इकाई 2 उपपत्ति की विधियाँ

इकाई की रूपरेखा   पृष्ठ संख्या

2.1 प्रस्तावना

पिछली इकाई में आप कथनों और उनके सत्य मानों के बारे में पढ़ चुके हैं। इस इकाई में हम उन विधियों पर चर्चा करेंगे जिनकी सहायता से कथनों को जोड़कर एक तर्कसंगतत: मान्य तर्क प्राप्त किया जा सकता है। अपने गणितीय अध्ययनों के दौरान आपने शब्दों 'प्रमेय' और 'उपपत्ति' को ज़रूर देखा होगा। भाग 2.2 में हम इस बात पर चर्चा करेंगे कि प्रमेय क्या होता है और गणितीय दृष्टि से स्वीकार्य उपपत्ति क्या होती है।

चित्र 1 : जॉर्ज बूल (1815-1864)

भाग 2.3 में हम आपको किसी कथन को सिद्ध या असिद्ध करने के लिए लागू की जाने वाली विभिन्न विधियों से परिचित कराएंगे। जब आप विभिन्न प्रकार के मान्य तर्कों का अध्ययन करेंगे, तो आप गणितज्ञों के सोचने के ढंग को और कुछ परिकल्पनाओं के आधार पर उनके गणित आगे बढ़ाने के तरीक़ों को देखेंगे। इस भाग में चर्चित विचारों को औपचारिक रूप में अंग्रेज़ गणितज्ञ बूल और जर्मन तर्कशास्त्री फ़्रैज (1848-1925) ने औपचारिक रूप दिया था।

गणित में गणितीय आगमन नियम की एक ख़ास जगह है इसकी सरलता और इसकी व्यापक तौर पर अनुप्रयोग की वजह से। भाग 2.4 में आप कथनों को सिद्ध करने की इस विधि के बारे में पढ़ेंगे।

आप इस इकाई को ध्यान से पढ़ें। यह इकाई न केवल इस पाठ्यक्रम के अध्ययन की दृष्टि से महत्वपूर्ण है, बल्कि इसकी विषय-वस्तु उस आधार का हिस्सा है जिस पर सभी गणितीय ज्ञान का निर्माण हुआ है।

उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप

- 'प्रमेय', 'उपपत्ति', 'खंडन' और 'असिद्ध करने' की व्याख्या कर सकेंगे;
- उपपत्ति की प्रत्यक्ष विधि और कुछ परोक्ष विधियों का वर्णन दे सकेंगे;
- आगमन नियम के दोनों रूपों का कथन दे सकेंगे और उन्हें लागू कर सकेंगे।

2.2 उपपत्ति क्या होती है?

मान लीजिए मैं किसी से कहूँ, "मैं तुमसे अधिक बलवान हूँ।" संभव है कि यह सुनकर वह व्यक्ति तुरंत पलटे और घूरकर मुझसे कहे, "सिद्ध करो!" वास्तव में, वह मेरी कथन की सत्यता जानने के लिए कुछ प्रमाण चाह रहा/रही है। (इस मामले में शायद प्रमाण एक जबरदस्त धक्का हो।)

ऐसे ही, सन्देह दूर करने वाले प्रमाण ही तो चाहते हैं लोग किसी वैज्ञानिक के या किसी इतिहासकार के दावों को स्वीकार करने से पहले।

इसी प्रकार, यदि आप चाहते हैं कि किसी गणितीय कथन को सत्य स्वीकार कर लिया जाए, तो यह आवश्यक है कि इस कथन के समर्थन में आप **गणितीय तौर से स्वीकार्य** प्रमाण दिया। कहने का अर्थ है कि आपको यह दर्शाना जरूरी होगा कि कथन **सार्वभिकत: सत्य** है। और यह आपकोएक तर्कसंगतत: मान्य तर्क के रूप में देना होगा।

परिभाषा : गणित या तर्कशास्त्र में **तर्क** (argument) कथनों का एक परिमित अनुक्रम $p_1, ..., p_n, p$ होता है, जहाँ $(p_1 \wedge p_2 \wedge .... \wedge p_n) \rightarrow p$.

अंतिम कथन को छोड़कर अनुक्रम के बाक़ी सभी कथन (अर्थात् p_i, जहां $i = 1, ..., n$) को **परिकल्पना (assumption / hypothesis / premise)** कहा जाता है। अंतिम कथन p को **निष्कर्ष (conclusion)** कहा जाता है।

आइए हम एक ऐसे तर्क का उदाहरण लें, जिससे हमने दिखाया है कि दिया हुआ कथन सत्य है।

उदाहरण 1 : गणितीय कथन 'किन्हीं दो समुच्चयों A और B के लिए $A \cap B \subseteq A$' को सत्य दर्शाने का एक तर्क दीजिए।

हल : एक तर्क निम्न हो सकता है :

मान लीजिए x, $A \cap B$ का कोई अवयव है।

तब '$\cap$' की परिभाषा के अनुसार, $x \in A$ और $x \in B$.

अत: $x \in A$.

यह कथन $A \cap B$ के प्रत्येक x के लिए सत्य है।

अत: '$\subseteq$' की परिभाषा के अनुसार, $A \cap B \subseteq A$.

* * *

उदाहरण 1 में दिया गया तर्क एक विभिन्न प्रकार का तर्क है। इसमें किसी भी परिकल्पना या इसके निष्कर्ष की सत्यता पिछली परिकल्पनाओं की सत्यता पर निर्भर है। हाँ, यह ज़रूर है कि शुरू में हम यह मानकर चलते हैं कि पहला कथन सत्य है। तब, 'प्रतिच्छेद' (intersection) की परिभाषा के अनुसार दूसरा कथन सत्य होता है। और 'तर्कसंगत निहितार्थ' के गुणों के कारण जब भी दूसरा कथन सत्य होता है, तब तीसरा कथन सत्य होता है और जब कभी पहले तीन कथन सत्य होते हैं, तब चौथा कथन सत्य होता है, शब्द 'सभी के लिए' की परिभाषा और गुणों के कारण। और अंत में, जब पिछले सभी कथन सत्य होते हैं, तब अंतिम कथन सत्य होता है। इस तरह यहां हमने यह दर्शाया है कि दिया हुआ कथन सत्य है। दूसरे शब्दों में, हमने दिए हुए कथन के सत्य होने की उपपत्ति दी है, परिभाषाओं के अनुसार।

परिभाषाएं : हम कहते हैं कि कथनों $p_1, p_2, ...$ और p_n से कथन p **तर्कसंगतत: निकलता है** अगर $p_1, p_2, ..., p_n$ के सत्य होने पर p ज़रूर सत्य हो, अर्थात् $(p_1 \wedge p_2 \wedge \; ..... \wedge p_n) \Rightarrow p$.

(यहाँ आप निहितार्थ तीर '$\Rightarrow$' के प्रयोग पर ध्यान दें। यदि r और s कोई दो कथन हों, तो **'$r \Rightarrow s$' यह प्रकट करता है कि जब भी r सत्य होता है तब s सत्य होता है।** ध्यान दीजिए कि प्रतिधनात्मक (contrapositive) को लागू करने पर यह तीर 'जब भी s असत्य होता है, तब r असत्य होता है।' को भी प्रकट करता है। इस तरह, '$r \rightarrow s$' और '$r \Rightarrow s$' सिर्फ़ तब बराबर होते हैं जबकि r और s दोनों ही सत्य हों, या दोनों ही असत्य हों।)

कथन p की **उपपत्ति (proof)** एक ऐसा गणितीय तर्क है जिसमें कथनों का एक अनुक्रम $p_1, p_2, ..., p_n$ होता है जिससे p तर्कसंगतत: निकलता है। अत: p इस तर्क का निष्कर्ष है।

उस कथन को, जिसे सत्य सिद्ध किया जाता है, **प्रमेय (theorem)** कहा जाता है।

कभी-कभी, जैसा कि आप भाग 2.3.3 में देखेंगे, कथन p को सत्य सिद्ध करने के बजाए हम उसे असत्य, अर्थात् $\sim p$ को सत्य सिद्ध करने का प्रयास करते हैं। इस प्रकार की उपपत्ति को p का **खण्डन (disproof)** कहा जाता है। हम यह भी कहते है कि उपपत्ति p को **असिद्ध करती** है। अगले भाग में आप कथन के खंडन की कुछ विधियों के बारे में पढ़ेंगे।

कभी-कभी ऐसा भी होता है कि हमें लगता है कि अमुक कथन सत्य है, लेकिन हम उसे सिद्ध नहीं कर पाते। ऐसा भी हो सकता है कि हम उसका खंडन भी नहीं कर पाते। इस प्रकार के कथनों को **दावा (conjecture)** कहा जाता है। **जब कभी भी दावे को सिद्ध कर दिया जाता है, तब इसे प्रमेय माना जाता है। और अगर इसका खंडन किया जाता है, तब इसके निषेध को प्रमेय माना जाता है।**

इस संदर्भ में, 1742 में गणितज्ञ गोल्डबाख़ द्वारा दिया गया एक अति सुप्रसिद्ध दावा है। यह है :

सभी $n \in \mathbf{N}$ के लिए, यदि n सम संख्या है और $n > 2$, तो n दो अभाज्य संख्याओं का जोड़ होता है।

आज तक इस कथन को न तो कोई सिद्ध कर सका है और न ही असिद्ध। इसे असिद्ध करने के लिए लोग कोई ऐसा उदाहरण ढूंढने की कोशिश में हैं जिसके लिए यह कथन सत्य न हो, अर्थात्, एक ऐसी सम संख्या $n > 2$ हो, जहाँ n को दो अभाज्य संख्याओं के जोड़ के रूप में नहीं लिखा जा सकता हो।

अब, जैसा कि आप देख चुके हैं, किसी कथन की गणितीय उपपत्ति में एक या अधिक परिकल्पनाएं होती हैं। यह चार प्रकार की हो सकती हैं :

i) एक कथन जिसे पहले सिद्ध किया जा चुका है (जैसे, यह सिद्ध करने के लिए कि $\mathbf{R}[x]$ के किसी बहुपद के सम्मिश्र मूल युग्मों में होते हैं, हम विभाजन कलन विधि (division algorithm) का प्रयोग करते हैं); या

ii) एक कथन जो कि उपपत्ति में दिए गए पिछले कथनों से तर्कसंगतत: प्राप्त होता है (जैसा कि आप उदाहरण 1 में देख चुके हैं); या

iii) एक गणितीय तथ्य जिसे कभी कभी सिद्ध तो नहीं किया गया है, परन्तु जिसे सार्वत्रिक रूप से सत्य मान लिया गया है (जैसे, दो बिन्दुओं से एक रेखा निर्धारित होती है)। इस प्रकार के तथ्य को **अभिगृहीत (axiom / postulate)** कहा जाता है;

iv) एक गणितीय शब्द की परिभाषा (जैसे, $A \cap B \subseteq A$ की उपपत्ति में '$\subseteq$' की परिभाषा को मान लेना)।

इस पाठ्यक्रम और अन्य पाठ्यक्रमों में दी गई उपपत्तियों का अध्ययन करते वक़्त और नीचे दिए गए प्रश्नों को हल करने के दौरान प्रत्येक प्रकार के परिकल्पनाओं के उदाहरण आपको देखने को मिलेंगे।

E1) स्कूलीय स्तर की बीजगणित से लिए गए एक प्रमेय और उसकी उपपत्ति (कम से कम चार चरणों वाली) का उदाहरण दीजिए। हर चरण पर यह बताइए कि चार प्रकार की परिकल्पनाओं में से यह किस प्रकार की है।

E2) क्या प्रत्येक कथन एक प्रमेय होता है? क्यों?

