प्रमेय 6: सभी धन पूर्णांकों n और सभी r, जहाँ $1 \le r \le n$, के लिए

$$C(n+1, r) = C(n, r) + C(n, r-1)$$

उपपत्तिः सर्वसमिका का वाम पक्ष (n + 1) अलग-अलग वस्तुओं से r वस्तुओं के चयन करने की विधियों की संख्या को निरूपित करता है। मानलीजिए हम (n + 1) से एक वस्तु का चयन करते हैं और उस पर निशान लगा देते हैं तब स्पष्ट है कि संचयों की संख्या जिनमें निशान लगी वस्तु हो, C (n, r) होगी क्योंकि तब हमें निशान न लगी वस्तुओं में से r वस्तुओं का चयन करना होता हैं। संचयों की संख्या जिनमें निशान लगी वस्तु उपस्थिति हो C (n, r – 1) होगी, क्योंकि तब हमें निशान न लगी n वस्तुओं में से (r – 1) वस्तुओं का चयन करना होता है और r वस्तुएँ प्राप्त करने के लिए इसमें निशान लगी वस्तु को जोड़ना होता है। अब पास्कल सूत्र इस तथ्य से प्राप्त होता है कि ऊपर बतायी गई अंतिम दो संख्याओं का योगफल C (n + 1, r) के बराबर होगा।
वैकल्पिक बीजीय उपपत्तिः

$$C(n, r) + C(n, r-1) = \frac{n!}{(n-r)!\,r!} + \frac{n!}{(n-r+1)!\,(r-1)!}$$

$$= \frac{n!}{r!(n+1-r)!}(n-r+1+r) = C(n+1, r)$$

पास्कल-त्रिभुजः पास्कल के सर्वसमिका-सूत्र से हमें द्विपद-गुणांकों का परिकलन करने की एक पुनरावर्तन (recursive) विधि प्राप्त होती है क्योंकि इससे $C(n, r)$ का मान n के छोटे मानों के साथ द्विपद गुणांकों के रूप में प्राप्त होता है। आधारभूत स्थितियों सभी $n \geq 0$ के लिए $C(n, 0) = C(n, n) = 1$ होती है क्योंकि प्रमेय 3 केवल $1 \leq r \leq n$ के लिए लागू होता है। इस पुनरावर्तन विधि से हम पास्कल-त्रिभुज बना सकते हैं, यहाँ आकृति में दिखाए गए द्विपद गुणांक आगे दिए गए हैं।

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

1 7 21 35 35 21 7 1

1 8 28 56 70 56 28 8 1

1 9 36 84 126 126 84 36 9 1

1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

1 11 55 165 330 462 462 330 165 55 11 1

पास्कल-त्रिभुज

चित्र 3.

पास्कल-त्रिभुज की n वीं पंक्ति से द्विपद गुणांक $C(n, r)$ प्राप्त होते हैं जबकि r, (बायीं ओर) 0 से (दायीं ओर) n की ओर जाता है। सबसे ऊपर वाली पंक्ति, जिसमें केवल संख्या 1 हैं, $n = 0$ के लिए है। बायीं और दायीं किनारों में सभी 1 हैं, जो यह बताता है कि सभी n के लिए $C(n, 0) = C(n, n) = 1$ पास्कल-त्रिभुज के अंदर की प्रत्येक प्रविष्टि (entry) इसके ठीक ऊपर बायीं और दायीं ओर की दो प्रविष्टियों का योगफल होती है। हम इस गुणधर्म को पास्कल-गुणधर्म कहते हैं। उदाहरण के लिए पंक्ति 6 का प्रत्येक 15 (ध्यान रहें कि हमने पंक्तियों की गणना 0 से प्रारंभ की है) ठीक इसके ऊपर 10 और 5 का योगफल है।

पास्कल-त्रिभुज के विकर्ण भी काफी रोचक होते हैंः ये विकर्ण, r के अचर मानों के संगत होते हैं। बायें कोर, जिसमें सभी 1 हैं, $r = 0$ के संगत होता है जिससे यह पता चलता है कि $C(n, 0) = 1$ बाऐं कोर के समांतर विकर्ण, जो एक इकाई दायीं ओर होता है (ऊपर से नीचे की ओर) होता है जिससे यह पता चलता है कि $n \geq 1$ के लिए $C(n, 1) = n$. दायीं ओर के अगले विकर्ण, जो 1, 3, 6, 10, 15, ... हैं से यह पता चलता है कि $n \geq 2$ के लिए $C(n, 2) = n(n-1)/2$. इन संख्याओं को त्रिभुजीय संख्या कहा जाता है और जैसे-जैसे हम विकर्ण पर नीचे की ओर चलते जाते हैं इनके अंतर में 1 की वृद्धि होती जाती है।

4.5.2 द्विपद-गुणांकों से संबंधित कुछ सर्वसमिकाएँ

सर्वसमिका 1: $(a+b)^n$ के द्विपद प्रसार में $a = b = 1$ लेने पर हमें यह प्राप्त होता है

$$C(n, 0) + C(n, 1) + C(n, 2) + \cdots + C(n, n-1) + C(n, n) = 2^n.$$

इस सर्वसमिका के निर्वचन को समझना आवश्यक है। मानलीजिए n अवयवीं वाला एक समुच्चय है। इस समुच्चय से अलग-अलग कितने उप-समुच्चय बनाए जा सकते हैं ? ठीक-ठीक r अवयवों वाले उपसमुच्चयों की संख्या $C(n, r)$ है। अतः सर्वसमिका के अनुसार उपसमुच्चयों की कुल संख्या

