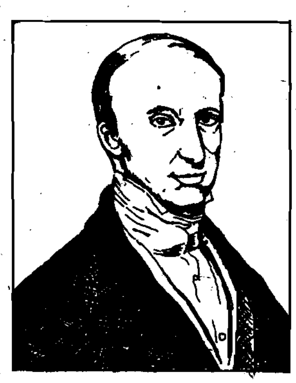
इकाई 1 अवकल समीकरण की प्रकृति

इकाई की रूपरेखा

1.1 प्रस्तावना

अवकल समीकरण गणित का वह भाग है जो भौतिक विज्ञान को समझने में एक महत्वपूर्ण भूमिका निभाता है। वस्तुतः यह उच्च विश्लेषण से संबंधित अधिकांश संकल्पनाओं और सिद्धांतों का स्रोत है। भौतिकी, इंजीनियरी, रसायन तथा अनेक अन्य शिखाओं में कुछ समस्याओं को निरूपित करने के लिए एक गणितीय निर्देश (mathematical model) का निर्माण करना अब आवश्यक हो गया है। प्रायः इन गणितीय निर्देशों में हमें एक ऐसे अज्ञात फलन का पता लगाना होता है जो उस समीकरण को संतुष्ट करता है जिसमें अज्ञात फलन के अवकलज एक महत्वपूर्ण भूमिका निभाते हैं। ऐसे समीकरणों को **अवकल समीकरण** (differential equations) कहा जाता है। अवकल समीकरण का प्राथमिक उद्देश्य भौतिक जगत में हो रहे परिवर्तन का अध्ययन करने के लिए उसे एक साधन के रूप में प्रयोग करना है।

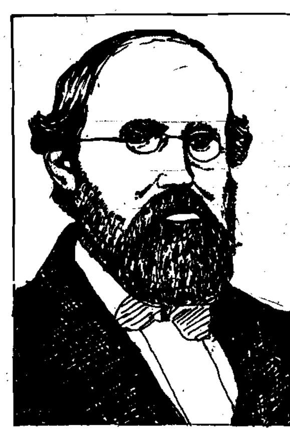
आपको याद होगा कि यदि $y = f(x)$ एक दिया हुआ फलन हो तो उसके अवकलज $\frac{dy}{dx}$ को x के सापेक्ष y का परिवर्तन दर माना जा सकता है (एम.टी.ई-01 के खंड 1 की इकाई 3 देखिए)। सर आइज़क न्यूटन ने यह देखा कि प्राकृतिक विज्ञान के कुछ महत्वपूर्ण नियमों को परिवर्तन दर वाले समीकरणों के रूप में प्रस्तुत किया जा सकता है। ऐसे प्राकृतिक नियम का एक सुप्रसिद्ध उदाहरण न्यूटन का द्वितीय गति-नियम है। न्यूटन ने कण की गति को एक ऐसे समीकरण के रूप में प्रस्तुत किया जिसमें एक अज्ञात फलन और उस फलन के एक या अधिक अवकलज थे।



कॉशी (1789-1857)

सन् 1650-51 से ही आइज़क न्यूटन, गॉटफ्राइड लाइबनिज़ जैक्वीज बर्नौली, जीन बर्नौली और क्रिश्चियन हाइगेन्स जैसे वैज्ञानिक अवकल समीकरणों को हल करने में जुटे हुए थे। उनके द्वारा विकसित अनेक विधियां आज भी लागू की जाती हैं। अठाहरवीं शताब्दी में लियोनहार्ड ऑयलर, डेनियल बर्नौली, जोसेफ लगरांज और अन्य गणितज्ञों ने इस विषय के विकास में काफी योगदान दिया। गणितज्ञों जैसे कि कॉशी, रीमान, पिकार्ड, प्वांकारे, लियापूनोव और बर्कौफ़ के शोध कार्यों के द्वारा ही साधारण अवकल समीकरण के विकास को आधुनिक गणित की एक शाखा के रूप में माना जाने लगा।

न केवल भौतिकीविद और इंजीनियर ही अवकल समीकरणों को लागू करते हैं बल्कि आज पशुओं की संख्या के अध्ययन और महामारी रोग के अध्ययन जैसी कुछ जैविकीय समस्याओं में भी इनका प्रयोग काफी होने लगा है। अर्थशास्त्र और अन्य समाज विज्ञानों में भी अवकल समीकरण काफी उपयोगी सिद्ध हो रहा है। अवकल समीकरण के सिद्धांत जिसमें फलनों और उनके अवकलज के परस्पर संबंध पर अध्ययन किया जाता है, उपयोगी होने के साथ-साथ स्वयं में काफी रोचक भी होते हैं।



रीमान (1826-1866)

इस इकाई में हम अवकल समीकरण से संबंधित आधारभूत संकल्पनाओं और परिभाषाओं से आपको परिचित कराएंगे। इस इकाई में हम भौतिक एवं इंजीनियरी रुचि की कुछ समस्याओं को भी अवकल समीकरण के रूप में प्रस्तुत करेंगे। हम इकाई 2 और इकाई 3 में विभिन्न प्रकार के अवकल समीकरणों को हल करने की कुछ विधियां बताएंगे। इस इकाई में दिए गए भौतिक प्रश्नों को हम इकाई 3 में हल करेंगे, जबकि हम प्रथम कोटि के समीकरणों को हल करने की विभिन्न विधियों से परिचित हो चुके होंगे।

उद्देश्य

इस इकाई का अध्ययन करने के बाद आप

- साधारण अवकल समीकरण और आंशिक अवकल समीकरण में अंतर कर सकेंगे;
- समघात, विषमघात, रैखिक और अरैखिक साधारण अवकल समीकरण परिभाषित कर सकेंगे;

- अवकल समीकरण की कोटि और घात में अंतर कर सकेंगे;
- साधारण अवकल समीकरण का हल परिभाषित कर सकेंगे;
- प्रारंभिक मान समस्या को पहचान सकेंगे;
- प्रथम कोटि वाले साधारण अवकल समीकरणों के हल का अस्तित्व और अद्वितीयता के प्रतिबंध को बता सकेंगे और उसका प्रयोग कर सकेंगे;
- कुछ भौतिक प्रश्नों के लिए अवकल समीकरण प्राप्त कर सकेंगे।

1.2 आधारभूत संकल्पनाएं

इस भाग में हम अवकल समीकरण सिद्धांत की आधारभूत संकल्पनाओं को परिभाषित करेंगे और उनकी व्याख्या करेंगे तथा उदाहरणों की सहायता से उन्हें समझाने का प्रयास करेंगे।

विषय कलन (एम टी ई-01) की इकाई 1 में आप यह पढ़ चुके हैं कि यदि दो चरों x और y वाले संबंध $y=f(x)$ का अस्तित्व हो तो हम x को **स्वतंत्र चर** (independent variable) और y को **आश्रित चर** (dependent variable) कहते हैं।

अब मान लीजिए $(n+1)$ चरों x और $t_1, t_2, \ldots, t_n$ वाला एक संबंध $f(x, t_1, t_2, \ldots, t_n)=0$ है जहां x का मान चरों $t_1, t_2, \ldots, t_n$ के मान पर निर्भर करता है। इस स्थिति में $t_1, t_2, \ldots, t_n$ को स्वतंत्र चर और x को आश्रित चर माना जाता है। उदाहरण के लिए समीकरण $y=x^2+2x+3$ लीजिए। यहां x स्वतंत्र चर है और y आश्रित चर है। इसी प्रकार, यदि हम $z=x^2+y^2+2xy$ लें तो यहां x और y स्वतंत्र चर होंगे और z एक आश्रित चर होगा।

ऐसा कोई भी समीकरण जो स्वतंत्र और आश्रित चरों तथा आश्रित चरों के अवकलजों के बीच के संबंध को प्रस्तुत करता है, अवकल समीकरण कहलाता है।

अवकल समीकरण की व्यापक परिभाषा इस प्रकार है :

परिभाषा : वह समीकरण जिसमें एक (या अधिक) आश्रित चर हों और इन आश्रित चरों के एक या अधिक स्वतंत्र चरों के सापेक्ष अवकलज हों को अवकल समीकरण कहा जाता है।

उदाहरण के लिए, निम्नलिखित सभी समीकरण अवकल समीकरण हैं।

$$\frac{dy}{dx} = \cos x \qquad \ldots (1)$$

$$y = x\frac{dy}{dx} + \frac{a}{dy/dx} \qquad \ldots (2)$$

$$y^2\frac{\partial z}{\partial x} + xy\frac{\partial z}{\partial y} = nzx \qquad \ldots (3)$$

समीकरण (3) में $\frac{\partial z}{\partial x}$ और $\frac{\partial z}{\partial y}$ क्रमशः x और y के सापेक्ष z के आंशिक अवकलज़ (partial derivative) हैं।

एक स्वतंत्र चर के सापेक्ष दो चरों वाले फलन $z=f(x,y)$ के आंशिक अवकलज को निम्नलिखित रूप में परिभाषित किया जा सकता है :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = f_x(x,y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y)-f(x,y)}{\Delta x}$$

जबकि सीमा का अस्तित्व हो। $\frac{\partial z}{\partial x}$ को x के सापेक्ष z का प्रथम कोटि का आंशिक अवकलज कहते हैं और यह y को अचर मानकर x के सापेक्ष z का अवकलन करने पर प्राप्त होता है। इसे 'del z बटा del x' के रूप में पढ़ा जाता है।

इसी प्रकार, y के सापेक्ष z के प्रथम कोटि आंशिक अवकलज को $\frac{\partial z}{\partial y}$ (या $\frac{\partial f}{\partial y}$ या $f_y(x,y)$) से प्रकट किया जाता है तथा

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} = f_y(x,y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}$$

आंशिक अवकलज के बारे में विस्तृत जानकारी प्राप्त करने के लिए आप एम टी ई-07 के खंड 2 की इकाई 5 देख सकते हैं।

ध्यान दीजिए कि

$$\frac{d}{dx}(xy) = y + x\frac{dy}{dx}$$

के प्रकार का समीकरण अवकल समीकरण नहीं होता। इस समीकरण में यदि आप बायें पक्ष को प्रसारित करें तो आप पाएंगे कि बायां पक्ष भी वही है जो दाहिना पक्ष है। ऐसे समीकरण को **सर्वसमिका** (identity) कहा जाता है। और, यह भी ध्यान रहे कि अवकल समीकरण के एक से अधिक आश्रित चर हो सकते हैं। उदाहरण के लिए,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + x = y$$