अभी तक हमने मान्य, या स्वीकार्य, तर्कों के बारे में चर्चा की है। आइए अब हम कथनों का एक ऐसा अनुक्रम लें जिससे एक मान्य तर्क प्राप्त **नहीं** होता। निम्नलिखित अनुक्रम लीजिए।

यदि माया सिनेमा देखती है, तो वह घर के लिए दिया गया अपना काम पूरा नहीं कर पाएगी।
माया घर के लिए दिया गया अपना काम पूरा नहीं कर पायी है।
अत:, माया ने सिनेमा देखा।

तर्क को देखकर क्या आप यह बता सकते हैं कि यह मान्य है या नहीं? शायद आपको लगे कि यह तर्क मान्य नहीं है। परन्तु, क्या ऐसा कोई औपचारिक तर्कसंगत साधन है जिसे लागू करके यह देखा जा सके कि आपका अंदाज़ा सही है या नहीं? क्या इसमें सत्य-सारणियां काम आ सकती हैं? आइए देखें।

दिए हुए तर्क का रूप है :
$[(p \to q) \wedge q] \Rightarrow p$
जहाँ
p: माया सिनेमा देखती है, और
q: माया घर के लिए दिया गया अपना काम पूरा नहीं कर पाती।

आइए हम इस तर्क से संबंधित सत्य सारणी (सारणी 1) देखें।

सारणी 1

p	q	$p \to q$	$(p \to q) \wedge p$
T	T	T	T
T	F	F	F
F	T	T	T
F	F	T	F

अंतिम स्तंभ में परिकल्पनाओं के सत्य मान दिए गए हैं। पहले स्तंभ में निष्कर्ष के संगत सत्य मान दिए गए हैं। **अब तर्क केवल तभी मान्य होगा, जबकि दोनों परिकल्पनाओं के सत्य होने पर निष्कर्ष सत्य हो।** यह बात पहली पंक्ति में होती है, परन्तु तीसरी पंक्ति में **नहीं।** अत: तर्क **मान्य नहीं** है।

अब आप मान्यता के संबंध में निम्नलिखित तर्क की जांच कर सकते हैं।

E3) बताइए कि निम्नलिखित तर्क मान्य है या नहीं।

$(p \to q \vee \sim r) \wedge (q \to p) \Rightarrow (p \to r)$

आप देख चुके हैं कि उपपत्ति एक ऐसा तर्कसंगत तर्क है जो प्रमेय की सत्यता को सत्यापित करता है। किसी प्रमेय को सिद्ध करने के अनेक तरीके हो सकते है; जैसा कि आप अगले भाग में देखेंगे। यह सभी विधियां एक या अधिक **अनुमान के नियमों (rules of inference)** पर आधारित हैं। ये नियम तर्कों के विभिन्न रूप हैं। यहाँ हम ज़्यादा इस्तेमाल होने वाले चार नियमों का उल्लेख करेंगे।

मोडस पोनन्ज़ (modus ponens) एक लैटिन शब्द है जिसका अर्थ है "पुष्टि की विधि"।

i) वियोजन-नियम (law of detachment) या (मोडस पोनन्ज़)

निम्नलिखित तर्क पर ग़ौर कीजिए :

यदि काली तस्वीर बना सकती है, तो उसे नौकरी मिल जाएगी।
काली तस्वीर बना सकती है।
अत:, उसे नौकरी मिल जाएगी।

इस तर्क के विश्लेषण के लिए आइए हम p को कथन 'काली तस्वीर बना सकती है।' और q को कथन 'काली को नौकरी मिल जाएगी।' मान लें। तब $(p \to q)$ और p परिकल्पनाएं होंगी। और निष्कर्ष q होगा।

अत: तर्क का रूप होगा :

$\therefore$, 'इसलिए' को दर्शाता है।

$$\begin{array}{l} p \to q \\ \underline{p \qquad} \\ \therefore q \end{array}, \text{ अर्थात् } [(p \to q) \wedge p] \Rightarrow q.$$

क्या यह तर्क मान्य है? यह मालूम करने के लिए, आइए हम इसकी एक सत्य सारणी बनाएं (देखिए सारणी 2)।

सारणी 2 : $[(p \to q) \wedge p] \Rightarrow q$ की सत्य सारणी

p	q	$p \to q$	$(p \to q) \wedge p$
T	T	T	T
T	F	F	F
F	T	T	F
F	F	T	F

इस सारणी के दूसरे स्तंभ (निष्कर्ष) और चौथे स्तंभ (परिकल्पनाओं) को देखिए। जब भी परिकल्पनाएं सत्य होती हैं, अर्थात् पंक्ति 1 में, तब निष्कर्ष सत्य होता है। अत:, तर्क मान्य है।

इस रूप के मान्य तर्क को वियोजन-नियम कहा जाता है क्योंकि इसमें निष्कर्ष q को परिकल्पना $p \to q$ से वियोजित किया जाता है। इसे **प्रत्यक्ष अनुमान का नियम (law of direct inference)** भी कहा जाता है।

(ii) प्रतिस्थिति-नियम (law of contraposition) (या **मोडस तोलन्ज़**)

मोडस तोलन्ज़ (modus tollens) का अर्थ है "खंडन की विधि"।

इस नियम को समझने के लिए निम्नलिखित तर्क पर ग़ौर कीजिए।

यदि काली तस्वीर बना सकती है, तो उसे नौकरी मिल जाएगी।
काली को नौकरी नहीं मिल सकती।
अत: काली तस्वीर नहीं बना सकती।

यदि p और q के वही मान लें जैसा कि ऊपर (i) में माना गया है, तो आप देख सकते हैं कि परिकल्पनाएं $p \to q$ और $\sim q$ हैं और निष्कर्ष $\sim p$ है।
अत: तर्क होगा :

$$\begin{array}{c} p \to q \\ \underline{\sim q} \\ \therefore \sim p \end{array}, \text{ अर्थात् } [(p \to q) \wedge \sim q] \Rightarrow \sim p.$$

जाँच करने पर आप यह पाएंगे कि यह तर्क मान्य है।

अनुमान के दो और नियम भी हैं जिनका व्यापक प्रयोग अनेक उपपत्तियों में होता है। इनसे संबंधित प्रश्न नीचे दिए गए हैं।

E4) नीचे तीन तर्क दिए गए हैं। इनमें से प्रत्येक तर्क को आप प्रतीकों की भाषा में लिखिए, और जांच कीजिए कि ये तर्क मान्य हैं या नहीं।

(i) या तो रबड़ सफ़ेद है या ऑक्सीजन एक धातु है।
रबड़ काला है।
अत:, ऑक्सीजन एक धातु है।

(ii) यदि मधु सरपंच है, तो वह पंचायत की मुखिया होगी।
यदि मधु पंचायत की मुखिया है, तो वह जायदाद के मामलों पर अपना निर्णय देगी।
अत:, यदि मधु सरपंच है, तो वह जायदाद के मामलों पर अपना निर्णय देगी।

(iii) या तो मुन्ना खाना बनाएगा या मुन्नी 'कराटे' का अभ्यास करेगी।
यदि मुन्नी 'कराटे' का अभ्यास करती है, तो मुन्ना पढ़ाई करता है।
मुन्ना पढ़ाई नहीं करता।
अत:, मुन्नी 'कराटे' का अभ्यास करेगी।

E5) मोडस पोनन्ज और मोडस तोलन्ज़ के एक-एक उदाहरण दीजिए।

जैसा कि आपने देख लिया होगा, E4(i) और (ii) के तर्क मान्य हैं। इसमें से पहला **वियोजित तर्क (disjunctive syllogism)** का एक उदाहरण है और दूसरा **परिकल्पनात्मक तर्क (hypothetical syllogism)** का एक उदाहरण है।

इस तरह वियोजित तर्क निम्न रूप का होता है :

$$\begin{array}{c} p \vee q \\ \underline{\sim p} \\ \therefore q \end{array}, \text{ अर्थात् } [(p \vee q) \wedge \sim p] \Rightarrow q.$$

और परिकल्पनात्मक तर्क निम्न रूप का होता है :

$$\begin{array}{c} p \to q \\ \underline{q \to r} \\ \therefore p \to r \end{array}, \text{ अर्थात् } [(p \to q) \wedge (q \to r)] \Rightarrow (p \to r).$$

आइए अब हम देखें कि किसी कथन को सिद्ध या असिद्ध करने के लिए विभिन्न रूपों वाले तर्कों को किस प्रकार एक साथ लिया जा सकता है।

2.3 उपपत्ति की विभिन्न विधियाँ

इस भाग में हम एक कथन को सिद्ध करने के लिए तीन अलग-अलग तरीक़ों पर विचार करेंगे। यहाँ हम एक ऐसी विधि पर भी चर्चा करेंगे जिसका प्रयोग केवल कथन को असिद्ध करने के लिए किया जाता है। आइए पहले हम पिछले भाग में चर्चित अनुमान के पहले नियम पर आधारित उपपत्ति के तरीक़े पर विचार करें।