$\sum_{r=0}^{n} C(n, r) = 2^n$ होगी। इसतरह, हमने निम्नलिखित सिद्ध कर दिया है:

n अवयवों वाले समुच्चय के अलग-अलग उपसमुच्यों की संख्या 2^n होती है।

सर्वसमिका 2: $(a+b)^n$ के प्रसार में $a = 1, b = -1$ के लेने पर हमें यह प्राप्त होता है

$C(n, 0) - C(n, 1) + C(n, 2) - \cdots + (-1)^n C(n, n) = 0.$

सभी ऋण पदों को दक्षिण पक्ष में लाने पर हमें यह प्राप्त होता है

$$\sum_{r\text{-सम}} C(n, r) = \sum_{r\text{-विषम}} C(n, r) = 2^{n-1}.$$

और इसका निर्वचन यह है कि n अवयवों वाले समुच्चय के सम संख्या में पदों वाले उपसमुच्चयों की संख्या विषम संख्या में पदों वाले उपसमुच्चयों की संख्या के बराबर होती है।

E12) दिखाइए कि $C(n, m)\, C(m, k) = C(n, k)\, C(n-k, m-k)$.

E13) सिद्ध कीजिए कि सभी प्राकृतिक संख्याओं $k \le n$ के लिए

$$C(k, k) + C(k+1, k) + C(k+2, k) + \cdots + C(n, k) = C(n+1, k+1).$$

4.6 बहुपद प्रसार (MULTINOMIAL EXPANSION)

द्विपद के अनुरूप, जो दो प्रतीकों का योगफल होता है, बहुपद (multinomial) होता है, जो अनेक अलग-अलग प्रतीकों (कम से कम तीन, परन्तु परिमित संख्या में) का योगफल होता है। बहुपद प्रसार का संबंध बहुपद के धन पूर्णांकी घात के प्रसार से होता है। विशेष रूप से यहाँ हम $(a_1 + a_2 + \cdots a_m)^n$ के प्रसार पर विचार करेंगे। प्रसार के लिए यहाँ भी हम उसी तकनीक का प्रयोग कर सकते हैं जिसका प्रयोग हमने द्विपद प्रसार में किया है। हम बहुपद के n वें घात को n गुणनखंडों का, जिनमें प्रत्येक बहुपद हो, गुणनफल मान सकते हैं। प्रत्येक गुणनखंड से एक प्रतीक लेकर और उन्हें गुणा करके प्रसार का प्रत्येक पद प्राप्त किया जा सकता है। स्पष्ट है कि कोई भी पद $a_1^{r_1} a_2^{r_2} \ldots a_m^{r_m}$ के रूप का होगा जहाँ $r_1, r_2, \ldots, n$ में जुड़ने वाले ऋणेतर पूर्णांक हैं। इस प्रकार के पद को r_1 गुणनखंडों से a_1 का चयन करके, शेष $(n - r_1)$ कोष्ठकों में से r_2 गुणनखंडों से a_2 का चयन करके, और इसी प्रक्रिया को आगे जारी रखकर प्राप्त किया जाता है। इस कार्य को

$$C(n, r_1) \cdot C(n - r_1, r_2) \cdot C(n - r_1 - r_2, r_3) \cdots C(n - r_1 - r_2 - \cdots - r_{m-1}, r_m)$$

विधियों से किया जा सकता है। यह सरलता से देखा जा सकता है कि यह सरल होकर $\dfrac{n!}{r_1!\, r_2! \ldots r_m!}$ हो जाता है। इस तरह, हमने यह दिखाया है कि बहुपद प्रसार यह होता है

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_m)^n = \sum \frac{n!}{r_1!\, r_2! \ldots r_m!} a_1^{r_1} a_2^{r_2} \ldots a_m^{r_m}.$$

जहाँ संकलन (summation) सभी ऋणेतर पूर्णांकों $r_1, r_2, \ldots r_m$ पर होता है, जो n तक जुड़ जाते हैं।

4.6.1 बहुपद गुणांकों का संकेत

हमने यह देखा है कि $(a_1 + a_2 + \cdots + a_m)^n$ के प्रसार में $a_1^{r_1} a_2^{r_2} \ldots a_m^{r_m}$ का गुणांक

$\frac{n!}{r_1!\, r_2! \ldots r_m!}$ होता है। द्विपद गुणांक के अनुरूप इस गुणांक को बहुपद गुणांक (multinomial coefficient) कहा जाता है। हम बहुपद गुणांक को $C(n: r_1, r_2, \ldots, r_m)$ के रूप में प्रकट करते हैं। अनेक लेखक इसे $\binom{n}{r_1, r_2, \ldots, r_m}$ से भी निरूपित करते हैं।

उदाहरण 15: $(x+y+z+t+u)^{10}$ के प्रसार में $x^2 y^2 z^2 t^2 u^2$ का गुणांक क्या होगा ?

हल: स्पष्ट है कि गुणांक $C(10; 2, 2, 2, 2, 2) = 10!/(2!)^5$ होगा।

* * *

उदाहरण 16: $(a+b+c)^7$ के प्रसार में सभी पदों के गुणांकों का योगफल क्या होगा?

हल: अभीष्ट उत्तर यह है

$$\sum \frac{7!}{r!\, s!\, t!}$$

जहाँ संकलन सभी ऋणेतर पूर्णांकों r, s, t, पर किया गया है जो n तक जुड़ जाते हैं। परन्तु, यह $a = b = c = 1$ पर निकाला गया

$$\sum \frac{7!}{r!\, s!\, t!} a^r b^s c^t$$

का भी मान है। इस तरह उत्तर $(1+1+1)^7 = 3^7$ होगा।

* * *

E14) $(a+b+c)^4$ का पूरा प्रसार लिखिए।

E15) $\sum \frac{8!}{r!\, s!\, t!} 2^r 3^s 4^t$ का मान क्या है जहाँ संकलन सभी r, s, t ऋणेतर पूर्णांकों पर किया गया है जो जुड़कर 8 हो जाते हैं?