आश्रित चर x और y तथा स्वतंत्र चर t वाला एक अवकल समीकरण है।

अवकल समीकरणों को विभिन्न प्रकारों में वर्गीकृत किया जाता है। अवकल समीकरणों का अति स्पष्ट वर्गीकरण समीकरण में आश्रित चर और उसके अवकलज (या अवकलजों) की प्रकृति पर आधारित होता है। तदनुसार, हम अवकल समीकरणों को तीन वर्गों अर्थात् साधारण, आंशिक और संपूर्ण में वर्गीकृत करते हैं। यहां हमने इन तीनों प्रकार के समीकरणों को परिभाषित किया है।

परिभाषा : केवल साधारण अवकलजों (अर्थात एक स्वतंत्र चर के सापेक्ष अवकलज) वाले अवकल समीकरण को **साधारण अवकल समीकरण** (ordinary differential equation) कहा जाता है।

समीकरण,

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = x^2,$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = [\sin(xy)+2]^2 \text{ और}$$

$$y = x\frac{dy}{dx} + r\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$ साधारण अवकल समीकरण हैं।

ऐसे समीकरणों का प्रतिरूपी रूप (typical form) यह है

$$g\left[x, y(x), \frac{dy(x)}{dx}, \frac{d^2y(x)}{dx^2}, \ldots, \frac{d^ny(x)}{dx^n}\right] = 0 \qquad \ldots (4)$$

जब कभी हम समीकरण (4) के बारे में चर्चा करेंगे तब हम यह मान लेंगे कि g एक ज्ञात वास्तविक मान फलन है और मालूम किया जाने वाला अज्ञात चर y है। और, साधारण अवकल समीकरण में y और इसके अवकलज, x पर मूल्यांकित किए जाते हैं। यहां यह **देखा जा सकता है** कि समीकरण

$$\frac{dy(x)}{dx} = y\Big|_{(x+1)}$$

एक अवकल समीकरण नहीं है, क्योंकि y, $(x+1)$ पर मूल्यांकित है जब कि $\frac{dy}{dx}$, x पर मूल्यांकित है।
इसी प्रकार, समीकरण

$$\frac{dy(x)}{dx} = \int_0^x e^{xs}\, y(s)\, ds$$

अवकल समीकरण नहीं है, क्योंकि अज्ञात चर y समाकल के अंदर है। इसके अतिरिक्त यहां पर समीकरण के दाहिने पक्ष में y के मान 0 से x तक के अंतराल पर निर्भर करते हैं, जबकि अवकल समीकरण में अज्ञात चर y को **केवल x पर** मूल्यांकित करना होता है।

आइए अब हम आंशिक अवकल समीकरण (partial differential equation) परिभाषित करें।

परिभाषा : उस अवकल समीकरण को, जिसमें आंशिक अवकलज अर्थात् दो या अधिक स्वतंत्र चरों के सापेक्ष एक (या अधिक) आश्रित चर का अवकलज हो, **आंशिक अवकल समीकरण** कहा जाता है। आंशिक अवकल समीकरण के उदाहरण निम्नलिखित हैं :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0$$

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} - z = 0$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + xtu = 0$$

यहां आप यह भी देख सकते हैं कि पहले दिए गए समीकरण (1) और (2) साधारण अवकल समीकरण हैं, जबकि समीकरण (3) एक आंशिक अवकल समीकरण है।

और अब आपके हल करने के लिए एक प्रश्न :

E1) निम्नलिखित समीकरणों में से कौन-कौन से समीकरण अवकल समीकरण हैं? इन अवकल समीकरणों में कौन-कौन से समीकरण साधारण अवकल समीकरण हैं और कौन-से आंशिक?

क) $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + x\frac{dy}{dx} + y^3 = 5x+2$

ख) $\frac{dy}{dx} = \int_0^x \sin[xy(s)]\, ds$

ग) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$

घ) $\frac{dy(x)}{dx} = 5x \cdot y\Big|_{(x+1)}$

ङ) $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + y = \int_0^1 \sin[xy(s)]\, ds$

च) $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$

साधारण अवकल समीकरण और आंशिक अवकल समीकरण के अतिरिक्त एक तीसरे प्रकार का अवकल समीकरण अर्थात् संपूर्ण अवकल समीकरण (total differential equation) होता है। संपूर्ण अवकल समीकरण की परिभाषा देने के पहले हम प्रतीक dx और dy को एक अर्थ दे देना चाहते हैं जिससे कि हम अवकलज $\frac{dy}{dx}$ को दो राशियों dy और dx के एक भागफल के रूप में व्यक्त कर सकें। इन राशियों को **अवकल** (differential) कहा जाता है।

फलन $y = f(x)$ के लिए हम y के अवकल को

$dy = f'(x)dx$ से परिभाषित करते हैं

यदि $u = f(x, y)$ दो स्वतंत्र चरों x और y वाला फलन हो, तो हम यह जानते हैं कि

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$$

और

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$$

मान लीजिए x और y में क्रमशः Δx और Δy का परिवर्तन होने पर u में परिवर्तन Δu होता है जिससे कि $\lim_{\Delta x, \Delta y \to 0} \Delta u = du$. यहां du को **संपूर्ण अवकल** (total differential) कहा जाता है।

फलन $u(x, y)$ का संपूर्ण अवकल

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy \qquad \ldots (5)$$

या

$du = u_x dx + u_y dy$ होता है।

उदाहरण के लिए, यदि $u = x^2y - 3y$, तो

$du = 2xydx + (x^2-3)dy$

अब संबंध $u(x,y,z) = c$ लीजिए जहां x, y, z चर हैं और c एक अचर है। तब

$du = 0$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz = 0$$

यहां क्योंकि $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ और $\frac{\partial u}{\partial z}$, x, y और z के ज्ञात फलन हैं इसलिए ऊपर दिए गए समीकरण को

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0$$

के रूप में लिख सकते हैं और इसे तीन चरों वाला **संपूर्ण अवकल समीकरण** कहा जाता है। इस समीकरण में चरों x, y, z में से किसी भी एक चर को स्वतंत्र चर माना जा सकता है और शेष दो चरों को आश्रित चर।

इसी प्रकार यदि $u = u(x, y, z, t)$ तो संगत संपूर्ण अवकल समीकरण

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz + T\,dt = 0$$

के रूप का होगा।

ध्यान रहे कि संपूर्ण अवकल समीकरण में सदा ही तीन या अधिक चर होते हैं।

अब हम इसकी परिभाषा नीचे दे रहे हैं।

परिभाषा : संपूर्ण अवकल समीकरण में दो या अधिक आश्रित चर और एक स्वतंत्र चर जो कि समीकरण में स्पष्ट हो भी सकता है और नहीं भी हो सकता है के सापेक्ष इन आश्रित चरों के अवकलज होते हैं। उदाहरण के लिए समीकरण

$$yz(1+4xz)dx - xz(1+2xz)dy - xydz = 0$$

और $\frac{xdx+ydy+zdz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \frac{zdx-xdz}{x^2+z^2} + 3ax^2dx+3by^2dy+3cz^2dz=0$ संपूर्ण अवकल समीकरण हैं।

हम खंड 1 और **खंड** 2 में केवल साधारण अवकल समीकरण का अध्ययन करेंगे और **खंड** 3 और खंड 4 में संपूर्ण अवकल समीकरण और आंशिक अवकल समीकरण का अध्ययन करेंगे।

अब हम अवकल समीकरण की कोटि (order) और घात (degree) की संकल्पनाओं पर विचार करेंगे जिनके **आधार** पर हम अवकल समीकरणों का और भी वर्गीकरण कर सकते हैं।

हम सभी यह जानते हैं कि एक या अधिक स्वतंत्र चरों के सापेक्ष एक आश्रित चर के n में अवकल को कोटि n वाला अवकलज या केवल nवीं कोटि अवकलज कहा जाता है। उदाहरण के लिए $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ द्वितीय कोटि अवकलज हैं और $\frac{d^3z}{dx^3}$, $\frac{d^3z}{\partial x^2 \partial y}$ तृतीय कोटि अवकलज है।

परिभाषा : अवकल समीकरण की **कोटि** उस समीकरण में प्रस्तुत उच्चतम कोटि अवकलज की कोटि होती है। उदाहरण के लिए, समीकरण

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = x^2 \qquad \ldots (6)$$

द्वितीय कोटि वाला समीकरण है (क्योंकि यहां उच्चतम कोटि अवकलज $\frac{d^2y}{dx^2}$ है जो कि द्वितीय कोटि का है) जबकि

$$(x+y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 \qquad \ldots (7)$$

एक कोटि वाला समीकरण है (क्योंकि उच्चतम कोटि अवकलज $\frac{dy}{dx}$ है)।

इसी प्रकार, समीकरण

$$\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2 + 2\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + x^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = 0 \qquad \ldots (8)$$

तृतीय कोटि वाला समीकरण है, जबकि समीकरण

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \qquad \ldots (9)$$

द्वितीय कोटि वाला समीकरण है।

ध्यान दीजिए कि अवकल समीकरण की कोटि धन पूर्णांक होती है। और यदि अवकल समीकरण की कोटि n हो तो यह आवश्यक नहीं है कि समीकरण में कुछ या सभी निम्न कोटि अवकलज या स्वतंत्र चर स्पष्ट रूप में हों। उदाहरण के लिए समीकरण $\frac{d^4y}{dx^4} = 0$ चतुर्थ कोटि अवकल समीकरण है।

परिभाषा : अवकल समीकरण का **घात** समीकरण के उच्चतम कोटि अवकलज का उच्चतम घातांक (exponent) होता है जबकि समीकरण को इस रूप में व्यक्त कर दिया हो कि वह करणियों (radicals) और अवकलजों के भिन्नात्मक घात (fractional power) अथवा ऋणात्मक घात से मुक्त हो।

उदाहरण के लिए समीकरण (6) और (9) प्रथम घात वाले समीकरण हैं जबकि समीकरण (7) और (8) द्वितीय घात वाले।

समीकरण,

$$y - x\frac{dy}{dx} = r\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^3} \qquad \ldots \quad (10)$$

का घात 3 है, क्योंकि समीकरण को करणियों से मुक्त करने के लिए हमें दोनों पक्षों का वर्ग करना होता है, अर्थात्

$$\left[y - x\frac{dy}{dx}\right]^2 = r^2\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^3\right].$$

अब क्योंकि उच्चतम अवकलज अर्थात $\frac{dy}{dx}$ का उच्चतम घांताक तीन है, इसलिए परिभाषा के अनुसार समीकरण (10) का घात तीन है।

इसी प्रकार, समीकरण (2) अर्थात्

$y = x\frac{dy}{dx} + \frac{a}{dy/dx}$ का घात दो है।

ऐसा इसलिए है कि $\frac{dy}{dx}$ के ऋण घात को हटाने के लिए हम दोनों पक्षों को $\frac{dy}{dx}$ से गुणा करते हैं और तब हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है