2.3.1 प्रत्यक्ष उपपत्ति

इस प्रकार की उपपत्ति पूरी तरह से मोडस पोनन्ज़ पर आधारित है। आइए हम इस तरीक़े को औपचारिक रूप में प्रस्तुत करें।

परिभाषा : $p \Rightarrow q$ की प्रत्यक्ष उपपत्ति **(direct proof)** ऐसा तर्कसंगततः मान्य तर्क है जिसमें शुरू में यह मान लिया जाता है कि p सत्य है, और वियोजन-नियम के एक या अधिक अनुप्रयोगों से यह निष्कर्ष निकाल लिया जाता है कि q भी सत्य होगा।

अतः, $p \Rightarrow q$ की एक प्रत्यक्ष उपपत्ति प्राप्त करने के लिए हम पहले यह मान लेते हैं कि p सत्य है। तब $p \Rightarrow q_1, q_1 \Rightarrow q_2, \ldots, q_n \Rightarrow q$ के रूप के एक या अधिक चरणों में हम यह निष्कर्ष निकाल लेते हैं कि q सत्य है। इस संबंध में निम्नलिखित उदाहरण लीजिए।

उदाहरण 2 : कथन 'दो विषम पूर्णांकों का गुणनफल एक विषम् पूर्णांक होता है।' की एक प्रत्यक्ष उपपत्ति दीजिए।

हल : आइए पहले हम स्पष्ट कर लें कि हमारी परिकल्पनाएं क्या हैं, और हमें क्या सिद्ध करना है।
सबसे पहले हम दो विषम् पूर्णांक x और y लेते हैं। अतः हमारी परिकल्पना है
p: x और y विषम् हैं।
हम निम्न निष्कर्ष पर पहुँचना चाहते हैं :
q: xy विषम् है।
आइए पहले हम सिद्ध करें कि $p \Rightarrow q$.
चूंकि x विषम् है, इसलिए $x = 2m + 1$, किसी पूर्णांक m के लिए।
इसी प्रकार, $y = 2n + 1$, किसी पूर्णांक n के लिए।
तब, $xy = (2m + 1)(2n + 1) = 2(2mn + m + n) + 1$.
अतः xy विषम् है।
इस तरह, हमने दर्शाया है कि $p \Rightarrow q$.

ध्यान दीजिए कि प्रत्यक्ष उपपत्ति मुख्यतः $p \Rightarrow q$ को दर्शाने पर निर्भर करती है।

अब हम $p \wedge (p \Rightarrow q)$ पर मोडस पोनन्ज लागू करके इच्छित निष्कर्ष पर पहुंच सकते हैं।

* * *

उदाहरण 3 : प्रमेय 'एक सम पूर्णांक का वर्ग सम पूर्णांक होता है।' की एक प्रत्यक्ष उपपत्ति दीजिए।

हल : आइए सबसे पहले हम दिए हुए कथन को निम्न प्रकार से प्रतीकों में लिखें।
$(\forall x \in \mathbf{Z})(p(x) \Rightarrow q(x))$,
जहाँ p(x): x सम पूर्णांक हैं, और
q(x): x^2 सम पूर्णांक है, अर्थात् q(x) और $p(x^2)$ बराबर हैं।

तब प्रत्यक्ष उपपत्ति होगी :

> मान लीजिए x एक सम संख्या है (अर्थात् हम मान लेते हैं कि p(x) सत्य है)।
> तब $x = 2n$ किसी पूर्णांक n के लिए (सम संख्या की परिभाषा लागू करते हुए)।
> तब $x^2 = (2n)^2 = 4n^2 = 2(2n^2)$.
> $\therefore$ x^2 सम है (अर्थात् q(x) सत्य है)।

ध्यान दीजिए कि यहां हमने **प्रत्येक x के लिए** कथन को सिद्ध किया है, क्योंकि हमने x को कोई भी सम संख्या माना है, न कि कोई विशेष सम संख्या।

* * *

अब आप एक प्रश्न को हल करने का प्रयास कीजिए।

E6) कथन 'यदि x एक वास्तविक संख्या है जहां $x^2 = 9$, तब या तो $x = 3$ या $x = -3$.' की एक प्रत्यक्ष उपपत्ति दीजिए।

आइए अब हम एक अन्य तरह की उपपत्ति पर विचार करें।

2.3.2 परोक्ष उपपत्तियां

इस उपभाग में हम $p \Rightarrow q$ को सिद्ध करने के लिए दो चक्करदार विधियों पर चर्चा करेंगे।

प्रतिस्थितक द्वारा उपपत्ति : पहली विधि में हम इस तथ्य को लागू करते हैं कि कथन $p \Rightarrow q$ अपने प्रतिस्थितक (contrapositive) $(\sim q \Rightarrow \sim p)$ के तर्कसंगततः तुल्य है, अर्थात्

$$(p \Rightarrow q) \equiv (\sim q \Rightarrow \sim p)$$

उदाहरण के लिए 'यदि अम्मू धार्मिक कट्टरपंथियों से सहमत नहीं है, तो वह रूढ़िवादी नहीं है' और कथन 'यदि अम्मू रूढ़िवादी है, तो वह धार्मिक कट्टरपंथियों से सहमत है', तुल्य हैं।

इस तुल्यता को देखते हुए, हम $p \Rightarrow q$ को सिद्ध करने के बजाए $\sim q \Rightarrow \sim p$ को सिद्ध कर सकते हैं। इसका अर्थ है कि हम यह मान सकते हैं कि $\sim q$ सत्य है, और तब हम $\sim p$ की सत्यता सिद्ध करने का प्रयास कर सकते हैं। दूसरे शब्दों में, **इस विधि से $p \Rightarrow q$ को सिद्ध करने के लिए, हम यह मान लेते हैं कि q असत्य है और तब दर्शाते हैं कि p असत्य है।** आइए, एक उदाहरण लें।

उदाहरण 4 : सिद्ध कीजिए कि यदि $x, y \in \mathbf{Z}$, जहाँ xy विषम् है, तो x और y दोनों विषम् होते हैं, इसके प्रतिस्थितक को सिद्ध करते हुए।

हल : मान लीजिए दिए गए कथनों को हम निम्न प्रकार से प्रकट करते हैं :

$p : xy$ विषम है।

$q : x$ और y दोनों ही विषम हैं।

अतः

$\sim p : xy$ सम है, और

$\sim q : x$ सम है, या y सम है या दोनों ही सम हैं।

$\sim q \Rightarrow \sim p$ को सिद्ध करके हम $p \Rightarrow q$ सिद्ध करना चाहते हैं।

अतः शुरू में हम यह मान लेते हैं कि $\sim q$ सत्य है, अर्थात् हम मान लेते हैं कि x सम है।

तब $x = 2n$, किसी $n \in \mathbf{N}$ के लिए।

अतः $xy = 2ny$.

अतः परिभाषा के अनुसार, xy सम है।

अर्थात् $\sim p$ सत्य है।

इस तरह हमने दर्शाया है कि $\sim q \Rightarrow \sim p$.

अतः $p \Rightarrow q$.

* * *

अब आप इससे संबंधित कुछ प्रश्नों को हल करने का प्रयास क्यों नहीं करते?

E7) निम्नलिखित कथन का प्रतिस्थितक लिखिए : 'यदि f एक परिमित समुच्चय से स्वयं में एक 1-1 फलन है, तो f, आच्छादी अवश्य होगा।'

E8) इसके प्रतिस्थितक को सिद्ध करके कथन 'यदि x एक पूर्णांक है और x^2 सम है, तो x भी सम होगा।' को सिद्ध कीजिए।

आइए अब हम कथन को परोक्ष रूप से सिद्ध करने की एक अन्य विधि पर विचार करें।

अंतर्विरोध द्वारा उपपत्ति : इस विधि से q की सत्यता को सिद्ध करने के लिए सबसे पहले हम यह मानकर चलते हैं कि q असत्य है (अर्थात् $\sim q$ सत्य है)। तब मान्य तर्क से हम एक ऐसी स्थिति में आ जाते हैं जिसमें अमुक कथन सत्य भी होता है और असत्य भी, अर्थात् हमें किसी कथन के लिए एक अंतर्विरोध $r \wedge \sim r$ प्राप्त होता है। इसका अर्थ यह है कि $\sim q$ की सत्यता में एक अंतर्विरोध, यानी एक कथन जो सदैव असत्य होता है, निहित है। यह बात तभी हो सकती है जबकि $\sim q$ भी असत्य हो। अतः q सत्य होगा।

इस विधि को **अंतर्विरोध द्वारा उपपत्ति** कहा जाता है। इसे **असंगति प्रदर्शन (reductio ad absurdum)** भी कहा जाता है, क्योंकि यह दी हुई परिकल्पना को असंगतता में समानीत करने पर निर्भर है।

आइए हम इस विधि के इस्तेमाल का एक उदाहरण लें।

उदाहरण 5 : दिखाइए कि $\sqrt{5}$ अपरिमेय है।

हल : आइए हम दिए हुए कथन को अंतर्विरोध द्वारा सिद्ध करने का प्रयास करें। इसके लिए सबसे पहले हम यह मानकर चलते हैं कि $\sqrt{5}$ परिमेय है।

इसका अर्थ है कि ऐसे दो पूर्णांक a और b हैं जिससे कि $\sqrt{5} = \frac{a}{b}$, जहाँ a और b के कोई सार्व गुणनखंड नहीं हैं। इससे यह पता चलता है कि

$a = \sqrt{5}\, b \Rightarrow a^2 = 5b^2 \Rightarrow 5 \mid a^2 \Rightarrow 5 \mid a.$

अतः परिभाषा के अनुसार, $a = 5c$, जहाँ $c \in \mathbf{Z}$.

अतः $a^2 = 25c^2$.