E16) दिखाइए कि

$$C(n, r_1)\, C(n - r_1, r_2)\, C(n - r_1 - r_2, r_3) \cdots C(n - r_1 - r_2 - \cdots - r_{m-1}, r_m)$$

$$= \frac{n!}{r_1!\, r_2! \ldots r_m!}, \quad \text{जबकि } r_1 + r_2 + \cdots + r_m = n.$$

4.7 संचय विन्यास प्रायिकता के अनुप्रयोग

ऐतिहासिक दृष्टि से देखा जाए, तो गणन-समस्याओं का प्रायिकता (probability) के साथ निकट का संबंध रहा है। एक सिक्के को 10 बार उछालने पर कम से कम 6 बार चित्त पड़ने की प्रायिकता, 25 बल्बों के प्रतिदर्श (sample) में एक खराब बल्ब के होने की प्रायिकता, जबकि जिस समष्टि से प्रतिदर्श किया गया है, उसमें 5 प्रतिशत बल्ब खराब होते हैं– ये सभी प्रायिकताएँ अनिवार्यतः गणन की समस्याएँ हैं। भाग 4.5.1 में चर्चित द्विपद गुणांकों के सुप्रसिद्ध पास्कल-त्रिभुज को पास्कल ने 1650 में जुआ संबंधी कुछ प्रायिकताओं का विश्लेषण करने के दौरान विकसित किया था।

4.7.1 चिरसम्मत प्रायिकता सिद्धांत के अवयव

मानलीजिए N अवयवों वाला एक परिमित समुच्चय X है। X के सभी उपसमुच्चयों के संग्रह को $\mathcal{P}(X)$ या केवल $\mathcal{P}$ से निरूपित किया जाता है। $\mathcal{P}$ के अवयवों को घटनाएँ (events) कहा जाता

है। रिक्त समुच्चय (null set) ϕ को असंभव घटना कहा जाता है और स्वयं समुच्चय X को निश्चित घटना कहा जाता है। आइए हम परिमित समुच्चय A के अवयवों की संख्या को, जिसे की गणन-संख्या (cardinality) भी कहा जाता है, n(A) से निरूपित करें।

परिभाषाः यदि किसी यादृच्छिक विधि से हम यह सुनिश्चित कर सकें कि सभी n(X) स्थितियाँ समप्रायिक (equally likely) हैं, जिसका अर्थ केवल यही है कि कोई भी स्थिति दूसरी स्थिति से अधिक वरीय नहीं है, तो $\mathcal{P}$ में घटना A के घटने की प्रायिकता, जिसे P(A) से निरूपित किया जाता है, अनुपात $\frac{n(A)}{n(X)} = \frac{n(A)}{N}$ होती है, जिसे फ्रांसिसी गणितज्ञ लाप्लास ने परिभाषित किया था।

ध्यान दीजिए कि चिरसम्मत प्रायिकता सिद्धांत (Classical Probability Theory) में 'समप्रायिक' (equally likely) की कल्पना का मूलभूत महत्त्व है। प्रायः इसे ऐसे प्रयोगों को लेकर सुनिश्चित किया जाता है जिनमें सभी n (X) स्थितियों को चयन की समान संभावना होती है। प्रयोग एक स्पष्ट रूप से परिभाषित प्रक्रिया होता है जिससे परिणामों का एक दिया हुआ समुच्चय प्राप्त होता है। इन परिणामों (n (X) स्थितियों) को प्रारंभिक घटनाएँ (elementary events) कहा जाता है और सभी प्रारंभिक घटनाओं के समुच्चय को प्रयोग की प्रतिदर्श समष्टि (sample space) कहा जाता है। जब हम सिक्का उछालने वाली स्थिति पर विचार करते हैं, तब वहाँ हम यह मान लेते हैं कि सिक्का अनभिनत (unbiased) है, जिसका अर्थ यह है कि एक उछाल में चित्त और पट का आना समप्रायिक होता है। स्वयं उछाल को एक यादृच्छिक प्रक्रिया माना जाता है जिससे 'समप्रायिक' परिणामों का आना सुनिश्चित होता है। कुछ ऐसे भी सिक्के होते हैं जो भारित होते हैं अर्थात् जिसमें सिक्के का एक पक्ष दूसरे पक्ष से भारी हो सकता है। अपने इस अध्ययन में हमने इस प्रकार के सिक्कों को नहीं लिया है। प्रायिकता सिद्धांत को सम स्थितियों पर विचार करने के लिए विकसित किया गया है जहाँ X एक परिमित समुच्चय है। परन्तु यहाँ हम उन स्थितियों पर विचार नहीं करेंगे। 'सम प्रायिक' स्थिति के संबंध में किसी कथन के न होने पर इसे हम सदा 'समप्रायिक' स्थिति मान लेते हैं।

कुछ परिणाम : क्योंकि $n(\phi) = 0$, इसलिए इससे यह पता चलता है कि $P(\phi) = 0$. परिभाषा के अनुसार $n(x) = N$, अतः $P(X) = 1$ यदि A और B दो घटनाएँ हों, तो $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ से यह अर्थ निकलता है कि $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ विशेष रूप से, यदि A और B परस्पर अपवर्जी (mutually exclusive) हों (जिसका अर्थ यह है कि A और B का कोई उभयनिष्ठ अवयव नहीं है), तो $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. ध्यान दीजिए कि $A \cup B$ को A और B में से कम से कम एक घटना अवश्य माना जा सकता है इस तरह इसे हमने सिद्ध कर दिया है।

4.7.2 प्रायिकता का योग-प्रमेय

यदि A और B दो परस्पर अपवर्जी घटनाएँ हों, तो उनके सम्मिलन (union) की प्रायिकता A और B की प्रायिकताओं का योगफल होती है।