$y\frac{dy}{dx} = x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + a$, जिसका घात दो है।

अब आप नीचे दिये गये प्रश्न को हल करने का प्रयास कर सकते हैं।

E2) निम्नलिखित अवकल समीकरणों की कोटि और घात ज्ञात कीजिए।

क) $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^{2/3} = 1 + 2\frac{dy}{dx}$

ख) $\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + y^2 = x$

ग) $\sin\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) + x^2y^2 = 0$

घ) $\frac{dy}{dx} + y^3 = 0$

ङ) $\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2} = r\frac{d^2y}{dx^2}$

च) $\frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right)^2 = x.$

छ) $x^2\,(dx)^2 + 2xy\,dx\,dy + y^2(dy)^2 - z^2(dz)^2 = 0$

अब हम आश्रित चरों और उनके अवकलजों के घात के आधार पर अवकल समीकरणों को दो वर्गों अर्थात् रैखिक (linear) और अरैखिक (non-linear) में वर्गीकृत करेंगे।

परिभाषा : जब साधारण अथवा आंशिक अवकल समीकरण में आश्रित चर और उसके अवकलज केवल एक घात वाले होते हैं और उच्च घात अथवा एक दूसरे के गुणनफलों के रूप में नहीं होते हैं, तो समीकरण को **रैखिक समीकरण** कहते हैं।

इस तरह हम यह पाते हैं कि रैखिक समीकरण के गुणांक (coefficients) या तो अचर (constants) होते हैं या स्वतंत्र चर अथवा स्वतंत्र चरों के फलन होते हैं। यदि साधारण अवकल समीकरण रैखिक नहीं हैं, तो उसे हम **अरैखिक** कहते हैं।

उदाहरण के लिए समीकरण

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = x^2$$

साधारण रैखिक अवकल समीकरण है। पर, $(x+y)^2 \frac{dy}{dx} = 1$ साधारण अरैखिक समीकरण है, क्योंकि इसमें $y^2 \frac{dy}{dx}$ और $2xy \frac{dy}{dx}$ जैसे पद हैं।

इसी प्रकार, समीकरण

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 = 0$$

अरैखिक आंशिक अवकल समीकरण है।

और यदि आंशिक अवकल समीकरण रैखिक नहीं है तो यह रैखिक कल्प (quasi-linear), सामि रैखिक (semi-linear) अथवा अरैखिक हो सकता है। हम इस पाठ्यक्रम के खंड 3 में इन वर्गीकरणों के प्रतिबंध पर चर्चा करेंगे।

अब आप नीचे दिए गए प्रश्न को हल करने का प्रयास कर सकते हैं।

E3) निम्नलिखित अवकल समीकरणों को रैखिक और अरैखिक समीकरणों में वर्गीकृत कीजिए।

क) $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} - z = 0$

ख) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 = 0$

ग) $\frac{dy}{dx} = (x+y)^2$

घ) $(1-x^2) \frac{d^2y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + n(n+1)y = 0$

ङ) $(x^2+y^2)^{3/2} \frac{d^2y}{dx^2} + \mu x = 0$

सामान्यतः जब कभी भी हम कोई समीकरण देखते हैं तो हम उसके हल के बारे में भी पता लगाना चाहते हैं। अब प्रश्न यह उठता है कि वास्तव में अवकल समीकरण के हल से हम क्या समझते हैं। अगले भाग में हम आपको इस प्रश्न का तथा नीचे दिए गए प्रश्नों जैसे कि

i) किन प्रतिबंधों के अधीन एक दिए हुए साधारण अवकल समीकरण के हल का अस्तित्व होता है ?

ii) यदि हल का अस्तित्व है, तो क्या यह अद्वितीय हल (unique solution) होता है?

आदि के उत्तर देंगे।

1.3 अवकल समीकरण का हल

आप यह जानते हैं कि n वीं कोटि वाला व्यापक साधारण अवकल समीकरण (general ordinary differential equation) अर्थात समीकरण (4)

$$g\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots\ldots\ldots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0$$

के रूप का होता है।

अवकलजों के लिए शिखी संकेत (prime notation)

$$y' = \frac{dy}{dx}, \; y'' = \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots\ldots\ldots, y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n}$$

का प्रयोग करके, हम समीकरण (4) को निम्न रूप में लिख सकते हैं

$$g(x, y, y', y'', \ldots\ldots\ldots, y^{(n)}) = 0 \qquad \ldots (11)$$

आइए अब हम यह मान लें कि हम समीकरण (11) को $y^{(n)}$ के लिए हल कर सकते हैं अर्थात् हम समीकरण (11) को

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots\ldots\ldots, y^{(n-1)}) \qquad \ldots (12)$$

के रूप में लिख सकते हैं।

यहां यह आसानी से सत्यापित किया जा सकता है कि एक दिया हुआ फलन $y=\phi(x)$ समीकरण (11) या (12) को संतुष्ट करता है। इसके लिए हमें y के अवकलज ज्ञात करने होते हैं और यह दिखाना होता है कि $y=\phi(x)$ और इसके अवकलज को समीकरण में प्रतिस्थापित करने पर यह समीकरण चर x में एक सर्वसमिका (identity) हो जाता है। यदि इस प्रकार के फलन y का अस्तित्व हो, तो इसे हम समीकरण (11) या (12) का हल कहते हैं।

फिर भी, प्रायः हम यह मान लेते हैं कि

i) $y=\phi(x)$ एक अंतराल $[a,b]$ पर परिभाषित है,

ii) y, $[a,b]$ पर n बार अवकलनीय है,

iii) y का a पर दक्षिण अवकलज (right derivative) होता है और b पर वाम अवकलज (left derivative)।

iv) $y=\phi(x)$, x का वास्तविक मान फलन (real-valued function), अथवा संमिश्र मान फलन (complex-valued function) (परिसर, $\mathbb{C}$ का एक उपसमुच्चय होता है) हो सकता है।

अब हम साधारण अवकल समीकरण के हल की परिभाषा देंगे।

परिभाषा : अंतराल I पर परिभाषित वास्तविक अथवा संमिश्र मान फलन $y=\phi(x)$ को अवकल समीकरण $g(x, y, y', \ldots\ldots\ldots, y^{(n)})=0$ का **हल** या **समाकल** कहा जाता है यदि $\phi(x)$, n बार अवकलनीय हो और यदि I के सभी x के लिए $x, \phi(x), \phi'(x), \ldots\ldots, \phi^{(n)}(x)$ इस समीकरण को संतुष्ट करते हों।

I कोई भी अंतराल $]a,b[$, $[a,b]$, $]0, \infty[$, $]-\infty, \infty[$, आदि हो सकता है।

उदाहरण के लिए प्रथम कोटि अवकल समीकरण

$$\frac{dy}{dx} = 2y-4x$$

का अंतराल $I = \{x: -\infty<x<\infty\}$ में हल $y=2x+1$ है। $y'=2$ और $2y-4x=2(2x+1)-4x=2=y'$ मालूम करके इसकी जांच की जा सकती है।

इसी प्रकार आप यह जांच कर सकते हैं कि

$$y=1+2x+ce^{2x}, \ -\infty<x<\infty,$$

भी अचर c के लिए इस समीकरण का एक हल है।

ऊपर दी गई परिभाषा में आपने इस बात की ओर अवश्य ध्यान दिया होगा कि समीकरण (11) का हल y, वास्तविक मान अथवा संमिश्र मान होता है। यदि y वास्तविक मान है तो हल को **वास्तविक हल** (real solution) कहते हैं और यदि y संमिश्र मान है तो हल को **संमिश्र हल** (complex solution) कहते हैं। हमारी रुचि प्रायः समीकरण (11) के वास्तविक हल में है। इस तथ्य को और अच्छी तरह से समझने के लिए आइए हम कुछ उदाहरण लें।

उदाहरण 1 : दिखाइए कि किसी भी अचर c के लिए, फलन $y(x)=ce^x$, $x\in\mathbf{R}$, समीकरण

$$\frac{dy}{dx} = y \ , \ x\in\mathbf{R} \qquad \ldots \quad (13)$$

का हल है।

हल : यहां I स्वयं **R** हैं। किसी भी $x\in\mathbf{R}$ के लिए हम यह जानते कि

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(ce^x) = c\frac{d}{dx}(e^x) = ce^x = y$$

जिससे यह पता चलता है कि y समीकरण (13) को संतुष्ट करता है।

उदाहरण 2 : दिखाइए कि वास्तविक अचर a और b के लिए फलन $y(x)=a \cos 2x$ और $z(x)=b \sin 2x$ समीकरण

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = 0 \ , \ x\in\mathbf{R} \qquad \ldots \quad (14)$$

के हल हैं।

हल : पहले हम यह दिखाएंगे कि $z(x)$, $x\in\mathbf{R}$, समीकरण (14) का एक हल है।

$$\text{क्योंकि} \quad \frac{d}{dx}(z(x)) = \frac{d}{dx}(b \sin 2x) = 2b \cos 2x$$

$$\text{इसलिए} \quad \frac{d^2}{dx^2}(z(x)) = \frac{d}{dx}(2b \cos 2x) = -4b \sin 2x = -4z(x)$$

इसी तरह,

$$\frac{d^2z}{dx^2} + 4z(x) = 0\ ,\ x\in\mathbf{R}$$

अर्थात z, समीकरण (14) को संतुष्ट करता है।

अब तक आप तथ्य "z समीकरण (14) को संतुष्ट करता है" का अर्थ अच्छी तरह से समझ चुके होंगे। इससे यह अर्थ निकलता है कि y के स्थान पर z प्रतिस्थापित करने पर भी समीकरण (14) संतुष्ट होता है। इसी प्रकार आप यह देख सकते हैं कि $y(x)=a\cos 2x$ भी समीकरण (14) का एक हल है। आप यह भी देख सकते हैं कि योगफल $y(x)+z(x)$, अर्थात् $a\cos 2x + b\sin 2x$ भी समीकरण (14) का एक हल है।

आइए अब हम एक और उदाहरण लें।

उदाहरण 3 : दिखाइए कि $y(x)=e^{ix}$, $x\in\mathbf{R}$,

$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0,\ x\in\mathbf{R}$ का एक हल है।

हल : क्योंकि

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(e^{ix}) = i\,e^{ix} = iy(x)$$

तथा

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(ie^{ix}) = i^2\,e^{ix} = -e^{ix} = -y(x)$$

$i=\sqrt{-1}$
और $i^2 = -1$

अतः

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$$

अभी तक हमने जो भी उदाहरण लिए हैं उनमें आपने यह देखा है कि दिए हुए अवकल समीकरण के हल का अस्तित्व होता है।

उदाहरण (1) और (2) में हल वास्तविक मान थे जबकि उदाहरण (3) में हल संमिश्र मान फलन था। पर, कुछ ऐसे भी समीकरण होते हैं जिनके वास्तविक हल नहीं होते। मान लीजिए हम समीकरण $x^2+1=0$ के वास्तविक मूल मालूम करना चाहते हैं। हम जानते हैं कि इस समीकरण का वास्तविक मूल नहीं होता। इसी प्रकार, समीकरण

$$\left|\frac{dy}{dx}\right| + y^2 + 1 = 0$$

का कोई वास्तविक हल नहीं होता।

इसी प्रकार समीकरण

$\sin\left(\frac{dy}{dx}\right) = 2$ का भी कोई वास्तविक हल नहीं होता, क्योंकि किसी वास्तविक फलन के साइन का वास्तविक मान -1 और $+1$ के बीच होता है।

अब आप नीचे दिए गए प्रश्नों को हल करने का प्रयास कर सकते हैं।

E4) सत्यापित कीजिए कि $y=\cos^{-1}\left(-\frac{x^2}{2}\right)$ या $2\cos y=-x^2$ समीकरण $\sin y\frac{dy}{dx} = x$ का एक हल है।

क्या आप बता सकते हैं कि किस अंतराल पर y परिभाषित है?