परन्तु $a^2 = 5b^2$ भी है।

इसलिए $25c^2 = 5b^2 \Rightarrow 5c^2 = b^2 \Rightarrow 5 \mid b^2 \Rightarrow 5 \mid b.$

परन्तु यहाँ हम देखते हैं कि 5, a और b दोनों को विभाजित करता है, जोकि शुरू में की गई इस परिकल्पना का **अंतर्विरोध** करता है कि a और b का कोई सार्व गुणनखंड नहीं है।
अतः हम यह निष्कर्ष निकाल लेते हैं कि हमारी परिकल्पना कि $\sqrt{5}$ परिमेय है असत्य है, अर्थात् $\sqrt{5}$ अपरिमेय है।

* * *

हम अंतर्विरोध की विधि से किसी निहितार्थ $r \Rightarrow s$ को भी सिद्ध कर सकते हैं। यहाँ हम तुल्यता $\sim(\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{s}) \equiv \mathbf{r} \wedge \sim \mathbf{s}$ का प्रयोग कर सकते हैं। अतः $r \Rightarrow s$ को सिद्ध करने के लिए सबसे पहले हम मानकर चल सकते हैं कि $r \Rightarrow s$ असत्य है, अर्थात् r सत्य है और s असत्य है। और, तब एक अंतर्विरोध प्राप्त करने के लिए हम एक मान्य तर्क प्रस्तुत कर सकते हैं।

इस विधि के इस्तेमाल को समझने के लिए समतल ज्यामिति से लिए गए निम्नलिखित उदाहरण पर विचार कीजिए।

उदाहरण 6 : निम्नलिखित को सिद्ध कीजिए :
यदि दो अलग-अलग रेखाएं L_1 और L_2 एक दूसरे को प्रतिच्छेद करती हैं, तो उनका प्रतिच्छेद एक बिन्दु है।

हल : दिए हुए निहितार्थ को अंतर्विरोध से सिद्ध करने के लिए आइए सबसे पहले हम यह मानकर चलें कि दो अलग-अलग रेखाएं L_1 और L_2 एक-दूसरे को एक से अधिक बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करती हैं। मान लीजिए इनमें से दो बिन्दु A और B हैं।

तब L_1 और L_2 दोनों ही A और B को आविष्ट करेंगी।

लेकिन यह बात ज्यामिति के इस अभिगृहीत का अंतर्विरोध करता है कि 'यदि दो अलग-अलग बिन्दु दिए हों, तो इन्हें आविष्ट करने वाली केवल एक रेखा होती है।'

अत: यदि L_1 और L_2 प्रतिच्छेदी हों, तो ये केवल एक बिन्दु पर ही प्रतिच्छेद करेंगी।

* * *

अंतर्विरोध नियम से अनेक तर्कसंगत पहेलियों को भी हल किया जा सकता है, उन सभी हलों को अस्वीकार करके जिनसे अंतर्विरोध प्राप्त होता है। इस संबंध में निम्नलिखित उदाहरण लीजिए।

उदाहरण 7 : एक गांव में दो प्रकार के लोग रहते हैं — एक वे जो सदा सच बोलते हैं और दूसरे वे जो सदा झूठ बोलते हैं। मान लीजिए आप इस गांव में जाते हैं जहां आपसे मिलने गांव के दो व्यक्ति A और B आते हैं। आगे, मान लीजिए कि आपसे
A कहती है, "B हमेशा सच बोलती है।"
और B कहती है, "A और मैं विपरीत प्रकार के व्यक्ति हैं।"
A और B किस प्रकार के हैं?

हल : आइए सबसे पहले हम मान लें कि A सत्यवादी है।
$\therefore$ A जो कहती है वह सत्य है।
$\therefore$ B एक सत्यवादी है।
$\therefore$ B जो कहती है वह सत्य है।
$\therefore$ A और B विपरीत प्रकार के हैं।
यह एक अंतर्विरोध है, क्योंकि हमारे परिकल्पनाओं के अनुसार A और B दोनों ही सत्यवादी हैं।
$\therefore$ शुरू में हम जो मानकर चले थे, वह असत्य है।
$\therefore$ A सदा झूठ बोलती है।
$\therefore$ A ने जो आपसे कहा है वह झूठ है।
$\therefore$ B सदा झूठ बोलती है।
$\therefore$ A और B समान प्रकार के हैं, अर्थात् दोनों ही सदा झूठ बोलते हैं।

* * *

नीचे आपके लिए कुछ प्रश्न दिए जा रहे हैं। इन प्रश्नों को हल करते समय आप यह देखेंगे कि कुछ ऐसी स्थितियां आती हैं जिनमें अभी तक चर्चित उपपत्ति की तीनों विधियों को लागू किया जा सकता है।

E9) अंतर्विरोध द्वारा उपपत्ति की विधि से दिखाइए कि
i) $\sqrt{3}$ अपरिमेय है,
ii) $x \in \mathbf{R}$ के लिए यदि $x^3 + 4x = 0$, तो $x = 0$.

E10) प्रत्यक्ष विधि से और प्रतिस्थितक विधि से E9(ii) को सिद्ध कीजिए।

किसी कथन को सिद्ध करने के अनेक तरीके हो सकते हैं।

E11) मान लीजिए आप उदाहरण 7 में बताए गए गांव में जाते हैं। वहां गांव के दो और व्यक्ति C और D आपसे मिलने आते हैं। C आपको बताती है, हम दोनों ही सदा सच बोलते हैं, और D बताती है, "C सदा झूठ बोलती है।" C और D किस प्रकार के व्यक्ति हैं?

आइए अब हम किसी कथन को असत्य दर्शाने की समस्या पर विचार करें।

2.3.3 प्रतिउदाहरण

मान लीजिए मैं कहती हूँ कि सभी मनुष्य 5 फ़ुट लंबे हैं। ऐसे में शायद आप तुरंत, मेरी बात को ग़लत साबित करने के लिए, एक ऐसा व्यक्ति दिखा देंगे जिसके लिए मेरा कथन असत्य हो जाता है। और जैसा कि आप जानते हैं, अगर एक भी उदाहरण के लिए कथन $(\forall x)\, p(x)$ असत्य हो [अर्थात्, $(\exists x)(\sim p(x))$ सत्य हो], तो कथन असत्य ही है।

ऐसा उदाहरण जिसके लिए कोई कथन असत्य है, उस कथन के लिए एक **प्रतिउदाहरण (counterexample)** होता है।

एक आम स्थिति जिसमें हम प्रतिउदाहरण ढूंढते हैं; वह है $p \to q$ के रूप के कथनों को असिद्ध करने के लिए। इकाई 1 में आप पढ़ चुके हैं कि $\sim(p \to q) \equiv p \wedge \sim q$. अत: $p \to q$ का प्रतिउदाहरण एक

ऐसा उदाहरण होना चाहिए जहां $p \wedge \sim q$ सत्य हो, अर्थात् p सत्य हो और $\sim q$ सत्य हो, अर्थात् परिकल्पना p तो लागू होती हो, परन्तु निष्कर्ष q लागू **न** होता हो।

उदाहरण के लिए, कथन 'यदि n एक विषम पूर्णांक है, तो n एक अभाज्य संख्या है।' के खंडन के लिए हमें एक ऐसे विषम पूर्णांक का पता लगाना होगा जो अभाज्य संख्या न हो। इस प्रकार का एक पूर्णांक 15 है। अतः $n = 15$ दिए हुए कथन का एक प्रतिउदाहरण है।

ध्यान दीजिए कि कथन p का कोई प्रतिउदाहरण होना यह सिद्ध करता है कि p असत्य है, अर्थात् $\sim p$ सत्य है।

आइए हम एक और उदाहरण लें।

उदाहरण 8 : निम्नलिखित कथन को असिद्ध कीजिए :
$(\forall\, a \in \mathbf{R})\ (\forall\, b \in \mathbf{R})\ [(a^2 = b^2) \Rightarrow (a = b)]$.

हल : इस कथन को असिद्ध करने का एक अच्छा तरीक़ा है एक प्रतिउदाहरण का पता लगाना, अर्थात् ऐसी वास्तविक संख्याओं a और b के युग्म का पता लगाना जिसके लिए $a^2 = b^2$ परन्तु $a \neq b$. क्या आप इस प्रकार के संख्या युग्म का पता लगा सकते हैं? क्या $a = 1$ और $b = -1$ हो सकते हैं? इनसे काम हो जाता है।

वास्तव में दिए गए कथन के अनंततः अनेक प्रतिउदाहरण हैं। (क्यों?)

* * *

अब एक प्रश्न।

E12) उपयुक्त प्रतिउदाहरण देकर निम्नलिखित कथनों को असिद्ध कीजिए।

i) $\forall x \in \mathbf{Z}, x \in \mathbf{N}.$

ii) $(x+y)^n = x^n + y^n\ \ \forall\, n \in \mathbf{N}, x, y \in \mathbf{Z}.$

iii) $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, 1-1 होता है यदि और केवल यदि f आच्छादी हो।

(संकेत : $p \Leftrightarrow q$ को असिद्ध करने के लिए यह सिद्ध कर लेना काफ़ी होगा कि $p \Rightarrow q$ असत्य है या $q \Rightarrow p$ असत्य है।)

उपपत्ति के कुछ और तरीक़े भी हैं, जैसे कि रचनात्मक (constructive) उपपत्ति, जिसे आप इकाई 11 के परिशिष्ट में और गणित के अन्य पाठ्यक्रमों में देखेंगे। यहाँ हम इस विधि पर चर्चा नहीं करेंगे।

अन्य उपपत्तियां जो आपको देखने को मिलेंगी, वे हैं **शून्य उपपत्ति (vacuous proof)** और **तुच्छ उपपत्ति (trivial proof)**।

शून्य उपपत्ति में इस तथ्य का प्रयोग किया जाता है कि यदि p असत्य है, तो $p \to q$ हमेशा सत्य होता है चाहे q का सत्य मान कुछ भी क्यों न हो। अतः $p \to q$ को शून्यतः सिद्ध करने के लिए हमें केवल यह दिखाने की आवश्यकता होती है कि p असत्य है।
उदाहरण के लिए, मान लीजिए हम सिद्ध करना चाहते हैं कि 'यदि $n > n + 1$, जहाँ $n \in \mathbf{Z}$, तो $n^2 = 0$'
चूंकि प्रत्येक $n \in \mathbf{Z}$ के लिए '$n > n + 1$' असत्य होता है, इसलिए दिया हुआ कथन **शून्यतः सत्य** होता है।