उपप्रमेयः मानलीलिए A एक घटना है, तब A^c की, जो कि A की पूरक घटना या घटना 'A नहीं' है, प्रायिकता $1 - P(A)$ होती है।

ऐसा होने का कारण यह है कि घटनाएँ A और A^c परस्पर अपवर्जी और निश्शेष (exhaustive) घटनाएँ हैं, अतः $A \cup A^c = X$ और $P(A) + P(A^c) = 1$ इसी प्रकार का तर्क देकर यह सरलता से देखा जा सकता है कि यदि घटनाएँ $A_1, A_2, ..., A_m$ युग्मतः असंयुक्त (pairwise disjoint) (परस्पर अपवर्जी) घटनाएँ हों, तो A के सम्मिलन की प्रायिकता A को प्रायिकताओं का योगफल होती है। यह प्रायिकता का व्यापकीकृत योग-प्रमेय है। संचयविन्यास प्रायिकता सिद्धांत (combinatorial probability theory) की विषय-वस्तु परिमित समुच्चयों में, जहाँ सभी अवयव समप्रायिक होते हैं, घटनाओं की प्रायिकताओं का अभिकलन करना है। घटनाओं की प्रायिकताएँ घटनाओं की गणन-संख्याओं और मुख्य समुच्चय X की गणन-संख्या से पूर्णतः ज्ञात हो जाती है। तब प्रायिकता के परिकलन में आने वाली कठिनाई केवल घटनाओं की गणन-संख्या का परिकलन करने की कठिनाई होती है। घटनाओं की व्याख्या प्रायः X के कुछ बिन्दुओं के कुछ गुणधर्मों से

की जाती है और घटना तथा उसकी गणन-संख्या को निर्धारित करना कभी-कभी काफी कठिन हो जाता है।

उदाहरण 17: एक पाशे को एकबार फेंका गया है। निम्नलिखित घटनाओं की प्रायिकताएँ क्या होंगी (i) सम संख्या (ii) कम से कम 2 (iii) अधिक से अधिक 2 (iv) कम से कम 10 ?

हलः यदि हम घटनाओं को A, B, C और C मान लें, तो $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$, $C = \{1, 2\}$ और $D = \{\ \}$ अतः $n(X) = 6$, $n(A) = 3$, $n(B) = 5$, $n(C) = 2$, $n(D) = 0$ से उत्तर $P(A) = 3/6$, $P(B) = 5/6$, $P(C) = 2/6$. $P(D) = 0$ प्राप्त होते हैं।

* * *

उदाहरण 18: एक सिक्के को दो बार उछाला गया है। कम से कम एक बार चित्त पड़ने की प्रायिकता क्या होगी?

हलः इस स्थिति में X की व्याख्या इस प्रकार की जा सकती है

$\{(H, H), (H, T), (T, H), (T, T)\}$

उदाहरण के लिए, युग्म (H, T) उस स्थिति को निरूपित करता है जिसमें पहले उछाल पर चित्त आता है और दूसरे उछाल पर पट आता है। हमारे प्रश्न की घटना A में निम्नलिखित स्थितियाँ हैं

$(H, T), (T, H), (H, H)$

इस तरह, $n(A) = 3$, $n(X) = 4$, अतः $P(A) = 3/4$.

* * *

उदाहरण 19: एक सिक्के को n बार उछाला गया है। ठीक-ठीक r बार चित्त पड़ने की प्रायिकता क्या होगी?

हलः यदि H और T क्रमशः चित्त और पट को निरूपित करते हों, तो X में लंबाई n वाले अनुक्रम होते हैं जिन्हें केवल अक्षरों H और T का प्रयोग करके बनाया जा सकता है। स्पष्ट है कि $n(X) = 2^n$. घटना A में वे स्थितियाँ होती हैं जिनमें ठीक-ठीक r H होते हैं। स्पष्ट है कि $n(A) = C(n, r)$ अतः अभीष्ट प्रायिकता $C(n, r)/2^n$ होगी।

* * *

उदाहरण 20: यदि दो पाशे फेंके गए हों तो कुल 7 आने की प्रायिकता क्या होगी?

हलः यदि x और y दो पाशों पर आने वाली संख्याओं को प्रकट करती हों तो स्पष्ट है कि X में 36 युग्म (x, y) होंगे, जहाँ x और y, 1 से 6 तक के कोई भी मान ले सकते हैं। कुल 7 प्राप्त करने की अभीष्ट घटना A में निम्नलिखित 6 स्थितियाँ होंगी।

$(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)$

इस तरह $n(A) = 6, n(X) = 36$ अतः

$P(A) = n(A)/n(X) = 6/36 = 1/6.$

* * *

उदाहरण 21: दो पाशों को, जिनमें से एक लाल है और दूसरा सफ़ेद है, फेंका गया है। लाल पाशे की तुलना में सफ़ेद पाशे पर छोटी संख्या के आने की प्रायिकता क्या होगी ?

हलः पिछले उदाहरण की तरह, यदि लाल पाशे पर संख्या x हो, और सफ़ेद पाशे पर संख्या y हो, तो X में 36 युग्म (x, y) होंगे जहाँ x और y, $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ में से कोई भी एक पूर्णांक हो सकता है। घटना A के लिए हमें $x < y$ की आवश्यकता होती है। स्पष्ट है कि $x = 1, 2, 3, 4, 5$ के लिए $y, x + 1, x + 2, \dots 6$ हो सकता है अर्थात् संख्या में $6 - x$ हो सकता है। इस तरह, योग-नियम के अनुसार

$$n(A) = \sum_{x=1}^{5} (6 - x) = 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$$

अतः $P(A) = 15/36 = 5/12$

* * *

उदाहरण 22: यदि एक पांच अंकों वाली संख्या यादृच्छया चुनी गई हो, तो अंकों के गुणनफल का 20 होने की प्रायिकता क्या होगी?