E5) सत्यापित कीजिए कि अचर c के प्रत्येक मान के लिए

$y=\frac{1}{x}(\ln y+c)$, समीकरण $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{1-xy}$ का एक हल है।

संकेत $\ln y$, $\log_e y$ को निरूपित करता है।

E6) सत्यापित कीजिए कि $y = e^{2x}$ और $y=e^{3x}$ दोनों ही द्वितीय कोटि समीकरण

$y''-5y'+6y = 0$

के हल हैं। क्या आप कोई और हल प्राप्त कर सकते हैं?

ऊपर की चर्चा में आपने इस बात की ओर अवश्य ध्यान दिया होगा कि किसी अवकल समीकरण के एक से भी अधिक हल हो सकते हैं। यहां तक कि अवकल समीकरण के अनततः अनेक हल (infinitely many solution) हो सकते हैं। उदाहरण के लिए $y=\sin x$, $y=\sin x+3$, $y=\sin x-\frac{4}{5}$ में से प्रत्येक फलन अवकल समीकरण $y'=\cos x$ का एक हल है। पर कलन के ज्ञान से आप यह भी जानते हैं कि समीकरण का कोई भी हल

$$y=\sin x+c \qquad \ldots \quad (15)$$

के रूप का होगा, जहां c एक अचर है। यदि हम c को स्वेच्छ (arbitrary) मान लें तो संबंध (15), समीकरण के सभी हलों की संपूर्णता को निरूपित करेगा। इस तरह, हम अनंततः अनेक हलों को भी स्वेच्छ अचरों वाले एक सरल सूत्र से निरूपित कर सकते हैं। अतः हम एक साधारण अवकल समीकरण के विभिन्न प्रकार के हलों को निम्न रूप में वर्गीकृत करते हैं।

परिभाषा : n वीं कोटि वाले अवकल समीकरण के हल को जिसमें n स्वेच्छ अचर हो, **व्यापक हल** (general solution) कहते हैं।

परिभाषा : व्यापक हल में प्रस्तुत स्वेच्छ अचरों को विशेष मान देने पर जो हल प्राप्त होता है, उसे **विशेष हल** (particular solution) कहते हैं।

उदाहरण के लिए $y=a\cos 2x + b\sin 2x$ जिसमें दो स्वेच्छ अचर a और b हैं, द्वितीय कोटि समीकरण $\frac{d^2y}{dx^2}+4y=0$ (उदाहरण 2 देखिए) का व्यापक हल है, जबकि $y=2\sin 2x+\cos 2x$ ($a=1$ और $b=2$ लेने पर) इसका एक विशेष हल है।

कुछ स्थितियों में दिए हुए समीकरण के और भी हल हो सकते हैं जिन्हें व्यापक हल में प्रस्तुत स्वेच्छ अचरों को एक निश्चित मान देकर प्राप्त नहीं किया जा सकता। ऐसे हल को समीकरण का **विचित्र हल** (singular solution) कहा जाता है। उदाहरण के लिए, समीकरण

$$y'^2-xy'+y=0 \qquad \ldots \quad (16)$$

का व्यापक हल $y=cx-c^2$ है। समीकरण (16) का एक और हल $y=\frac{x^2}{4}$ है। अब क्योंकि यह हल व्यापक हल में c को एक निश्चित मान देकर प्राप्त नहीं किया जा सकता, इसलिए यह समीकरण (16) का एक विचित्र हल है।

इस तरह हमने यह देखा है कि साधारण अवकल समीकरण के विभिन्न प्रकार के हल होते हैं। हमने यह भी देखा है कि अवकल समीकरण के हल का अस्तित्व हो भी सकता है और नहीं भी। और यदि हल का अस्तित्व है तो यह अद्वितीय भी हो सकता है और नहीं भी हो सकता।

अब हम वे प्रतिबंध मालूम करेंगे जिनके अधीन दिए हुए साधारण अवकल समीकरण के हल का अस्तित्व होता है और हल अद्वितीय भी होता है। यहां हम अपनी चर्चा केवल प्रथम कोटि साधारण अवकल समीकरण तक ही सीमित रखेंगे। आइए हम व्यापक प्रथम कोटि समीकरण

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y) \qquad \ldots \quad (17)$$

लें।

समीकरण (17) में हम यह मान लेते हैं कि हमें f मालूम है। यह जानकर आपको आश्चर्य हो सकता है कि देखने में यह समीकरण काफी सरल लगता है, पर इसका स्पष्ट हल प्राप्त करना काफी कठिन है। इस तथ्य को और अच्छी तरह से समझने के लिए आइए हम कुछ और उदाहरणों पर विचार करें।

उदाहरण 4 : क्या प्रत्येक $x \in \mathbf{R}$ के लिए साधारण अवकल समीकरण

$$\frac{dy}{dx}=f(x), \text{ जहां } f(x)=0, \; x<0 \text{ के लिए}$$
$$=1, \; x\geq 0 \text{ के लिए}$$

के हल $y(x)$ का अस्तित्व है।

हल : दिए हुए अवकल समीकरण को

$$y(x)=\begin{cases} c, & x<0 \text{ के लिए} \\ x+c, & x\geq 0 \text{ के लिए} \end{cases}$$

द्वारा परिभाषित फलन संतुष्ट करता है। और साथ ही, $x=0$ पर इस फलन का कोई अवकलज नहीं है, क्योंकि $x=0$ पर $y(x)$ असंतत है। इस तरह हम यह पाते हैं कि $x=0$ के लिए इस अवकल समीकरण का कोई मान्य हल नहीं है।

फिर भी, ऊपर परिभाषित किया गया $y(x)$, $x=0$ को छोड़कर अन्य सभी बिन्दुओं पर दिए हुए समीकरण का हल है। आइए अब हम एक और उदाहरण लें।

उदाहरण 5 : क्या समीकरण $\frac{dy}{dx} = -xe^{-y}$ का एक अद्वितीय हल है ?

हल : ऊपर दिए गए समीकरण को

$$e^y \frac{dy}{dx} = -x$$

या $\frac{d}{dx}(e^y) = -x$

के रूप में लिखिए।

समाकलन करने पर हमें दिए हुए समीकरण का निम्नलिखित हल प्राप्त होता है।

$$e^y = -\frac{x^2}{2} + A$$

या $\quad y = \ln\left[-\frac{x^2}{2} + A\right],$

जहां A एक स्वेच्छ अचर है।

क्योंकि हम यह जानते हैं कि ln x, x के केवल धन मानों के लिए परिभाषित होता है, इसलिए जब तक $\left[-\frac{x^2}{2} + A\right] > 0$, रहेगा तब तक दिए हुए अवकल समीकरण के हल का अस्तित्व रहेगा। स्पष्ट है कि $A>0$ और A के भिन्न-भिन्न मानों के लिए हमें अलग-अलग हल प्राप्त होते हैं। और क्योंकि इन हलों का अस्तित्व अलग-अलग अंतरालों में है, इसलिए दिए हुए अवकल समीकरण का हल अद्वितीय नहीं है।

अन्-अद्वितीय हलों के संबंध में यह स्पष्ट है कि अन्-अद्वितीयंता का कारण A की स्वेच्छता है (पर $A>0$ के लिए)। इस तरह हम उस हल पर कुछ प्रतिबंध लगाना चाहेंगे जिससे कि A निर्धारित हो सके। ऐसा एक प्रतिबंध है किसी बिंदु x_0 पर y के मान को निर्दिष्ट कंसा जबकि x_0, y के अस्तित्व अंतराल में है। ऐसे प्रतिबंध को **आदि प्रतिबंध** (initial condition) कहते हैं और आदि प्रतिबंधों के साथ अवकल समीकरण हल करने की समस्या को आदि मान समस्या (initial-value problem) कहते हैं। दूसरे शब्दों में हम यह कह सकते हैं कि आदि मान समस्या वह समस्या है जिसमें हमें दिए हुए अवकल समीकरण का एक ऐसा हल प्राप्त करना होता है जो स्वतंत्र चर के एक मान पर कुछ प्रतिबंधों को संतुष्ट करता हो। इस तरह, प्रथम कोटि आदि मान समस्या

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= f(x,y) \\ y(x_0) &= y_0 \end{aligned}\right\} \qquad \ldots \quad (18)$$

के प्रकार की होती है।

उदाहरण (4) और उदाहरण (5) से हमारे मन में प्रमुखतः दो प्रश्न उठते हैं :

1) किन प्रतिबंधों के अधीन आदि मान समस्या (18) का कम से कम एक हल अवश्य होता है?

2) किन प्रतिबंधों के अधीन समस्या का एक अद्वितीय हल अर्थात केवल एक हल होता है?