इसी प्रकार $p \to q$ की **तुच्छ उपपत्ति** इस तथ्य पर आधारित होती है कि यदि q सत्य है, तो $p \to q$ हमेशा सत्य होता है, चाहे p का सत्य मान कुछ भी क्यों न हो। अतः उदाहरण के लिए,
'यदि $n > n + 1$, जहाँ $n \in \mathbf{Z}$, तो $n + 1 > n$' तुच्छतः सत्य होता है, क्योंकि $n + 1 > n\ \forall\, n \in \mathbf{Z}.$
इस पूरी प्रक्रिया में परिकल्पना के सत्य मान का (जो कि इस उदाहरण में असत्य है) कोई प्रयोग नहीं होता।

अब आपके लिए ऐसी उपपत्तियों को बनाने का एक मौका।

E13) शून्य उपपत्ति का और तुच्छ उपपत्ति का एक उदाहरण दीजिए।

आइए अब हम $p(n), n \in \mathbf{N}$ के रूप के कथनों की उपपत्ति के एक अति-महत्वपूर्ण तकनीक का अध्ययन करें।

2.4 आगमन नियम

एक दिन, कुछ विद्यार्थियों के साथ एक चर्चा में, एक ने निन्दक तरीके से मुझसे कहा कि भारत के सभी राजनीतिज्ञ भ्रष्ट हैं। मैंने उससे पूछा कि उसने यह निष्कर्ष कैसे निकाला। पुष्टि के लिए उसने ऐसे अनेक राजनीतिज्ञों के नाम लिए, जिनकी भ्रष्टता के बारे में गली-गली में चर्चा है। अत: अनेक विशेष उदाहरणों के आधार पर उसने राजनीतिज्ञों के बारे में अपनी यह व्यापक राय बना ली। यह **आगमनिक तर्क (inductive logic)** का एक उदाहरण है, जो कि तर्क देने की एक ऐसी प्रक्रिया है जिससे अनेक अलग-अलग मामलों को देखकर व्यापक नियम मालूम किए जाते हैं। गणित और दूसरे सभी विज्ञानों में आगमनिक तर्क का प्रयोग किया जाता है। लेकिन, गणित में हम इसका प्रयोग कुछ अधिक परिशुद्ध रूप में करते हैं।

गणितीय आगमन में **परिशुद्धता (precision)** का होना आवश्यक होता है क्योंकि, जैसा कि आप जानते हैं, $(\forall\, n \in \mathbf{N})\; p(n)$ के रूप का कथन केवल तभी सत्य होता है जबकि $\mathbf{N}$ के **प्रत्येक** n के लिए इसे सत्य दर्शाया जा सकता हो। (ऊपर के उदाहरण में, यदि विद्यार्थी को एक अभ्रष्ट राजनीतिज्ञ का उदाहरण भी दिया जाए, तब भी संभवत: वह अपनी व्यापक राय नहीं बदलेगी।)

हम इस बात से कैसे सुनिश्चित हो सकते हैं कि हमारा कथन $p(n)$, n के उन सभी मानों के लिए सत्य है जिनपर हम ग़ौर कर रहे हैं? इसका उत्तर मालूम करने के लिए , आइए हम एक उदाहरण लें।

मान लीजिए हम सिद्ध करना चाहते हैं कि

$1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$, प्रत्येक $n \in \mathbf{N}$ के लिए।

आइए हम विधेय $1 + 2 + \ldots\ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$, को $p(n)$ से प्रकट करें। अब हम यह सत्यापित कर सकते हैं कि यह n के कुछ मानों, जैसे $n = 1, n = 5, n = 10, n = 100$, आदि , के लिए सत्य है। परन्तु, अभी भी हम इस बात से सुनिश्चित नहीं हो सकते कि यह n के किसी ऐसे मान के लिए सत्य होगा, जिस पर हमने इसे सत्यापित नहीं किया है।

लेकिन अब मान लीजिए कि हम यह दर्शा सकते हैं कि यदि किसी n (मान लीजिए $n = k$) के लिए $p(n)$ सत्य है, तो यह $n = k + 1$ के लिए भी सत्य होगा। तब हम बहुत अच्छी स्थिति में हैं क्योंकि हम जानते हैं कि $p(1)$ सत्य है। और, क्योंकि $p(1)$ सत्य है, इसलिए $p(1+1)$, अर्थात् $p(2)$ सत्य होगा, आदि। इस तरह हम यह दर्शा सकते हैं कि प्रत्येक $n \in \mathbf{N}$ के लिए $p(n)$ सत्य है।

अत: हमारी उपपत्ति निम्नलिखित दो चरणों में बंट जाती है।

i) यह जांच करना कि $p(1)$ सत्य है;

ii) यह सिद्ध करना कि जब कभी $p(k)$ सत्य होता है, तब $p(k+1)$ भी सत्य होता है, जहाँ $k \in \mathbf{N}$.

अब हम इसी नियम का औपचारिक कथन अधिक व्यापक रूप में देंगे।

गणितीय आगमन नियम (Principle of Mathematical Induction) : मान लीजिए $p(n)$ एक विधेय है, जहाँ n एक प्राकृतिक संख्या है। और, मान लीजिए कि निम्नलिखित दो प्रतिबंध लागू होते हैं :

i) $p(m)$ सत्य है, जहाँ $m \in \mathbf{N}$;

ii) यदि $p(k)$ सत्य है तो $p(k+1)$ भी सत्य होगा, जहाँ $k\ (\geq m)$ एक प्राकृतिक संख्या है।

तब प्रत्येक $n \geq m$ के लिए $p(n)$ सत्य होता है।

नियम के दो प्रतिबंधों को देखकर क्या आप बता सकते हैं कि यह नियम क्यों काम करता है? (संकेत के रूप में, अपने ऊपर के उदाहरण में $m = 1$ लीजिए।)
ऐसा है कि (i) से हमें पता चलता है कि $p(m)$ सत्य है। तब (ii) में $k = m$ लेने पर हम पाते हैं कि $p(m + 1)$ सत्य है। और क्योंकि $p(m + 1)$ सत्य है, इसलिए $p(m + 2)$ भी सत्य होगा, आदि आदि।

ऊपर दिए गए उदाहरण पर लौटते हुए, आइए हम दूसरे चरण को पूरा करें। हम जानते हैं कि $p(k)$ सत्य है, अर्थात् $1 + 2 + ... + k = \frac{k(k+1)}{2}$. हम जाँच करना चाहते हैं कि $p(k + 1)$ सत्य है या नहीं। अतः, आइए हम $p(k + 1)$ ज्ञात करें।

$$\begin{aligned} 1 + 2 ....+ (k + 1) &= (1 + 2 + ... + k) + (k + 1) \\ &= \frac{k(k+1)}{2} + (k + 1), \text{ क्योंकि } p(k) \text{ सत्य है।} \\ &= \frac{k(k+1)(k+2)}{2} \end{aligned}$$

अतः $p(k + 1)$ सत्य है।

अतः गणितीय आगमन नियम से हम जानते हैं कि प्रत्येक $n \in \mathbf{N}$ के लिए $p(n)$ सत्य है।

यह नियम वास्तव में क्या बताता है? यह बताता है कि यदि आप कुछ कदम, मान लीजिए m कदम चल सकते हैं, और यदि प्रत्येक चरण पर आप एक कदम और चल सकते हों, तब आप किसी भी दूरी तक चल कर जा सकते हैं। सुनने में तो यह बात सरल लगती है, लेकिन यह जानकर आपको शायद आश्चर्य होगा कि इस नियम के तकनीक का पहले पहल प्रयोग यूरोप वासियों ने किया था, और वह भी कुछ ही सदियों पहले, अर्थात् 16वीं शताब्दी में जब वेनिस के निवासी एफ. माउरोसाइकस (1494-1573) ने किया था। उन्होंने इस तकनीक का प्रयोग यह दर्शाने के लिए किया था कि

$$1 + 3 + ... + (2n - 1) = n^2.$$

फ़र्मा (1601-1665) ने इस तकनीक में और सुधार लाकर यह सिद्ध किया कि यह नियम प्रायः इस्तेमाल होने वाले गणित के निम्नलिखित नियम के तुल्य है।

सुक्रमण-नियम (Well-ordering principle) : **N** के किसी भी अरिक्त उपसमुच्चय का एक लघुतम अवयव होता है।

इन दोनों नियमों के बीच के संबंध को देखने के लिए गणितीय आगमन नियम के निम्नलिखित तुल्य रूप पर ग़ौर करें।

शब्द 'mathematical induction' का प्रयोग पहली दफ़ा द मॉर्गन ने किया था।

गणितीय आगमन नियम (तुल्य रूप) : मान लीजिए $S \subseteq \mathbf{N}$, जहाँ

i) $m \in S$

ii) प्रत्येक $k \in \mathbf{N}, k \geq m$ के लिए, निम्नलिखित निहितार्थ सत्य होता है :
$k \in S \Rightarrow k + 1 \in S.$

तब $S = \{m, m + 1, m + 2,.........\}$.