हलः X सभी 5 अंकों वाली संख्याओं का संग्रह है। यदि इनमें से कोई भी एक abcde हो, तो a, 1 से 9 तक हो सकता है। परन्तु b, c, d, e, 0 से 9 तक हो सकते हैं। इस तरह, गुणन-नियम के अनुसार $n(X) = 9.10^4 = 90000$. A के अवयवों के लिए हमें $a.b.c.d.e = 20$ की आवश्यकता होती है। स्पष्ट है कि 20 का गुणनखंडन केवल दो विधियों से किया जा सकता है, जैसे पाँच गुणनखंडों के गुणनफल के रूप में (i) 1. 1.1.4.5 और (ii) 5.2.2.1.1. यह बात अवश्य है कि A की सभी संभव स्थितियाँ प्राप्त करने के लिए संख्याओं को क्रमचयित किया जा सकता है। संख्याओं 5, 4, 1, 1, 1 को 5!/1! 1! 3! = 20 विधियों से क्रमचयित किया जा सकता है और संख्याओं 5, 2, 2, 1, 1 को 5!/1! 2! 2! = 30 विधियों से क्रमचयित किया जा सकता है। अतः $n(A) = 20 + 30 = 50$, जिससे $P(A) = 50/9000 = 1/1800$ प्राप्त होता है।

* * *

4.8 सारांश

इस इकाई में हमने संचय विन्यासिकी की प्रकृति के बारे में चर्चा की है। विशेष रूप से यहाँ हमने निम्नलिखित तथ्यों पर चर्चा की है।

1. स्पष्ट रूप से योग-नियम और गुणन-नियम का उल्लेख किए बिना हमने इन नियमों से संबंधित कुछ प्रश्नों को हल किया है।
2. गुणन-नियम से परिचित कराया है और इसकी सहायता से कुछ प्रश्न हल किए हैं।
3. योग-नियम से परिचित कराया है और इसकी सहायता से कुछ प्रश्न हल किए हैं।
4. क्रमचय परिभाषित की हैं और इनका परिकलन करने के लिए सूत्र व्युत्पन्न किए हैं।
5. क्रमचयों से संबंधित कुछ संख्यात्मक प्रश्न हल किए हैं।
6. वृत्तीय क्रमचयों से परिचित कराया है।
7. उन वस्तुओं के, जिनका अलग-अलग होना आवश्यक है, क्रमचयों की संकल्पना से परिचित कराया है।
8. संचयों की संकल्पना से परिचित कराया है और संचयों की संख्या परिकलित करने के लिए एक सूत्र व्युत्पन्न किया है।
9. पुनरावृत्तीय संचय के लिए एक सूत्र व्युत्पन्न किया है।
10. द्विपद-प्रसार के लिए एक सूत्र व्युत्पन्न किया है और इसकी सहायता से कुछ प्रश्न हल किए हैं।
11. द्विपद गुणांकों के पास्कल-सूत्रों और पास्कल-त्रिभुज से परिचित कराया है।
12. द्विपद-प्रसार की संकल्पना को बहुपद प्रसार पर लागू की है।
13. चिरसम्मत संचयविन्यास प्रायिकता से परिचित कराया है।

14. प्रायिकता का योग-प्रमेय व्युत्पन्न किया है।

15. प्रायिकता से संबंधित अनेक प्रश्न हल किए हैं।

4.9 हल/उत्तर

E1) 15!/12! = 15.14.13.12! / 12! = 15.14.13 = 2730.

E2) $(3+5)! = 7! = 5040$. परन्तु $3! + 4! = 6 + 24 = 30$. स्पष्ट है कि दो संख्याएँ बराबर नहीं हैं।

E3) $(m+n)! = (m+n)(m+n-1) \cdots (m+1)\, m!$

$(m+n)! - m! = m!\,[(m+n)(m+n-1) \cdots (m+1) - 1 \geq m!\,(n! + m^n - 1)]$

$(m+n)! - m! - n! \geq m!\,[n! + m^n - 1] - n! = n!\,(n! - 1) + m!\,(m^n - 1) \geq 0.$

E4) $n = 20$ और $r = 3$ पर $\dfrac{n!}{(n-r)!} = \dfrac{20!}{17!} = 20.19.18 = 6840.$

E5) मानलीजिए हम पुरूषों को 1, 2, 3, ..., n के नाम से जानते हैं। तब पहले पुरूष का जोड़ा n महिलाओं में किसी एक महिला के साथ हो सकता है, दूसरे पुरूष का जोड़ा शेष $(n-1)$ महिलाओं में से किसी एक महिला के साथ हो सकता है। आदि, आदि। अतः जोड़ा बनाने की विधियों की संख्या $n\,(n-1) \ldots 1$ होगी।

E6) गुणन-नियम के अनुसार उत्तर 26.25.24 होगा, जबकि अक्षरों की पुनरावृत्ति न होती हो और उत्तर 26.26.26 होगा जबकि अक्षरों की पुनरावृत्ति होती हो।

E7) गुणन-नियम के अनुसार 100 और 999 के बीच के पूर्णांकों की संख्या, जबकि सभी अंक सम हों, 4.5.5 = 100 होगी (ध्यान दीजिए कि पहला अंक शून्य नहीं हो सकता, जबकि दूसरा और तीसरा अंक शून्य हो सकता है)।