इन प्रश्नों के उत्तर अस्तित्व अद्वितीयता प्रमेय (existence uniqueness theorem) नामक प्रमेय से प्राप्त हो जाते हैं। अब हम प्रथम कोटि अवकल समीकरण के लिए इस प्रमेय का कथन देंगे।

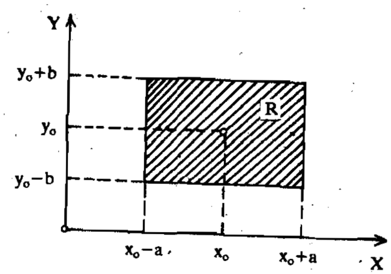
प्रमेय 1 : (अस्तित्व अद्वितीयता) :

यदि f(x,y) एक आयत (देखिए चित्र 1)

$$\mathbf{R} : |x-x_0|<a, \ |y-y_0|<b$$

के सभी बिन्दुओं (x,y) पर संतत हो और **R** में परिबद्ध हो, अर्थात

$$f(x,y) \leqslant k, \ \mathbf{R} \text{ में } \forall \ (x,y) \qquad \ldots \quad (19)$$



चित्र 1 : आयत R

तो आदि मान समस्या (18) का **कम से कम एक हल** y(x) अवश्य होगा जो कि अंतराल $|x-x_0|<h$ में सभी x के लिए परिभाषित होगा जहां h दो संख्याओं a और b/k में छोटी संख्या है। और यदि $\frac{\partial f}{\partial x}$, **R** के सभी बिन्दुओं के लिए संतत हो और परिबद्ध हो, अर्थात

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \leqslant M, \ \mathbf{R} \text{ में } \forall \ (x,y) \qquad \ldots \quad (20)$$

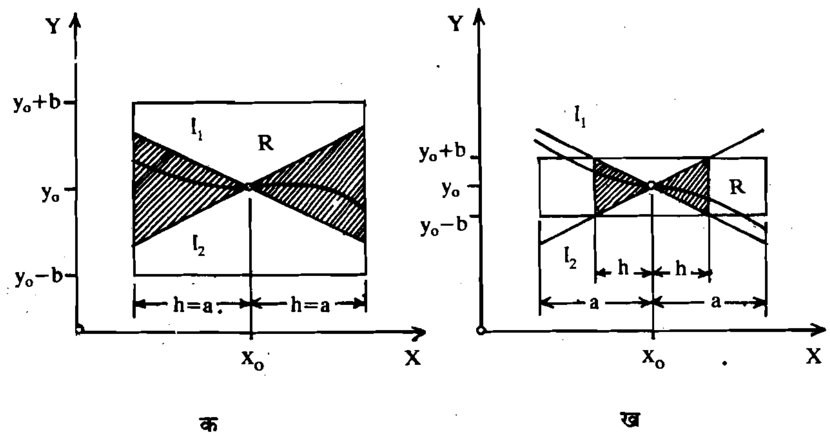
तो हल y(x) अंतराल $|x-x_0|<h$, में सभी x के लिए अद्वितीय हल होगा।

प्रथम कोटि वाले साधारण अवकल समीकरण

फलन $f(x,y)$ को परिबद्ध कहा जाता है जब xy-समतल के एक प्रदेश में (x,y) का मान बदलता हो और यदि एक ऐसी संख्या k हो कि $|f| \leq k$ जब कि (x,y) उस प्रदेश में हो। उदाहरण के लिए $f=x^2+y^2$, $k=2$ के लिए परिबद्ध होता है, यदि $|x|<1$ और $|y|<1$.

यहां हम इस प्रमेय को सिद्ध नहीं कर रहे हैं, क्योंकि इस प्रमेय को सिद्ध करने के लिए कुछ ऐसी संकल्पनाओं से परिचित होना आवश्यक है जो इस पाठ्यक्रम के अध्ययन क्षेत्र से बाहर हैं। फिर भी यहां हम कुछ टिप्पणी देंगे जो कि इस प्रमेय को समझने में सहायक सिद्ध होंगी।

टिप्पणी : क्योंकि $y'=f(x,y)$ इसलिए प्रतिबंध (19) से यह परिलक्षित होता है कि $|y'|<k$ अर्थात **R** में किसी हल वक्र $y(x)$ की प्रवणता कम से कम $-k$ और अधिक से अधिक k है। अतः बिन्दु (x_0, y_0) से होकर जाने वाला हल वक्र चित्र 2 में दिखाए गए छायादार प्रदेश में स्थित होना चाहिए जो कि प्रवणता $-k$ और k वाली रेखाओं l_1 और l_2 से परिबद्ध है।



चित्र 2

अब यहां दो स्थितियाँ उत्पन्न हो सकती हैं जो कि **R** के रूप पर निर्भर करती हैं।

i) क्योंकि $\frac{b}{k} \geq a$ हो सकता है इसलिए $h=a$ जिससे यह पता चलता है कि x_0-a और x_0+a के बीच के सभी x के लिए हल का अस्तित्व है। (चित्र 2(क) देखिए)

ii) क्योंकि $\frac{b}{k}<a$ हो सकता है इसलिए $h=\frac{b}{k}$ अतः हम यह निष्कर्ष निकालते हैं कि $x_0-\frac{b}{k}$ और $x_0+\frac{b}{k}$ के बीच के सभी x के लिए हल का अस्तित्व है। इस स्थिति में x के बड़े अथवा छोटे मानों के लिए हल वक्र आयत **R** के बाहर निकल सकता है (चित्र 2(ख) देखिए)। क्योंकि हमें f के बारे में **R** के बाहर कुछ भी मालूम नहीं, इसलिए x के उन संगत मानों के लिए हल के बारे में कुछ भी निष्कर्ष नहीं निकाला जा सकता है।

प्रमेय 1 में दिए गए प्रतिबंध **पर्याप्त** (sufficient) हैं पर **आवश्यक** (necessary) नहीं हैं अतः इनमें कुछ ढील दी जा सकती है। उदाहरण के लिए, अवकल गणित के माध्य मान प्रमेय (mean-value theorem) के अनुसार (एम.टी.ई-07 के खंड 2 की इकाई 5 का प्रमेय 1 देखिए)

$$f(x,y_2) - f(x,y_1) = (y_2-y_1)\frac{\partial f}{\partial y}$$

जहां यह माना गया है कि (x, y_1) और (x,y_2), **R** में है। तब समीकरण (20) से यह पता चलता है कि

$$|f(x,y_2) - f(x,y_1)| \leq M\,|y_2 - y_1| \qquad \ldots\ldots (21)$$

तथा प्रतिबंध (20) के स्थान पर प्रतिबंध (21) लागू किया जा सकता है जिसे लिपशिट्ज प्रतिबंध कहा जाता है, जो कि जर्मन गणितज्ञ रूडेल्फ लिपशिट्ज (1831-1903) के नाम पर रखा गया है।

इस तरह हम यह कह सकते हैं कि आदि मान समस्या (18) के हल के अस्तित्व के लिए यह आवश्यक है कि

i) f, T में संतत हो

ii) f, T में परिबद्ध हो।

और हल अद्वितीय होता है यदि प्रतिबंध (i) और (ii) के अतिरिक्त

iii) $\frac{\partial f}{\partial y}$, T में संतत हो।

iv) $\frac{\partial f}{\partial y}$, T में परिबद्ध हो (या लिपशिट्ज प्रतिबंध)

फिर भी, यदि ऊपर दिए गए प्रतिबंध लागू न होते हों, तो भी आदि मान समस्या (18) का (क) कोई भी हल नहीं, (ख) एक से अधिक हल या (ग) एक अद्वितीय हल हो सकता है। ऐसा होने का कारण यह है कि प्रमेय में केवल पर्याप्त प्रतिबंध का उल्लेख है, आवश्यक प्रतिबंध का नहीं। उदाहरण के लिए,

$\frac{dy}{dx} = 3y^{2/3}$, $y(0)=0$ लीजिए।

यहां $f(x,y) = 3y^{2/3}$ और $y \neq 0$ के लिए $\frac{\partial f}{\partial y} = 3 \cdot \frac{2}{3} y^{-1/3}$. इससे यह पता चलता है कि $y=0$ पर $\frac{\partial f}{\partial y}$ का अस्तित्व नहीं है। इसलिए $\frac{\partial f}{\partial y}$ परिबद्ध नहीं है, पर फिर भी हल $y=x^3$ और $y=0$ का अस्तित्व है।

आइए अब हम कुछ अवकल समीकरणों के उदाहरण लेकर उनके लिए प्रतिबंधों (i) से (iv) तक की जांच करें।

उदाहरण 6 : $y(0) = 1$ पर समीकरण $\frac{dy}{dx} = y$ के हल के अस्तित्व और अद्वितीयता की जांच कीजिए।

हल : यहां $f(x,y)=y$, $f_y(x,y)=1$, $x_0=0$ और $y_0=1$ हैं। इस स्थिति में

$$T : |x-0|<a, \ |y-1|<b$$

से परिभाषित आयत T लीजिए, जहां a और b धन संख्याएं हैं। बिन्दु (0,1) आविष्ट करने वाले किसी भी आयत T में फलन $f(x,y)$ संतत और परिबद्ध होगा। अतः हल का अस्तित्व है। और $f_y(x,y)$ भी इसी प्रकार के किसी भी आयत T में संतत और परिबद्ध होगा। इसलिए हल अद्वितीय है।

आप यह सत्यापित कर सकते हैं कि $y=e^x$ दिए हुए समीकरण का एक हल है जो आदि प्रतिबंध $y(0)=1$ को संतुष्ट करता है। अतः यह एक अद्वितीय हल है।

फिर भी यदि हम आदि प्रतिबंध को बदल दें और $y(0)=0$ ले लें तो आयत T

$$T : |x-0|<a, \ |y-0|<b$$

के रूप का हो जाएगा। और तब इस स्थिति में $y=0$, (0,0) आविष्ट करने वाले आयत T के सभी x और y के लिए अद्वितीय हल होगा।

उदाहरण 7 : हलों के अस्तित्व और अद्वितीयता के लिए $\frac{dy}{dx} = \sqrt{|y|}$ की जांच कीजिए जबकि $y(0)=0$.