क्या आप गणितीय आगमन नियम के दोनों रूपों की तुल्यता को देख सकते हैं? यदि आप

$$S = \{n \in \mathbf{N} \mid p(n) \text{ सत्य है}\}$$

लें, तो आप देख सकते हैं कि ऊपर लिखा गया नियम पिछले रूप का ही पुनर्लेखन है।

आइए अब हम उपपत्ति का एक ऐसा उदाहरण लें जिसमें गणितीय आगमन नियम को लागू किया गया हो।

उदाहरण 9 : गणितीय आगमन से सिद्ध कीजिए कि

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots\dots\dots + n^2 = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1) \ \forall \ n \in \mathbf{N}.$$

हल : हम विधेय

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots\dots\dots + n^2 = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1)$$

को p(n) से प्रकट करते हैं।

ध्यान दीजिए कि जब तक हमें n का मान ज्ञात नहीं होता, तब तक p(n) एक विधेय होता है न कि कथन।

चूंकि इसे हम प्रत्येक $n \in \mathbf{N}$ के लिए सिद्ध करना चाहते हैं, हम $m = 1$ लेते हैं।

चरण 1 : p(1), $1^2 = \frac{1}{6}(1+1)(2+1)$ है, जो कि सत्य है।

चरण 2 : मान लीजिए किसी $k \in \mathbf{N}$ के लिए p(k) सत्य है,

अर्थात् $1^2 + 2^2 + \dots\dots\dots + k^2 = \frac{k}{6}(k+1)(2k+1)$ सत्य है।

चरण 3 : जाँच करना कि चरण 2 में की गई परिकल्पना में p(k+1) की सत्यता निहित है। आइए देखें।

p(k+1) है: $1^2 + 2^2 + \dots\dots\dots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{k+1}{6}(k+2)(2k+3)$

$$\Leftrightarrow (1^2 + 2^2 + \dots\dots\dots + k^2) + (k+1)^2 = \frac{k+1}{6}(k+2)(2k+3)$$

$$\Leftrightarrow \frac{k}{6}(k+1)(2k+1) + (k+1)^2 = \frac{k+1}{6}(k+2)(2k+3),$$ क्योंकि p(k) सत्य है।

$$\Leftrightarrow \frac{k+1}{6}\left[k(2k+1) + 6(k+1)\right] = \frac{k+1}{6}(k+2)(2k+3)$$

$\Leftrightarrow 2k^2 + 7k + 6 = (k+2)(2k+3)$, दोनों ओर $\frac{k+1}{6}$ से भाग देने पर।

जो कि सत्य है।

अत: 'p(k) सत्य है' में यह निहित है कि p(k+1) भी सत्य होगा।

इस तरह हम देखते हैं कि गणितीय आगमन नियम के दोनों प्रतिबंध यहाँ लागू होते हैं। अत: इसका निष्कर्ष भी अवश्य लागू होगा, अर्थात् प्रत्येक $n \in \mathbf{N}$ के लिए p(n) सत्य है।

* * *

क्या आपने उदाहरण 9 को ध्यान से पढ़ा है? यदि 'हां' तो इस बात की ओर आपने अवश्य ध्यान दिया होगा कि उपपत्ति को निम्न तीन चरणों में लागू करना होता है :

चरण 1 (जिसे **आगमन का आधार** कहा जाता है) : यह जांच करना कि किसी एक $m \in \mathbf{N}$ के लिए p(m) सत्य है या नहीं।

चरण 2 (जिसे **आगमन परिकल्पना** कहा जाता है) : यह मान लेना कि किसी भी $k \in \mathbf{N}, k \geq m$ के लिए, p(k) सत्य है।

चरण 3 (जिसे **आगमन चरण** कहा जाता है) : प्रत्यक्ष या परोक्ष उपपत्ति से दिखाना कि p(k+1) सत्य है।

आइए अब हम एक ऐसा उदाहरण लें जिसमें $m \neq 1$.

उदाहरण 10 : दिखाइए कि $2^n > n^3$, जहां $n \geq 10$.

हल : हम विधेय '$2^n > n^3$' को p(n) से प्रकट करेंगे।

चरण 1 : $n = 10$ पर $2^{10} = 1024$, जो 10^3 से बड़ी है। अत: p(10) सत्य है।

चरण 2 : हम यह मान लेते हैं कि किसी भी $k \geq 10$ के लिए p(k) सत्य है। अत: $2^k > k^3$.

चरण 3 : अब हम सिद्ध करना चाहते हैं कि $2^{k+1} > (k+1)^3$.

ध्यान दीजिए कि $2^{k+1} = 2.2^k > 2.k^3$, हमारी परिकल्पना के अनुसार।

और $2k^3 \quad > \left(1+\frac{1}{10}\right)^3 k^3$, क्योंकि $2 > \left(1+\frac{1}{10}\right)^3$

$\geq \left(1+\frac{1}{k}\right)^3 . k^3$, क्योंकि $k \geq 10.$

$= (k+1)^3.$

इस तरह, $k \geq 10$ के लिए यदि $p(k)$ सत्य है, तो $p(k+1)$ भी सत्य होगा।

इस तरह गणितीय आगमन नियम के अनुसार सभी $n \geq 10$ के लिए $p(n)$ सत्य है।

* * *

अब आप इस नियम को लागू करके नीचे दिए गए प्रश्न हल क्यों नहीं करते?

E14) गणितीय आगमन से सिद्ध कीजिए कि

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots\ldots\ldots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n} \forall\, n \in \mathbf{N}.$$

E15) दिखाइए कि किसी भी पूर्णांक $n > 1$ के लिए, $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$

(संकेत : आगमन का आधार $p(2)$ है।)

आगे बढ़ने से पहले **एक चेतावनी !** यदि सिद्ध करना हो, कि $\forall\, n \geq m$, $p(n)$ सत्य है, तो आगमन का आधार और आगमन चरण **दोनों** ही प्रतिबंध लागू होने चाहिए। यदि इनमें से कोई भी एक प्रतिबंध लागू नहीं होता, तो हम इस निष्कर्ष पर नहीं पहुंच सकते कि $\forall\, n \geq m$, $p(n)$ सत्य है।

उदाहरण के लिए, मान लीजिए कि $p(n)$, $(x + y)^n \leq x^n + y^n \;\forall\, x, y \in \mathbf{R}$ है। तब $p(1)$ सत्य होगा। परन्तु चरण 2 और चरण 3 लागू नहीं होते। अत: प्रत्येक $n \in \mathbf{N}$ के लिए $p(n)$ सत्य नहीं होगा। (क्या आप n का एक ऐसा मान ज्ञात कर सकते हैं जिसके लिए $p(n)$ असत्य हो?)

एक और उदाहरण के तौर पर, $p(n)$ को कथन '$1 + 2 + \ldots + n < n$' लीजिए। फिर, यदि $p(k)$ सत्य है, तो $p(k + 1)$ भी सत्य होगा (इसे सिद्ध कीजिए!)। लेकिन आधार चरण किसी भी $m \in \mathbf{N}$ के लिए सत्य नहीं है। और, जैसा कि आप देख सकते हैं, $p(n)$ असत्य है।

आइए अब हम एक ऐसी स्थिति पर विचार करें जिसमें हमें लगता है कि आगमन नियम लागू होना चाहिए, लेकिन वास्तव में नियम लागू नहीं हो पाता। इस संबंध में संख्या अनुक्रम 1, 1, 2, 3, 5, **8** .... लीजिए। इन संख्याओं को **फ़िबोनाची संख्याएं** कहते हैं, जो कि इतालवी गणितज्ञ फ़िबोनाची के नाम पर रखा गया है। तीसरे पद के बाद, इस अनुक्रम का प्रत्येक पद पिछले दो पदों का जोड़ होता है। अत:, यदि a_n, nवाँ पद हो, तो $a_1=1$, $a_2=1$ और $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \;\forall\, n \geq 3.$

मान लीजिए हम गणितीय आगमन नियम की सहायता से दर्शाना चाहते हैं कि $a_n < 2^n \;\forall\, n \in \mathbf{N}.$ तब, यदि $p(n)$ विधेय $a_n < 2^n$ हो, तो हम जानते हैं कि $p(1)$ सत्य है।

अब मान लीजिए कि हम जानते हैं कि किसी $k \in \mathbf{N}$ के लिए $p(k)$ सत्य होता है, अर्थात् $a_k < 2^k$. हम गणितीय आगमन नियम की सहायता से दिखाना चाहते हैं कि $a_{k+1} < 2^{k+1}$, अर्थात् $a_k + a_{k-1} < 2^{k+1}$. लेकिन हमें a_{k+1} के बारे में कुछ भी पता नहीं है। अत: यहाँ हम ऊपर बताए गए रूप में आगमन नियम को किस प्रकार लागू कर सकते हैं? ऐसी स्थिति में आगमन नियम के एक अधिक प्रबल रूप को इस्तेमाल करने की ज़रूरत होती है। आइए, देखें कि यह प्रबल रूप क्या है।

प्रबल गणितीय आगमन नियम (Principle of strong mathematical induction) : मान लीजिए $p(n)$ प्राकृतिक संख्या n में एक विधेय है। और मान लीजिए कि हम यह दर्शा सकते हैं कि

i) किसी $m \in \mathbf{N}$ के लिए $p(m)$ सत्य है, और

ii) जब $p(m), p(m+1), \ldots.., p(k)$ सत्य होते हैं, तब $p(k+1)$ भी सत्य होता हे, जहाँ $k \geq m$.

तब हम यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि सभी प्राकृतिक संख्याओं $n \geq m$ के लिए $p(n)$ सत्य है।

हम पिछले नियम की तुलना में इस नियम को अधिक प्रबल क्यों कहते हैं? कारण यह है कि आगमन चरण में हम कुछ अधिक परिकल्पनाएं, अर्थात् **m और k के बीच स्थित प्रत्येक n के लिए p(n) सत्य है,** मान कर चलते हैं, न केवल यह कि p(k) सत्य है।

आइए अब हम पुन: फ़िबोनाची अनुक्रम को लें। गणितीय आगमन नियम के प्रबल रूप को लागू करने के लिए हम $m = 1$ लेते हैं। हम देख चुके हैं कि p(1) सत्य है। हमें यह भी देखना होगा कि p(2) सत्य है या नहीं। ऐसा इसलिए क्योंकि हमें $n \geq 3$ के लिए संबंध $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ का प्रयोग करना होगा।

प्रबल रूप को लागू करने के लिए हमें चरण 1 की जाँच n के एक से अधिक मानों के लिए करनी होती है।

अब हम यह जानते हैं कि p(1) और p(2) दोनों सत्य हैं। आइए हम अगले चरण पर विचार करें। चरण 2 में हम किसी स्वेच्छ $k \geq 2$ के लिए मान लेते हैं कि प्रत्येक n के लिए p(n) सत्य है, जहाँ $1 \leq n \leq k$, अर्थात् $a_n < 2^n$, जहाँ $1 \leq n \leq k$.