E8) संख्या के विषम होने के लिए यह आवश्यक है कि अंतिम अंक विषम हो। अंतिम स्थिति को 5 विधियों से भरा जा सकता है। यदि दूसरी स्थिति को 0 से भरा जाए, तो पहली स्थिति को 8 विधियों से भरा जा सकता है। इस तरह, गुणन-नियम के अनुसार विषम संख्याओं की संख्या, जिनकी मध्य स्थिति में 0 हो और सभी अंक अलग-अलग हों, 40 होगी। यदि दूसरी स्थिति को शून्य के अतिरिक्त किसी अन्य अंक से भरा जाए, तो इसे 8 विधियों से किया जा सकता है। तब, पहली स्थिति को 7 विधियों से भरा जा सकता है। अतः विषम संख्याओं की संख्या, जिनमें सभी अंक अलग-अलग हों और मध्य अंक शून्य न हो, 5.8.7 = 280 होगी। इस तरह योग-नियम के अनुसार उत्तर 40 + 280 = 320 होगा।

E9) $P(15, 2) = 15.14 = 210$ और $P(7, 3) = 7.6.5 = 210.$

$P(5, 5) = 5.4.3.2.1 = 120$ और $P(6, 3) = 6.5.4 = 120.$

E10) हम अभीष्ट संख्याओं को दो वर्गों में बांट देंगे। वर्ग I में वे संख्याएँ होंगी जिनका पहला अंक 6 है। वर्ग II में वे संख्याएँ होंगी जिनका पहला अंक 6 से बड़ा हो। वर्ग I में अवयवों की संख्या 1.4.6.5.4 है (पहले अंक को केवल 1 विधि से चुना जा सकता है, दूसरे को केवल 5, 7, 8, 9 से चुना जा सकता है और तीसरे अंक को 6 विधियों से चुना जा सकता है, आदि आदि) इस तरह, वर्ग I में अवयवों की संख्या 480 होगी। वर्ग II में 3.7.6.5.4 = 2520 होगी। इस तरह योग-नियम के अनुसार अभीष्ट उत्तर 480 + 2520 = 3000 होगा।

E11) (क) शब्द 'ASSESSES' में A एक बार, E दो बार और S पांच बार आते हैं। इस तरह, क्रमचयों की संख्या यह होगी

8! / 1! 2! 5! = 8.7.6 / 2 = 168

(ख) शब्द 'PATTIVEERANPATTI' में R, N और V एक बार आते हैं, P, E और I दो बार आते हैं, A तीन बार आता है और T चार बार आता है। इस तरह, क्रमचयों की अभीष्ट संख्या यह होगी

$16! / 1! \, 1! \, 1! \, 2! \, 2! \, 2! \, 3! \, 4! = 455.111$

E12) वाम पक्ष n लोगों के समुच्चय से m लोगों के समूह के चयन करने की विधियों का गणन करता है और तब इस समूह के k नेताओं के उपसमुच्चय का चयन करता है। इसी प्रकार, दक्षिण पक्ष पहले n लोगों के समुच्चय से k नेताओं के उपसमुच्चय का चयम करता है और तब शेष $n-k$ लोगों से समूह के शेष $m-k$ सदस्यों का चयन करता है।

E13) इसे आगमन नियम से (चर n पर आगमन करके) सिद्ध किया जा सकता है। आधार स्थिति तो तुच्छ है, क्योंकि यदि $n=0$, तो $k=0$ और समीकरण $C(0,0) = C(1,1)$ हो जाता है, जो कि सत्य है। आगमन चरण पास्कल-सूत्र/सर्वसमिका और आगमन परिकल्पना से सिद्ध हो जाता है।

E14) $(a+b+c)^4 = (a^4+b^4+c^4) + 4(a^3b+ab^3+a^3c+ac^3+b^3c+bc^3)$
$+ 6(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2) + 12(a^2bc+ab^2c+abc^2)$, गुणांक 1, 4, 6, 12, ठीक-ठीक $4!/4!0!0!0!$, $4!/3!\,1!\,0!\,0!$, $4!/2!\,1!\,2!\,0!\,0!$, $4!/2!\,1!\,1!$, बहुपद गुणांक हैं।

E15) स्पष्ट है कि $\sum \frac{8!}{r!\,s!\,t!} 2^r 3^s 4^t$, $(2+3+4)^8$ का प्रसार है। अतः अभीष्ट उत्तर 9^8 है।

E16) इसे हम m पर आगमन-नियम लागू करके सिद्ध कर सकते हैं। मानलीजिए कि परिणाम m के लिए सत्य है। $(m+1)$ गुणनखंडों वाला वाम पक्ष लीजिए। आगमन-नियम के अनुसार अंतिम m गुणनखंडों का गुणनफल $\frac{(n-r_1)!}{r_2!\,r_3!\cdots r_{m+1}!}$ इस तरह वाम पक्ष

$\frac{n!}{r_1!\,(n-r_1)!} \frac{(n-r_1)!}{r_2!\,r_3!\cdots r_{m+1}!}$ हो जाता है और यह $\frac{n!}{r_1!\,r_2!\cdots r_{m+1}!}$ के बराबर होता है।

इससे यह पता चलता है कि परिणाम $(m+1)$ के लिए भी सत्य है। परन्तु जब $m = 2$, तब परिणाम $C(n, r)$ का प्रसार हो जाता है और इस तरह $m=2$ के लिए सत्य होता है। आगमन-नियम के अनुसार परिणाम सभी धन पूर्णांकों $m > 1$ के लिए सत्य है।

4.10 विविध प्रश्नावली

E1) IGNOU (प्रत्येक को अधिक से अधिक एक बार) के अक्षरों से कितने "शब्द" बनाए जा सकते हैं :

(क) जबकि सभी पाँच अक्षरों का प्रयोग अवश्य किया जाए;

(ख) जबकि कुछ (या सभी) अक्षरों को छोड़ दिया जाए?