हल: यहां $f(x,y) = \sqrt{|y|}$ $x_0=0$ और $y_0=0$ है।

इस स्थिति में प्रदेश T लीजिए जिसमें $|x|<a$, $|y|<b$, जहां a और b धन संख्याएं हैं। फलन $f(x,y)$ बिन्दु (0,0) को आविष्ट करने वाले किसी भी आयत T में संतत और परिबद्ध है।

अतः हल का अस्तित्व है। हल की अद्वितीयता की जांच करने के लिए लिपशिट्ज प्रतिबंध

$$\frac{|f(x,y_2) - f(x, y_1)|}{|y_2-y_1|} = \frac{|\sqrt{|y_2|} - \sqrt{|y_1|}|}{|y_2-y_1|}$$

लीजिए।

रेखा $y=0$ को आविष्ट करने वाले किसी भी प्रदेश के लिए लिपशिट्ज प्रतिबंध लागू नहीं होता। क्योंकि, $y_1=0$ और $y_2>0$ के लिए

$$\frac{|f(x,y_2) - f(x, y_1)|}{|y_2-y_1|} = \frac{\sqrt{y_2}}{y_2} = \frac{1}{\sqrt{y_2}}, \ (\sqrt{y_2} >0)$$

और y_2 को काफी छोटा लेकर हम इसे बड़े से बड़ा बना सकते हैं, जबकि प्रतिबंध (21) के अनुसार समीकरण (21) के बायें पक्ष का भागफल एक नियत अचर M से अधिक नहीं होता।

अतः हल अद्वितीय नहीं है।

हम यहां यह भी जांच कर सकते हैं कि दी हुई समस्या के हल निम्नलिखित हैं :

i) $y=0 \ \forall x$

ii) $y = \begin{cases} \frac{1}{4}x^2, & x \geqslant 0 \text{ के लिए} \\ -\frac{1}{4}x^2, & x<0 \text{ के लिए} \end{cases}$

उदाहरण 8 : हल के अस्तित्व और अद्वितीयता के लिए

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) = \begin{cases} y(1-2x), \ x > 0 \text{ के लिए} \\ y(2x-1), \ x<0 \text{ के लिए} \end{cases} \quad \text{जहाँ } y(1)=1$$

की जांच कीजिए।

हल : यहां $x_0=1$, $y_0=1$ और आयत T, बिन्दु (1,1) को आविष्ट करने वाला कोई भी आयत हो सकता है। आप यहां यह देख सकते हैं कि $x=0$ पर फलन परिभाषित नहीं है। यह $x=0$ पर असंतत है। अतः $x=0$ पर हल का अस्तित्व नहीं है। अन्य सभी बिन्दुओं पर फलन

$$f(x,y) = \begin{cases} y(1-2x), \ x > 0 \text{ के लिए} \\ y(2x-1), \ x<0 \text{ के लिए} \end{cases}$$

T में संतत और परिबद्ध है, जहां $y(1) = 1$ अतः $x = 0$ को छोड़कर अन्य सभी x के लिए हल का अस्तित्व है और यह अद्वितीय है। आप यह भी सत्यापित कर सकते हैं कि

$x>0$ के लिए $y = e^{x-x^2}$
और $x<0$ के लिए $y = e^{x^2-x}$,

$x=0$ को छोड़कर अन्य सभी x के लिए दी हुई समस्या का अद्वितीय हल है।

अब आप नीचे दिया गया प्रश्न हल करने का प्रयास कीजिए।

E7) हल के अस्तित्व और अद्वितीयता के लिए $y(0)=0$ पर

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{4x^3y}{(x^4+y^2)} & \text{जबकि x और y दोनों शून्य नहीं हैं} \\ 0 & \text{जबकि } x=y=0 \end{cases}$$

की जांच कीजिए।

भाग (1.3) में दी गई परिभाषाओं से आपने यह अनुभव अवश्य किया होगा कि सामान्यतः प्रथम कोटि अवकल समीकरण के व्यापक हल में एक स्वेच्छ अचर होता है जिसे **प्राचल** (parameter) कहा जाता है। जब इस प्राचल को विभिन्न मान दिए जाते हैं तब हमें **एक प्राचल वक्र-कुल** (one-parameter family of curves) प्राप्त होता है। इन वक्रों में से प्रत्येक वक्र दिए हुए अवकल समीकरण का एक विशेष हल अथवा समाकल वक्र होता है और इन सभी को एक साथ लेने पर इसका व्यापक हल प्राप्त होता है। इसके विपरीत हम यह आशा करते हैं कि किसी एक प्राचल कुल के वक्र किसी प्रथम कोटि अवकल समीकरण के समाकल वक्र होते हैं। व्यापक रूप में यह प्रश्न उठता है कि यदि n प्राचलों का एक वक्र-कुल दिया हुआ हो तो क्या हम इसके संगत का n वीं कोटि अवकल समीकरण प्राप्त कर सकते हैं जो दिए हुए कुल को निरूपित करने वाले स्वेच्छ प्राचलों से पूरी तरह से मुक्त हो? अधिकांश स्थितियों में इस प्रश्न का उत्तर "हां" में होता है। अतः हम यह कह सकते हैं कि अवकल समीकरणों की व्युत्पति वक्र-कुल से होती है। अगले भाग में हम इस विषय पर चर्चा करेंगे।

1.4 वक्र-कुल और अवकल समीकरण

सरल रेखा कुल

$$y = mx+c \qquad \dots (22)$$

लीजिए जो दो प्राचल वक्र-कुल है, जहां m और c प्राचल है। समीकरण (22) से यह स्पष्ट है कि y को x का एक फलन माना जा सकता है, जहां $x \in \mathbf{R}$. x के सापेक्ष समीकरण (22) को अवकलित करने पर

$$y' = m \qquad \dots (23)$$

प्राप्त होता है। समीकरण (23) को फिर से अवकलित करने पर

$$y'' = 0 \qquad \dots (24)$$

प्राप्त होता है। समीकरण (23) और (24) क्रमशः एक कोटि और दो कोटि वाले अवकल समीकरण हैं। जिस विधि से हमने समीकरण (23) या समीकरण (24) प्राप्त किये हैं, वह बिल्कुल स्पष्ट है। वास्तव में हमने प्राचलों अथवा अचरों m और c को विलुप्त (eliminate) करने का प्रयास किया है जिससे हमें परिणाम के रूप में समीकरण (23) या समीकरण (24) प्राप्त होते हैं।

व्यापक रूप में हम एक प्राचल वक्र-कुल को समीकरण

$$f(x,y,a) = 0 \qquad \dots (25)$$

से निरूपित करते हैं, जहां a एक अचर है। समीकरण (25) में आइए हम y को x का एक फलन मान लें और इसे x के सापेक्ष अवकलित करें। मान लीजिए ऐसा करने पर हमें

$$g(x, y, y', a) = 0 \qquad \dots \quad (26)$$

प्राप्त होता है।

यदि हम समीकरण (25) और समीकरण (26) से अचर a को विलुप्त कर सकें, तो हमें x,y और y' को जोड़ने वाला संबंध अर्थात

$$h(x,y,y') = 0 \qquad \dots \quad (27)$$

प्राप्त होता है।

समीकरण (27) कोटि एक वाला साधारण अवकल समीकरण है। विशेष रूप में, यदि समीकरण (25)

$$\psi(x,y) = a \qquad \dots \quad (28)$$

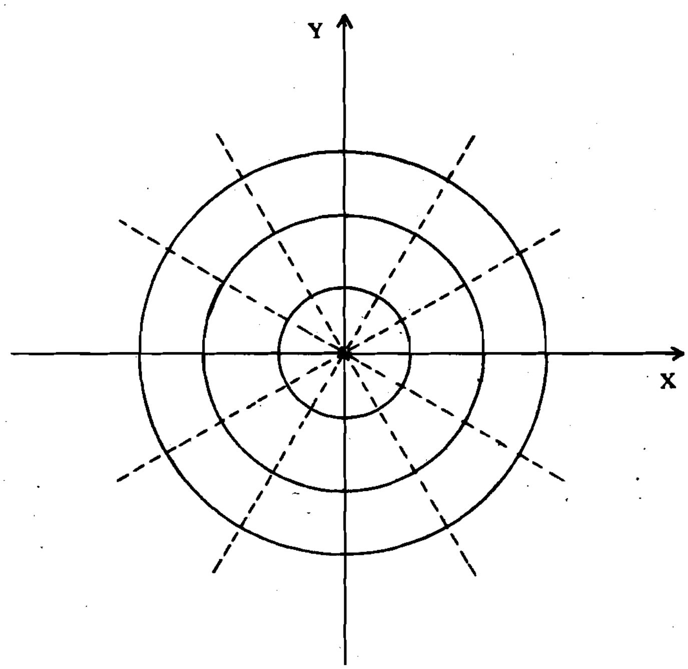
के रूप का हो, तो समीकरण (28) से अचर a को विलुप्त करने पर हमें अवकल समीकरण

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y} y' = 0 \qquad \dots \quad (29)$$

प्राप्त होता है। उदाहरण के लिए

$$x^2+y^2=a^2$$

उन सभी एक केन्द्रीय वृत्तों के कुल का समीकरण है जिनका केन्द्र मूल बिन्दु पर है। (चित्र 3)



चित्र 3

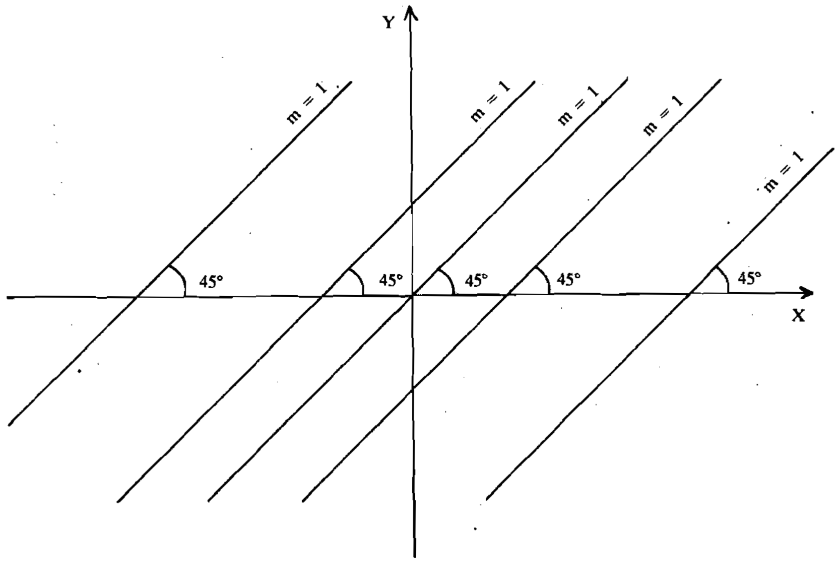
a के भिन्न-भिन्न मानों के लिए हमें कुल के भिन्न-भिन्न वृत्त प्राप्त होते हैं। x के सापेक्ष समीकरण (30) को अवकलित करने पर दिए हुए वृत्त कुल के अवकल समीकरण के रूप में हमें