अंत में, अर्थात् चरण 3 में हमें यह दिखाना है कि p(k+1) सत्य है, अर्थात् $a_{k+1} < 2^{k+1}$. अब

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= a_k + a_{k-1} \\ &< 2^k + 2^{k-1}, \text{चरण 2 में की गई परिकल्पना के अनुसार।} \\ &= 2^{k-1}(2+1) \\ &< 2^{k-1}.\, 2^2 \\ &= 2^{k+1} \end{aligned}$$

$\therefore$ p(k+1) सत्य है।

$\therefore \forall\, n \in \mathbf{N}$, p(n) सत्य है।

यूं तो देखने में गणितीय आगमन नियम का "प्रबल" रूप और "दुर्बल" रूप अलग-अलग लगते हैं। परन्तु **वास्तव में, दोनों रूप तुल्य हैं।** ऐसा इसलिए है, क्योंकि इनमें से किसी भी एक रूप को दूसरे रूप से प्राप्त किया जा सकता है। अत: हम गणितीय आगमन के किसी भी रूप का प्रयोग कर सकते हैं। किसी दी हुई स्थिति में हम उपयुक्त रूप का प्रयोग करते है। जैसे कि, ऊपर दिए गए उदाहरण की तरह नीचे दिए गए उदाहरण में आप मानेंगे कि गणितीय आगमन नियम के प्रबल रूप का प्रयोग करना अधिक उत्तम है।

उदाहरण 11 : आगमन की सहायता से सिद्ध कीजिए कि कोई भी पूर्णांक $n \geq 2$ या तो अभाज्य है या अभाज्य पूर्णांकों का गुणनफल है।

हल : यहाँ p(n) विधेय 'n एक अभाज्य पूर्णांक है या अभाज्य पूर्णांकों का गुणनफल है।' है।

चरण 1 (आगमन का आधार) : चूंकि 2 अभाज्य पूर्णांक है, इसलिए p(2) सत्य है।

चरण 2 (आगमन परिकल्पना) : मान लीजिए कि p(n) सत्य है, जहाँ $2 \leq n \leq k$, अर्थात् p(3), p(4),....., p(k) सत्य हैं।

चरण 3 (आगमन चरण) : अब $p(k + 1)$ लीजिए। यदि $k + 1$ एक अभाज्य पूर्णांक है, तो $p(k + 1)$ सत्य होगा। यदि $k + 1$ अभाज्य नहीं है, तो $k + 1 = r\,s$ जहाँ, $2 \leq r \leq k$ और $2 \leq s \leq k$. लेकिन हमारी आगमन परिकल्पना के अनुसार p(r) सत्य है और p(s) सत्य है। अत: r और s या तो अभाज्य पूर्णांक होंगे या अभाज्य पूर्णांकों के गुणनफल होंगे। इसलिए, $k + 1$ अभाज्य पूर्णांकों का गुणनफल होगा। अत:, $p(k + 1)$ सत्य है।

इसलिए $\forall\, n \geq 2$, p(n) सत्य है।

* * *

आप नीचे दिए गए कुछ प्रश्न हल कीजिए।

E16) यदि a_1, a_2......... फ़िबोनाची अनुक्रम के पद हों, तो गणितीय आगमन नियम के दुर्बल रूप और प्रबल रूप की सहायता से यह दिखाइए कि $a_n > 3/2\ \forall\, n \geq 3$. बताइए कि नियम का कौन-सा रूप आपको अधिक उपयुक्त लगा है?

E17) कथन 'कोई भी n कंचे बराबर साइज़ के हैं।' के आगमन से निम्नलिखित "उपपत्ति" पर विचार कीजिए, और बताइए कि यह ग़लत क्यों है।

आगमन का आधार : स्पष्ट है कि $n = 1$ के लिए कथन सत्य है।

आगमन परिकल्पना : मान लीजिए कि $n = k$ के लिए कथन सत्य है।

आगमन चरण : अब कोई भी $k + 1$ कंचे $1, 2, \ldots, k + 1$ लीजिए। आगमन परिकल्पना के अनुसार k कंचे $2, 3, \ldots, k + 1$ समान साइज़ वाले हैं। अत: सभी $k + 1$ कंचे समान साइज़ वाले हैं।

अत: प्रत्येक n के लिए दिया हुआ कथन सत्य है।

E18) सिद्ध कीजिए कि निम्नलिखित परिणाम गणितीय आगमन नियम (प्रबल रूप) के तुल्य है।
मान लीजिए $S \subseteq \mathbf{N}$, जहाँ
i) $m \in S$
ii) यदि $m, m + 1, m + 2, \ldots, k$, S के अवयव हैं, तो $k + 1 \in S$.
तब $S = \{n \in \mathbf{N} \mid n \geq m\}$.

E19) $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}} \leq 2\sqrt{n} - 1 \ \forall \ n \in \mathbf{N}$ को सिद्ध करने के लिए आप गणितीय आगमन नियम के किस रूप का प्रयोग करेंगे, और क्यों? साथ ही, असमिका को सिद्ध कीजिए।

इसके साथ ही हम गणितीय कथनों को सिद्ध या असिद्ध करने के विभिन्न तकनीकों पर अपनी चर्चा समाप्त कर रहे हैं। इस इकाई में आपने जो कुछ पढ़ा है आइए उसका संक्षिप्त विवरण देखें।

2.5 सारांश

इस इकाई में आपने निम्नलिखित तथ्यों का अध्ययन किया है।

1. गणितीय कथन की उपपत्ति क्या और कैसी होती है। साथ ही, ज़्यादा इस्तेमाल होने वाले 4 अनुमान-नियम, यानी

   i) वियोजन नियम (या मोडस पोनन्ज) : $[(p \to q) \wedge p] \Rightarrow q$
   ii) प्रतिस्थिति नियम (या मोडस तोलन्ज) : $[(p \to q) \wedge \sim q] \Rightarrow \sim p$
   iii) वियोजित तर्क : $[(p \vee q) \wedge \sim p] \Rightarrow q$
   iv) परिकल्पनात्मक तर्क : $[(p \to q) \wedge (q \to r)] \Rightarrow (p \to r)$

2. प्रत्यक्ष उपपत्ति का वर्णन और उदाहरण। यह विधि मोडस पोनन्ज़ पर आधारित है।
3. दो प्रकार की परोक्ष उपपत्तियां : प्रतिस्थितक द्वारा उपपत्ति, और अंतर्विरोध द्वारा उपपत्ति।
4. कथन को असिद्ध करने के लिए प्रतिउदाहरण का प्रयोग।
5. गणितीय आगमन नियम का "प्रबल" और "दुर्बल" रूप, और सुक्रमण नियम के साथ उनकी तुल्यता।

2.6 हल/उत्तर

E1) उदाहरण के लिए :

प्रमेय : $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$, जहाँ $x, y \in \mathbf{R}$.

उपपत्ति : $x, y \in \mathbf{R}$ के लिए $(x + y)^2 = (x + y)(x + y)$ (वर्ग की परिभाषा से)

$(x + y)(x + y) = x(x + y) + y(x + y)$ (बंटन-नियम से, जिसे पहले सिद्ध किया जा चुका है)

$x(x + y) + y(x + y) = x^2 + 2xy + y^2$ (फिर बंटन-नियम से और बीजीय पदों के जोड़ और गुणा की परिभाषा से)

अत:, $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ (पहले से सिद्ध किए गए कथन '$a = b$ और $b = c$ से निकलता है कि $a = c$' को लागू करने पर।)

E2) नहीं, जब तक कि इसे सत्य सिद्ध नहीं कर दिया जाता।

E3)

					परिकल्पनाएं	परिकल्पनाएं	निष्कर्ष
p	q	r	$\sim r$	$q \vee \sim r$	$p \rightarrow q \vee \sim r$	$q \rightarrow p$	$p \rightarrow r$
T	T	T	F	T	T	T	T
T	T	F	T	T	T	T	F
T	F	T	F	F	F	T	T
T	F	F	T	T	T	T	F
F	T	T	F	T	T	F	T
F	T	F	T	T	T	F	T
F	F	T	F	F	T	T	T
F	F	F	T	T	T	T	T

पंक्तियों 1, 2, 4, 7, 8 में परिकल्पनाएं सत्य हैं। इसलिए, यदि इन पंक्तियों में निष्कर्ष भी सत्य हो, तो तर्क मान्य होगा। परन्तु यह बात पंक्ति 2 में लागू नहीं होती। अत: तर्क मान्य नहीं है।

E4) i) मान लीजिए

p: रबड़ सफेद है।

q: ऑक्सीजन धातु है।

तब तर्क होगा :

$$\begin{array}{l} p \vee q \\ \sim p \\ \hline \therefore q \end{array}$$

	निष्कर्ष	परिकल्पनाएं	परिकल्पनाएं
p	q	$\sim p$	$p \vee q$
T	T	F	T
T	F	F	T
F	T	T	T
F	F	T	F

इसकी सत्य सारणी बग़ल में दी गई है।

केवल तीसरी पंक्ति में सभी परिकल्पनाएं सत्य हैं और, क्योंकि इस पंक्ति में **निष्कर्ष** भी सत्य है, इसलिए तर्क मान्य है।

ii) तर्क है $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \Rightarrow (p \rightarrow r)$, जहाँ

p : मधु सरपंच है।

q : मधु पंचायत की मुखिया है।

r : मधु जायदाद के मामलों पर अपना निर्णय देती है।

यह मान्य है, क्योंकि जब कभी दोनों परिकल्पनाएं सत्य होती हैं, तब निष्कर्ष भी सत्य होता है (नीचे की सारणी देखिए)।

			परिकल्पनाएं	परिकल्पनाएं	निष्कर्ष
p	q	r	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow r$	$p \rightarrow r$
T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F
T	F	T	F	T	T
T	F	F	F	T	F
F	T	T	T	T	T
F	T	F	T	F	T
F	F	T	T	T	T
F	F	F	T	T	T

iii) तर्क है :

$[(p \vee q) \wedge (q \to r) \wedge \sim r] \Rightarrow q$, जहाँ

p: मुन्ना खाना बनाएगा।

q: मुन्नी कराटे का अभ्यास करेगी।

r: मुन्ना पढ़ायी करता है।

यह मान्य नहीं है, जैसा कि आप नीचे दी गई सत्य सारणी की पंक्ति 4 को देखकर जान सकते हैं।

	निष्कर्ष		परिकल्पनाएं	परिकल्पनाएं	परिकल्पनाएं
p	q	r	$\sim r$	$p \vee q$	$q \to r$
T	T	T	F	T	T
T	T	F	T	T	F
T	F	T	F	T	T
T	F	F	T	T	T
F	T	T	F	T	T
F	T	F	T	T	F
F	F	T	F	F	T
F	F	F	T	F	T

E6) हमें सिद्ध करना है कि $p \Rightarrow q$, जहां

p: $x \in \mathbf{R}$ जिससे कि $x^2 = 9$, और

q: $x = 3$ या $x = -3$.