E2) 52 पत्तों को कितने प्रकार से एक गड्डी के रूप में विन्यासित किया जा सकता है ?

E3) चार X और दो Y से कितने "शब्द" बनाए जा सकते हैं।

E4) दस सदस्यों वाले क्लब से चार लोगों की कितनी समितियाँ बनायी जा सकती हैं ?

E5) यदि बिल गणित के दो पाठ्यक्रम और इतिहास के दो पाठ्यक्रम लेना चाहता हो और गणित के पांच उपयुक्त पाठ्यक्रम और इतिहास के चार उपयुक्त पाठ्यक्रम उपलब्ध हों तो यह कितनी विधियों से चार पाठ्यक्रमों का चयन कर सकता है ?

E6) MISSISSIPPI के सभी अक्षरों से कितने शब्द बनाए जा सकते हैं ?

E7) C(20, 3), C(10, 2) और C(10, 8) ज्ञात कीजिए।

E9) यदि एक बेकरी में पांच प्रकार की कूकी हों, तो कितनी विधियों से एक दर्जन का चयन किया जा सकता है।

E10) जैक के पास छः खिलौने हैं और वह जिम के साथ, जिसके पास आठ खिलौने हैं, दो खिलौने का लेन-देन करना चाहता है। कितनी विधियों से वह लेन-देन कर सकता है ?

E11) कितनी विधियों से पाँच A और सात B को एक पंक्ति में रखा जा सकता है जबकि कोई भी दो A अगल-बगल न हो।

E12) मोर्स कोड में बिन्दु और डैश जैसे निशान होते हैं। उदाहरण के लिए θ का कोड (– –, –) है। क्या कोई ऐसा कोड बनाया जा सकता है जिससे कि वर्णमाला के प्रत्येक अक्षर को अधिक से अधिक तीन निशानों, अधिक से अधिक चार निशानों से निरूपित किया जा सके ?

E13) एक गोल मेज के चारों ओर छः लोगों को कितने क्रम से बैठाया जा सकता है, जबकि इनमें से एक व्यक्ति अन्य पाँच व्यक्तियों में से एक व्यक्ति को पसंद नहीं करता और उनके साथ बैठना नहीं चाहता ?

E14) यदि 10 लोगों की समिति में चार महिलाएँ हों, तो कितनी विधियों से पाँच लोगों की एक उपसमिति का गठन किया जा सकता है, जबकि विधान के अनुसार उपसमिति में कम से कम एक महिला का होना आवश्यक हो ?

E15) यदि एक मानक गड्डी से एक पत्ता खींचा जाए, तो उसकी लाल या फेस पत्ता होने की प्रायिकता क्या होगी ?

E16) एक सिक्के को आठ बार उछालने पर ठीक-ठीक चार बार चित्त पड़ने ? कम से कम चार बार चित्त पड़ने की प्रायिकता क्या होगी ?

E17) यदृच्छया चुने गए तीस लोगों में से कम-से-कम दो लोगों का जन्म दिन होने की प्रायिकता क्या होगी ?

E18) $(x+y)^n$ के प्रसार में Ax^5y^m के रूप का एक पद आता है, जहाँ A एक अचर है। इसमें A क्या है और m क्या है ?

E19) $(2+3x)^{10}$ में x^7 का गुणांक क्या है ?

E20) दोनों पक्षों को क्रमगुणितों में लिखकर और सरल करके निम्नलिखित सर्वसमिकाओं को सिद्ध कीजिए :

(क) $\frac{n+1}{r+1} C(n, r) = C(n+1, r+1).$

(ख) $C(n, m). C(m, r) = C(n, r). C(n-r, m-r).$

E21) दिखाइए कि $\sum_{r=0}^{n} C(n, r) . C(m, k+r) = C(n+m, n+k)$

E22) $(1+x+2x^2)^5$ के प्रसार में x^4 का गुणांक क्या है ?

E23) द्विपद-प्रमेय की सहायता से एक स्वेच्छ संख्या $\Sigma C(n, r) k^r$ ज्ञात कीजिए।

E24) एक दस प्रश्नों वाली सही-गलत परीक्षा में उत्तीर्ण होने के लिए एक छात्रा को छः सही उत्तर देना आवश्यक है। यदि वह अपने उत्तरों को यदृच्छया चुनती है, तो उसके उत्तीर्ण होने की प्रायिकता क्या होगी ?

4.11 विविध प्रश्नावली के हल/उत्तर

E1) (क) $P(5,5) = 5! = 120$. (ख) क्योंकि r-अक्षर वाले शब्दों की संख्या $P(5,r)$ है, इसलिए उत्तर यह होगा

$$\sum_{r=0}^{5} P(5,r) = 1 + 5 + 5.4 + 5.4.3 + 5.4.3.2 + 5.4.3.2.1 = 326.$$

ध्यान दीजिए कि इसमें एक शून्य शब्द भी सम्मिलित है।

E2) उत्तर $P(52, 52) = 52!$ है। यह एक बड़ी संख्या है।

E3) उत्तर $\frac{6!}{2!\,4!} = 15$ है।

E4) उत्तर $C(10,4) = \frac{10.9.8.8}{4.3.2.1} = 210$ है।

E5) उत्तर $C(5,2) \,.\, C(4.2) = 60$ है।

E6) उत्तर $\frac{11!}{1!\,2!\,4!\,4!}$ है।

E7) उत्तर है $C(20,3) = \frac{20.19.18}{3.2.1} = 1140 \,.\, C(10,2) = \frac{10.9}{2.1} = 45.\ C(10,8) = C(10,2) = 45$ है।

E8) उत्तर है : $C(15; 5, 3, 2, 5) = \frac{15!}{5!\,3!\,2!\,5!}$ और $C(15; 5, 5, 3, 2)$ वही है जो कि पिछला उत्तर $C(15; 5, 3, 2, 5)$ है।