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

या $$x + y\frac{dy}{dx} = 0$$

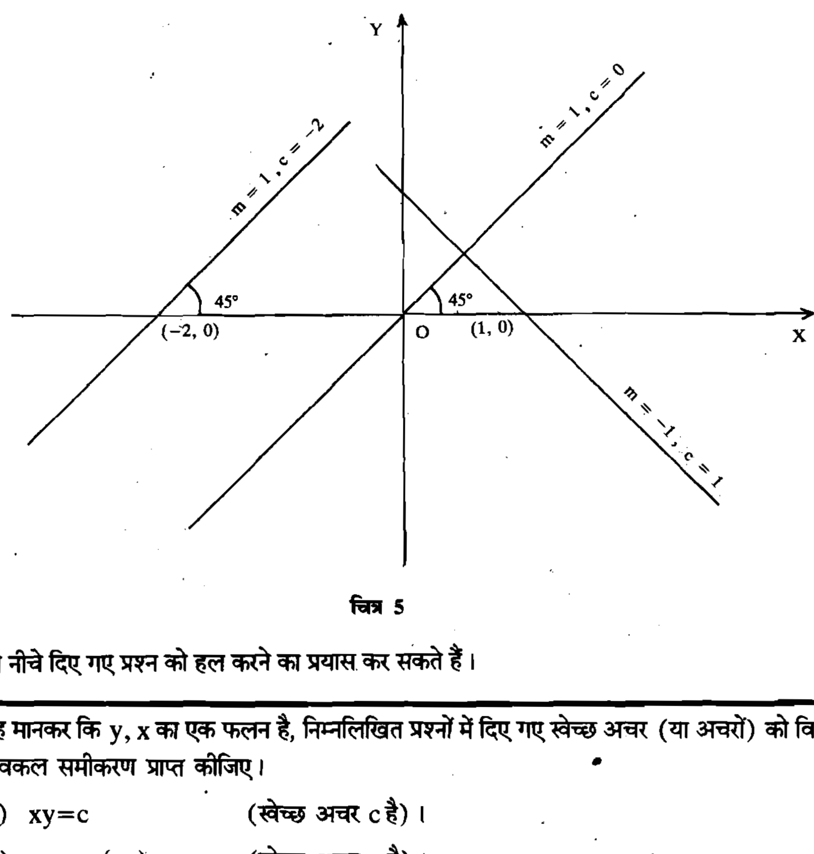
प्राप्त होता है।

यदि हम समीकरण $y=mx+c$ को फिर से लें और विलुप्त किया जाने वाला स्वेच्छ अचर केवल c हो, तो $y'=m$ अभीष्ट अवकल समीकरण को निरूपित करता है। ज्यामितीय रूप में, यदि m नियत हो, तो $y'=m$ उन सरल रेखाओं (समतल में) के कुल को निरूपित करता है जिनकी प्रवणता (slope) m है (चित्र 4 देखिए)।



चित्र 4

इसके विपरीत, यदि हम यह मान लें कि समीकरण $y=mx+c$ में m और c दोनों ही विलुप्त किए जाने वाले अचर हैं, तो समीकरण $y''=0$ अभीष्ट अवकल समीकरण को निरूपित करता है। ज्यामितीय रूप में यह समतल में सभी सरल रेखाओं का कुल है। (चित्र 5 देखिए)।



चित्र 5

अब आप नीचे दिए गए प्रश्न को हल करने का प्रयास कर सकते हैं।

E8) यह मानकर कि y, x का एक फलन है, निम्नलिखित प्रश्नों में दिए गए स्वेच्छ अचर (या अचरों) को विलुप्त करके अवकल समीकरण प्राप्त कीजिए।

क) $xy=c$ (स्वेच्छ अचर c है)।

ख) $y=\cos(ax)$ (स्वेच्छ अचर a है)।

ग) $y=A\cos(ax)$ (स्वेच्छ अचर A और a है)।

इस इकाई के प्रस्तावना में हमने इस बात का उल्लेख किया है कि भौतिकी और इंजीनियरी से संबंधित ऐसे अनेक प्रश्न हैं जो कि अवकल समीकरण को व्युत्पन्न करते हैं। दूसरे शब्दों में हम यह कह सकते हैं कि कुछ प्रश्नों को अवकल समीकरणों के रूप में प्रस्तुत किया जा सकता है। अगले भाग में हम इन प्रश्नों पर विचार करेंगे।

1.5 भौतिक स्थितियों से उत्पन्न अवकल समीकरण

इस भाग में हम यह दिखाएंगे कि केवल ज्यामितीय वक्र-कुल लेने से ही अवकल समीकरण नहीं प्राप्त होते हैं बल्कि भौतिक प्रश्नों को गणितीय रूप में प्रस्तुत करने पर भी अवकल समीकरण प्राप्त होते हैं। भौतिक सिद्धांतों में वृद्धि (growth) अथवा क्षय (decay) से संबंधित अनेक प्रश्नों को हल करने में हमें आदि मान समस्या

$$\left.\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= ky\\ y(x_0) &= y_0\end{aligned}\right\} \qquad \ldots (31)$$

जहां k अनुपातिकता अचर (constant of proportionality) है को हल करना होता है। उदाहरण के लिए, जैविकी में प्रायः यह देखा जाता है कि कुछ बैक्टीरिया में दर की वृद्धि उस समय पर उपस्थित बैक्टीरिया की संख्या के समानुपाती होती है। भौतिकी में समीकरण (31) जैसी आदि मान समस्या से रेडियो ऐक्टिवता के कारण विघटित (disintegrating) अथवा क्षयित (decaying) हो रहे पदार्थ की बची हुई मात्रा का सन्निकट मान ज्ञात करने का एक निदर्श (model) प्राप्त होता है। अवकल समीकरण (31) से ठंडे हो रहे एक पिंड का भी तापमान मालूम किया जा सकता है। रसायन में कुछ अभिक्रियाओं के दौरान बचे हुए पदार्थ की मात्रा को भी समीकरण (31) से प्रस्तुत किया जा सकता है।

आइए अब हम इन समस्याओं में से कुछ समस्याओं के सूत्रीकरण पर विचार करें।

I जनसंख्या निदर्श

मान लीजिए N(t) समय t पर किसी स्पीशीज़ की संख्या अथवा मात्रा को प्रकट करता है। तब N(t) में वृद्धि उसके अवकलज $\frac{d}{dt}N(t)$ से प्राप्त हो जाती है। इस तरह, यदि N(t) में एक अचर दर से वृद्धि हो रही हो, तो $\frac{d}{dt}N(t) = \beta$, एक अचर होगा। कभी-कभी सापेक्ष वृद्धि दर (relative rate of growth) पर विचार करना अधिक उपयुक्त होता है, जहां

$$\text{सापेक्ष वृद्धि दर} = \frac{\text{वास्तविक वृद्धि दर}}{N(t) \text{ का आमाप}} = \frac{N'(t)}{N(t)} = \frac{\frac{dN(t)}{dt}}{N(t)}$$

सापेक्ष वृद्धि दर N(t) में प्रतिशत वृद्धि या N(t) में प्रतिशत ह्रास (decrease) को प्रकट करता है। उदाहरण के लिए, यदि 500 की जनसंख्या वाली किसी स्पीशीज़ में 100 की वृद्धि होती हो, तो इस वृद्धि का काफी महत्व है। क्योंकि संख्या में 20 प्रतिशत की वृद्धि हुई है। इसके विपरीत यदि स्पीशीज़ की संख्या 10,00,000 हो तो 100 की वृद्धि का कोई महत्व नहीं रहता, क्योंकि संख्या में केवल 0.01 प्रतिशत की वृद्धि हुई है। यदि हम यह मान लें कि समय t पर N का परिवर्तन दर समय t पर उपस्थित संख्या N(t) के समानुपाती हो, तो

$$\frac{d}{dt}N(t) = \alpha\, N(t)$$

जिसे इस रूप में लिखा जा सकता है

$$\frac{d}{dt}N(t) = k\, N(t), \qquad \ldots (32)$$

जहां k एक अचर है।

यदि t के साथ N में वृद्धि होती हो, तो समीकरण (32) में $k > 0$. यदि t के साथ N में कमी होती हो, तो समीकरण (32) में $k \leq 0$. सामान्यतः हमें किसी एक आदि समय t_0 की जनसंख्या मालूम होती है। मान लीजिए यह संख्या N_0 है। अतः समीकरण (32) के साथ-साथ हमें

$$N(t_0) = N_0 \qquad \ldots (33)$$

भी प्राप्त है।

इस तरह, प्रतिबंध (33) के साथ समीकरण (32) को हल करके किसी भी समय t पर जनसंख्या N(t) मालूम की जा सकती है। कुछ परिवर्तन के साथ इस समस्या पर हम इकाई 3 में फिर से विचार करेंगे।

II न्यूटन का शीतलन नियम

यहां हम अचर तापमान, मान लीजिए T_0 वाले स्थान पर रखे गये गर्म पिंड के तापमान में हो रहे परिवर्तन पर विचार करेंगे। कुछ प्रतिबंधों के अधीन न्यूटन के शीतलन नियम को लागू करके पिंड के [illegible] प्राप्त

किया जा सकता है। मान लीजिए पिंड का तापमान T है। यदि $T \geq T_0$ तो हम जानते हैं कि अपने वातावरण में पिंड ऊष्मा विकिरणित (radiates) करता रहता है जिसकी वजह से पिंड का तापमान कम हो जाता है। न्यूटन का शीतलन नियम यह है :

जिस दर से शीतलन पिंड के तापमान T(t) में परिवर्तन होता है, वह पिंड के तापमान और आस-पास के माध्यम के अचर तापमान T_0 के अंतर के समानुपाती होता है। अर्थात्

$$\frac{d}{dt}T(t) \propto T(t) - T_0$$

$$\text{या } \frac{d}{dt}T(t) = k(T(t) - T_0) \qquad \ldots \quad (34)$$

जहां k आनुपातिकता अचर है। अचर $k<0$ क्योंकि पिंड का तापमान कम होता जा रहा है। यहां हमने यह मान लिया है कि $T(t) \geq T_0$। हम यह पाते हैं कि समीकरण (34) कोटि एक वाला अवकल समीकरण है जो कि समीकरण (28) के रूप का है।

III रेडियो ऐक्टिव क्षय

अनेक पदार्थ रेडियो ऐक्टिव होते हैं। इससे यह अर्थ निकलता है कि ऐसे पदार्थों के परमाणु टूटकर अन्य पदार्थों के परमाणुओं में बदल जाते हैं। भौतिकी में यह देखा गया है कि रेडियो ऐक्टिव पदार्थ में समय t पर अपनी मात्रा y(t) के आनुपातिक दर से क्षय होता है। दूसरे शब्दों में,

$$\frac{d}{dt}y(t) = k\,y(t) \qquad \ldots \quad (35)$$

जहां $k<0$ एक अचर है। यदि किसी आदि समय, मान लीजिए $t=0$ पर पदार्थ का द्रव्यमान A हो, तो y(t) भी आदि प्रतिबंध

$$y(0)=A$$

को संतुष्ट करता है।

इस तरह, हम यह पाते हैं कि रेडियो ऐक्टिव क्षय की भौतिक समस्या आदि मान समस्या

$$\frac{d}{dt}y(t) = k\,y(t),\ y(0)=A \qquad \ldots \quad (36)$$

से निदर्शित होती है, जहां $k<0$ एक अचर है।

टिप्पणी : I, II और III उन स्थितियों को प्रकट करते हैं जहां अपने आप अवकल समीकरण प्राप्त हो जाते हैं। इकाई 3 में हम इन समीकरणों को हल करने की विधि पर चर्चा करेंगे। अब आप नीचे दिया गया प्रश्न हल कर सकते हैं।

E9) निम्नलिखित समस्याओं में दी हुई भौतिक स्थितियों को प्रस्तुत करने वाला समीकरण प्राप्त कीजिए।

क) एक संवर्धन (Culture) में बैक्टीरिया की आदि संख्या p_0 है। बैक्टीरिया की संख्या में हो रही वृद्धि उपस्थित बैक्टीरिया की संख्या के समानुपाती है। किसी भी समय t पर बैक्टीरिया की संख्या p क्या होगी?