अब, $x^2 = 9 \Rightarrow \sqrt{x^2} = \pm\sqrt{9} \Rightarrow x = \pm 3$.

अतः, p सत्य है और $(p \Rightarrow q)$ सत्य है से यह निष्कर्ष निकलता है कि q सत्य है।

E7) यदि f आच्छादी नहीं है, तो f, X से स्वयं पर 1-1 फलन नहीं है।

E8) हम सिद्ध करना चाहते हैं कि $\sim q \Rightarrow \sim p$, जहाँ

p: $x \in \mathbf{Z}$ जिसके लिए x^2 सम संख्या है।

q: x सम संख्या है।

हम प्रारंभ में यह मानकर चलते हैं कि q असत्य है, अर्थात् x विषम संख्या है।

तब $x = 2m + 1$, जहाँ $m \in \mathbf{Z}$.

इसलिए $x^2 = 4m^2 + 4m + 1 = 2(2m^2 + 2m) + 1$.

अतः x^2 विषम संख्या हैं, अर्थात् p असत्य है।

इस तरह, $\sim q \Rightarrow \sim p$, अतः $p \Rightarrow q$.

E9) i) इसे उदाहरण 5 की तरह कीजिए।

ii) आइए, मान लें कि $x^3 + 4x = 0$ और $x \neq 0$.

तब $x(x^2 + 4) = 0$ और $x \neq 0$.

अतः $x^2 + 4 = 0$ अर्थात् $x^2 = -4$.

लेकिन $x \in \mathbf{R}$ और $x^2 = -4$ एक अंतर्विरोध है।

इसलिए हमारी परिकल्पना असत्य है। अतः, दिया हुआ कथन सत्य है।

E10) **प्रत्यक्ष उपपत्ति :** $x^3 + 4x = 0 \Rightarrow x(x^2 + 4) = 0$.

$\Rightarrow x = 0$ या $x^2 + 4 = 0$

$\Rightarrow x = 0$ क्योंकि $x^2 \neq -4 \; \forall \; x \in \mathbf{R}$.

प्रतिस्थितक द्वारा उपपत्ति : मान लीजिए $x \neq 0$.
तब $x(x^2+4) \neq 0$.
$\Rightarrow x^3+4x \neq 0$.
$\therefore$ प्रत्येक $x \in \mathbf{R}\setminus\{0\}$ के लिए $x^3+4x \neq 0$.
इस तरह हमने सिद्ध कर दिया है कि '$x \in \mathbf{R}$ के लिए $x \neq 0 \Rightarrow x^3+4x \neq 0$'.
अर्थात् '$x \in \mathbf{R}$ के लिए $x^3+4x = 0 \Rightarrow x = 0$'.

E11) मान लीजिए C सत्य बोलती है। इसलिए D सदा सत्य बोलती है। अत: C सदा झूठ बोलती है, जो कि एक अंतर्विरोध है। इसलिए C सत्यवादी नहीं हो सकती, अर्थात् C झूठी है। अत: D सत्यवादी है।

E12) i) $x = 0$, या $x = -1$, या....... के बारे में क्या विचार है?
ii) उदाहरण के लिए, $n = 2$, $x = 1$ और $y = -1$ लीजिए।
iii) यहाँ हम एक ऐसा f ले सकते हैं, जहाँ f, 1/1 तो है, लेकिन आच्छादी नहीं, या जहाँ f आच्छादी तो है, परन्तु 1-1 नहीं।
$f: \mathbf{N} \to \mathbf{N}: f(x) = x + 10$ लीजिए। दिखाइए कि यह 1-1 है, परन्तु आच्छादी नहीं।

E13) i) **प्रमेय** : भुजा a और परिमाप 2a वाले प्रत्येक समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल 3 से भाज्य होता है।
उपपत्ति : चूंकि ऐसा कोई भी समबाहु त्रिभुज नहीं है जो कि परिकल्पना को संतुष्ट करे, इसलिए कथन शून्यत: सत्य है।
ii) **प्रमेय** : यदि कोई प्राकृतिक संख्या c, 5 से भाज्य हो, तो भुजा c वाले समबाहु त्रिभुज का परिमाप 3c होता है।
उपपत्ति : क्योंकि निष्कर्ष सदैव सत्य होता है, इसलिए कथन तुच्छत: सत्य है।

E14) मान लीजिए $p(n)$ दिया हुआ विधेय है।
चरण 1 : $p(1): 1 \leq 2-1$, जो सत्य है।
चरण 2 : मान लीजिए कि किसी $k \geq 1$ के लिए $p(k)$ सत्य है,

अर्थात्, $1+\frac{1}{4}+........+\frac{1}{k^2} \leq 2-\frac{1}{k}$.

चरण 3 : यह दिखाने के लिए कि $p(k+1)$ सत्य है, निम्नलिखित लीजिए :

$$1+\frac{1}{4}+........+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2} = \left(1+\frac{1}{4}+........+\frac{1}{k^2}\right)+\frac{1}{(k+1)^2}$$
$$\leq \left(2-\frac{1}{k}\right)+\frac{1}{(k+1)^2},\text{ चरण 2 से।}$$

अब, $\left(2-\frac{1}{k}\right)+\frac{1}{(k+1)^2} \leq 2-\frac{1}{(k+1)}$

यदि और केवल यदि $\frac{1}{(k+1)^2} \leq \frac{1}{k}-\frac{1}{(k+1)}$

यदि और केवल यदि $k \leq k+1$, जो कि सत्य है।

इसलिए, $\left(2-\frac{1}{k}\right)+\frac{1}{(k+1)^2} \leq 2-\frac{1}{(k+1)}$.

अत: $p(k+1)$ सत्य है।

इस तरह, गणितीय आगमन नियम के अनुसार $\forall\, n \in \mathbf{N}$, $p(n)$ सत्य है।

E15) $p(2): \frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}} > \sqrt{2}$, जो सत्य है।
अब, मान लीजिए कि किसी $k \geq 2$ के लिए $p(k)$ सत्य है।

तब $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+....+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}} > \sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}$, क्योंकि $p(k)$ सत्य है।

$$= \frac{\sqrt{k(k+1)}+1}{\sqrt{k+1}}$$

$> \sqrt{k+1}$, क्योंकि $\sqrt{k+1} > \sqrt{k}$.

अतः $p(k+1)$ सत्य है।

$\therefore \forall\, n \geq 2, p(n)$ सत्य है।

E16) यहाँ हम गणितीय आगमन नियम के प्रबल रूप को लागू करेंगे।

मान लीजिए $p(n) : a_n > \frac{3}{2}$.

चरण 1 : $p(3)$ और $p(4)$ सत्य हैं।

चरण 2 : अब यह मान लीजिए कि $k \in \mathbf{N}, k \geq 3$ के लिए, $p(n)$ सत्य होता है, सभी n के लिए जहाँ $3 \leq n \leq k$.

चरण 3 : हम दिखाना चाहते हैं कि $p(k+1)$ सत्य है। अब

$$a_{k+1} = a_k + a_{k-1} > \frac{3}{2} + \frac{3}{2}, \text{ चरण 2 से।}$$

$$> \frac{3}{2}.$$

$\therefore p(k+1)$ सत्य है।

इस तरह $\forall\, n \geq 3, p(n)$ सत्य है।

यहाँ आप दुर्बल रूप को भी लागू कर सकते हैं क्योंकि यह दिखाने के लिए कि $p(k+1)$ सत्य है, केवल यह दिखा देना ही काफ़ी होगा कि $a_k > \frac{3}{2}$.

इस तरह, यहाँ पर दुर्बल रूप को लागू करना अधिक उपयुक्त है, क्योंकि कम परिकल्पनाओं से भी वही परिणाम प्राप्त होता है।

E17) प्रश्न आगमन चरण से संबंधित है। पहले कंचे की साइज़ अन्य k कंचों की साइज़ से अलग हो सकती है। इसलिए हमने यह नहीं दर्शाया है कि जब कभी $p(k)$ सत्य होता है, $p(k+1)$ भी सत्य होता है।

E18) गणितीय आगमन नियम के प्रबल रूप के कथन के संदर्भ में मान लीजिए कि $S = \{n \in \mathbf{N} \mid p(n)$ सत्य है $\}$।

तब आप दर्शा सकते हैं कि किस प्रकार इस प्रश्न में दिया गया रूप वही है जो कि गणितीय आगमन नियम के प्रबल रूप के कथन का है।

E19) मान लीजिए $p(n) : \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}} \leq 2\sqrt{n} - 1.$

यहाँ दुर्बल रूप लागू करना ही काफ़ी होगा, क्योंकि $p(k)$ की सत्यता ही काफी है यह सिद्ध करने के लिए कि $p(k+1)$ सत्य है। $p(k+1)$ की सत्यता सिद्ध करने के लिए हमें यह मान लेने की आवश्यकंता नहीं हैं कि $p(1), p(2), \ldots\ldots, p(k)$ भी सत्य है। आइए हम सिद्ध करें कि $\forall\, n \in \mathbf{N}, p(n)$ सत्य है।

अब, $p(1) : 1 \leq 2 - 1$ जो कि सत्य है।

आगे, मान लीजिए कि किसी $k \in \mathbf{N}$ के लिए $p(k)$ सत्य है।

तब $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots\ldots + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} \leq (2\sqrt{k} - 1) + \frac{1}{\sqrt{k+1}}$, क्योंकि $p(k)$ सत्य है।

अब $2\sqrt{k} - 1 + \frac{1}{\sqrt{k+1}} \leq 2\sqrt{k+1} - 1$

$\Leftrightarrow 2\left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right) \geq \frac{1}{\sqrt{k+1}}$

$\Leftrightarrow 2(k + 1 - \sqrt{k(k+1)}) \geq 1.$

$\Leftrightarrow 1 \geq 0$, जो कि सत्य है।

$\therefore$ p(k + 1) सत्य है।

$\therefore \forall\, n \in \mathbf{N}$, p(n) सत्य है।