E9) यदि कूकी को A, B, C, D, E के नाम से जाना जाए तो प्रश्न उनसे 12 अक्षरों का चयन करने का हो जाएगा जबकि इनमें से किसी को कितनी ही बार लिया जा सकता है। स्पष्ट है कि यह $(1 + x + x^2 + \cdots)^5$ के प्रसार में x^{12} का गुणांक है। $(1-x)^{-5}$ में यह x^{12} का गुणांक है और यह $C(9,5) = 126$ है।

E10) उत्तर है : $C(6,2) \,.\, C(8.2) = 15.28 = 420.$

E11) जब हम 5A को एक पंक्ति में रखते हैं तो छः रिक्तियाँ होती हैं, जिनमें प्रत्येक A होता है। उन्हें अलग रखने के लिए हमें प्रतिबंध $a \geq 0, b, c, d, e \geq 1, f \geq 0$ और $a + b + c + d + e + f = 7$ के साथ हमें a, b, c, d, e, f, g B को रखना चाहिए। उत्तर

$$(1 + x + x^2 + \cdots)(x + x^2 + \cdots)^4 (1 + x + x^2 + \cdots)$$

में x^7 का गुणांक होगा। यह $(1 + x + x^2 + \cdots)^3 = (1-x)^{-3}$ में x^3 का गुणांक है। गुणांक $C(5,3) = 10$ है।

E12) तीन निशानों से हम केवल $2 + 4 + 8 = 14$ अक्षर बना सकते हैं। चार निशानों से हम $2 + 4 + 8 + 16 = 30$ अक्षर बना सकते हैं, और, क्योंकि वर्णमाला में केवल 26 अक्षर होते हैं, इसलिए इन्हें बनाने के लिए चार निशान ही पर्याप्त हैं।

E13) उत्तर $5! - 2.4! = 120 - 48 = 72$ है।

E14) उत्तर $C(10,5) - C(6,5)$ है।

E15) लाल पत्ते 26 हैं। शेष पत्तों में चेहरे वाले पत्ते 8 (2 इक्का, 2 बादशाह, 2 रानी और 2 गुलाम) हैं। इस तरह ऐसे 34 पत्ते हैं जो हमारी घटना के अनुकूल हैं। अतः प्रायिकता $34/52 = 17/26$ होगी।

E16) ठीक 4 चित्त पड़ने की प्रायिकता $C(8,4)/2^8 = 35/128$ है। कम से कम 4 चित्त पड़ने की प्रायिकता

$[C(8,4) + C(8,5) + C(8,6) + C(8,7) + C(8,8)]/2^8$ है।

यह $(70 + 56 + 28 + 8 + 1)/2^8 = 163/256$ है।

E17) (लीप वर्ष न लिया जाए) 365 जन्म-दिन हो सकते हैं। पूरक घटना यह है कि सभी 30 के जन्म-दिन अलग-अलग हैं। इसकी प्रायिकता $C(365, 30)/365^{30}$ है। यह 0.5 से भी अधिक है।

E18) क्योंकि प्रत्येक पद का x, y में घात n है, इसलिए $m, (n-5)$ होना चाहिए। $(x+y)^n$ में $x^5 y^{n-5}$ का गुणांक $C(n, 5)$ है। इस तरह, $A = C(n, 5)$

E19) $(2+3x)^{10}$ में x^7 वाला पद $C(10,3) \cdot 2^3 \cdot (3x)^7$ है। अतः उत्तर $C(10,3) \cdot 8\, 3^7$ है।

E20) (क) $\frac{n+1}{r+1} \cdot \frac{n!}{r!\,(n-r)!} = \frac{(n+1)!}{(r+1)!\,(n+1-r-1)!} = C(n+1, r+1).$

(ख) वाम पक्ष $\frac{n!}{m!\,(n-m)!} \cdot \frac{m!}{r!\,(m-r)!} = \frac{n!\,(n-r)!}{r!\,(n-r)!\,(m-r)!\,(n-m)!} =$ दक्षिण पक्ष

E21) वामपक्ष $(1+x)^n \left(1+\frac{1}{x}\right)^m$ के प्रसार में x^{-k} का गुणांक है, जो कि $(1+x)^{m+n}$ के प्रसार में x^{m-k} का गुणांक है और जो $C(n+m, m-k) = C(n+m, n+k)$ है।

E22) बहुपद प्रसार से $(1+x+2x^2)^5 = \sum \frac{1^r x^s (2x^2)^t\, 5!}{r!\,s!\,t!}$

निम्नलिखित स्थितियों में गुणांकों के साथ x^4 आता है

(क) $r = 3, s = 0, t = 2$, इससे $5!\,4/(3!\,0!\,2!) = 40$ प्राप्त होता है।

(ख) $r = 2, s = 2, t = 1$, इससे $5!\,2/(2!\,2!\,1!\,0!) = 60$ प्राप्त होता है।

(ग) $r = 1, s = 4, t = 0$, इससे $5!/(4!\,1!\,0!) = 5$ प्राप्त होता है। अतः अभीष्ट उत्तर $40 + 60 + 5 = 105$ है।

E23) उत्तर $(k+1)^n$ है।

E24) उत्तर तो वही है जो कि एक वास्तविक सिक्के को 10 बार उछालने पर कम से कम छः बार चित्त पड़ने की प्रायिकता है। अतः उत्तर यह है

$C(10,6)/2^{10} + C(10,7)/2^{10} + C(10,8)/2^{20} + C(10,9)/2^{10} + C(10,10)/2^{10}$

यह सरल होकर $(210 + 120 + 45 + 10 + 1)/1024 = 193/512$ हो जाता है।