ख) एक रेडियो ऐक्टिव पदार्थ, जिसका शुरू में भार x_0 ग्राम था उपस्थित मात्रा के आनुपातिक दर से क्षयित होता है और 2 वर्ष के बाद केवल आधी मात्रा में पदार्थ बचता है। t वर्ष के बाद बचने वाले पदार्थ की मात्रा x ज्ञात कीजिए।

अभी तक जो कुछ भी हमने अध्ययन किया उसका संक्षिप्त विवरण देते हुए हम इस इकाई को यहीं समाप्त करते हैं।

1.6 सारांश

इस इकाई में हमने निम्नलिखित तथ्यों पर चर्चा की है।

1) क) उस समीकरण को जिसमें एक (या अधिक) आश्रित चर और उनके एक या अधिक स्वतंत्र चरों के सापेक्ष अवकलज हों, **अवकल समीकरण** कहते हैं।

ख) जिस अवकल समीकरण में केवल साधारण अवकलज हों उसे **साधारण अवकल समीकरण** कहते हैं।

ग) आंशिक अवकलजों वाले अवकल समीकरण को **आंशिक अवकल समीकरण** कहते हैं।

घ) अवकल समीकरण की **कोटि** समीकरण में प्रस्तुत उच्चतम कोटि अवकलज की कोटि होती है।

ङ) अवकल समीकरण का **घात** समीकरण के उच्चतम कोटि अवकलज का उच्चतम घातांक होता है, जबकि समीकरण को करणियों और अवकलज के भिन्नों से मुक्त रूप में व्यक्त कर दिया गया हो।

च) अवकल समीकरण में जब आश्रित चर और उसके अवकलज केवल एक घात वाले होते हैं और वे उच्च घात अथवा एक दूसरे के गुणनफल के रूप में नहीं होते तब समीकरण को **रैखिक** कहा जाता है।

छ) यदि साधारण अवकल समीकरण रैखिक नहीं है, तो उसे **अरैखिक** कहा जाता है।

2) क) अंतराल I पर परिभाषित वास्तविक अथवा संमिश्र मान फलन $y=\phi(x)$ को समीकरण

$$g(x,y,y'y'',\ldots\ldots, y^{(n)}) = 0$$

का **हल** कहा जाता है यदि $\phi(x)$, n बार अवकलनीय हो और यदि I के सभी x के लिए $\phi(x)$, $\phi'(x)$, $\phi''(x)$,....., $\phi^{n}_{(x)}$ ऊपर दिए गए समीकरण को संतुष्ट करते हों।

ख) n वीं कोटि अवकल समीकरण का वह हल जिसमें n स्वेच्छ अचर हो, उसका **व्यापक** हल कहलाता है।

ग) स्वेच्छ अचर को विशेष मान देने पर व्यापक हल से जो हल प्राप्त होता है, उसे अवकल समीकरण का **विशेष हल** कहते हैं।

घ) अवकल समीकरण के उस हल को, जिसे व्यापक हल के स्वेच्छ अचरों को निश्चित मान देकर प्राप्त नहीं किया जा सकता, **विचित्र हल** कहते हैं।

3) क) हल के अस्तित्व अंतराल में स्वतंत्र चर के किसी एक मान पर आश्रित चर के मान और उसके अवकलज पर लगाए गए प्रतिबंध को **आदि प्रतिबंध** कहा जाता है।

ख) आदि प्रतिबंधों के साथ अवकल समीकरण को हल करने की समस्या को **आदि मान समस्या** कहा जाता है।

4) $|x-x_0|<a$ और $|y-y_0|<b$ द्वारा परिभाषित प्रदेश T में प्रथम कोटि अवकल समीकरण

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y), \text{ जहां } y(x_0) = y_0 ,$$

के हल के अस्तित्व के लिए पर्याप्त प्रतिबंध निम्नलिखित हैं :

i) f, T में संतत है, और

ii) f, T में परिबद्ध है। और यदि हल का अस्तित्व है, तो यह अद्वितीय होता है, यदि प्रतिबद्ध i) और ii) के अतिरिक्त निम्न प्रतिबंध भी लागू होते हों

iii) $\frac{\partial f}{dy}$, T में संतत है

iv) $\frac{\partial f}{dy}$, T में परिबद्ध है (या लिपशिट्ज प्रतिबंध संतुष्ट होता है)

5) प्रथम कोटि (n वीं कोटि) अवकल समीकरण का व्यापक हल एक प्राचल (n-प्राचल) वक्र कुल को निरूपित करता है।

6) जनसंख्या निदर्श न्यूटन का शीतलन नियम, रेडियो ऐक्टिव क्षय जैसी अनेक भौतिक स्थितियों को प्रथम कोटि अवकल समीकरण से निरूपित किया जा सकता है।

1.7 हल/उत्तर

E1) क) साधारण अवकल समीकरण

ख) यह एक अवकल समीकरण नहीं है, क्योंकि दायें पक्ष में न केवल $y(x)$ है, बल्कि $y(s)$, $0\leq s\leq x$ भी है।

ग) आंशिक अवकल समीकरण

घ) यह एक अवकल समीकरण नहीं है, क्योंकि दायें पक्ष में x पर नहीं बल्कि $(x+1)$पर y मूल्यांकित किया गया है।

ङ) यह एक अवकल समीकरण नहीं है।

च) आंशिक अवकल समीकरण।

E2) क) घातांक का परिमेयीकरण (rationalising) करने पर हमें प्राप्त होता है

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 = \left(1+2\frac{dy}{dx}\right)^3.$$

अतः कोटि 2 है और घात 2 है।

ख) कोटि 2, घात 1

ग) क्योंकि साइन फलन का प्रसार करने पर एक अनंत श्रेणी प्राप्त होती है, इसलिए कोटि 2 है और घात परिभाषित नहीं है।

घ) कोटि 1, घात 1

ङ) घातांक का परिमेयीकरण करने पर हम पाते हैं

$$\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^3 = r^2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2$$

$\therefore$ कोटि 2, घात 2

च) कोटि 4, घात 1

छ) कोटि 1, घात 2

E3) क) रैखिक

ख) अरैखिक क्योंकि इसमें $\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2$ और गुणनफल $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ भी है।

ग) अरैखिक क्योंकि दायें पक्ष में y^2 है।

घ) रैखिक

ङ) अरैखिक क्योंकि घातांक का परिमेयीकरण करने पर हमें $(x^2+y^2)^3 \frac{d^2y}{dx^2} = \mu^2 x^2$ प्राप्त होता है और साथ ही y पद और $\frac{d^2y}{dx^2}$ का एक गुणनफल भी है।

E4) यहां $2\cos y = -x^2$

x के सापेक्ष अवकल करने पर हमें प्राप्त होता है

$$-2\sin y\frac{dy}{dx} = -2x$$

या $\sin y\frac{dy}{dx} = x$

अतः $y = \cos^{-1}\left(-\frac{x^2}{2}\right)$, $\sin y\frac{dy}{dx} = x$ का हल है

$$\cos y = -\frac{x^2}{2}$$

यहां y का अस्तित्व तब तक रहता है जब तक कि $|x| \leq 2$ अर्थात, y का अस्तित्व अंतराल $-2 \leq x \leq 2$ हो।

E5) x के सापेक्ष $xy = \ln y + c$ का अवकलन करने पर हमें प्राप्त होता है

$$y + x\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y}\frac{dy}{dx}.$$

अतः परिणाम प्राप्त हो जाता है।

E6) c_1 और c_2 के सभी अचर मानों के लिए $y = c_1e^{2x} + c_2e^{3x}$ दिए हुए समीकरण के हल हैं।

E7) यहां $f(x,y) = \frac{4x^3y}{x^4+y^2}$ बिन्दु (0,0) आविष्ट करने वाले किसी भी आयत में परिबद्ध और संतत हैं।

अतः हल का अस्तित्व है।

हल की अद्वितीयता की जांच करने के लिए आइए हम लिपशिटज प्रतिबंध पर विचार करें।

यहां

$$\frac{|f(x,y_1) - f(x, y_2)|}{|y_1-y_2|} = \frac{\left|\frac{4x^3y_1}{x^4+y_1^2} - \frac{4x^3y_2}{x^4+y_2^2}\right|}{|y_1-y_2|}$$

$$= \frac{\left|\frac{4x^3y_1(x^4+y_2^2) - 4x^3y_2(x^4+y_1^2)}{(x^4+y_1^2)\,(x^4+y_2^2)}\right|}{|y_1-y_2|}$$

$$= \frac{4|x^3|\cdot|x^4-y_1y_2|}{|x^4+y_1^2|\cdot|x^4+y_2^2|}$$

$\to\infty$ जबकि $x\to 0$

यदि मूल बिन्दु प्रांत (आयत) का एक भाग है, तो लिपशिट्ज प्रतिबंध संतुष्ट नहीं होता। अतः हल अद्वितीय है। यहां यह भी सत्यापित किया जा सकता है कि फलन $y=c^2 - \sqrt{x^4+c^4}$, जहां c स्वेच्छ अचर है, समीकरण को संतुष्ट करता है। अर्थात् आदि प्रतिबंध को संतुष्ट करने वाले अनंत हल है।

E8) क) यहां $xy=c$.

x के सापेक्ष अवकलन करने पर हमें प्राप्त होता है

$$x\frac{dy}{dx} + y = 0$$

जो अभीष्ट अवकल समीकरण है।

ख) $y = \cos(ax)$ ... (37)

x के सापेक्ष अवकलन करने पर हमें प्राप्त होता है

$y' = -a\sin(ax)$ ... (38)

समीकरण (37) से प्राप्त $ax=\cos^{-1}y$ और $\sin ax = \sqrt{1-y^2}$ को समीकरण (38) में प्रतिस्थापित करने पर प्राप्त होता है

$$y' = -\frac{1}{x}(\cos^{-1}x)\,\sqrt{1-y^2}$$

जो कि अभीष्ट अवकल समीकरण है।

ग) $y = A\cos(ax)$ ... (39)

x के सापेक्ष अवकलन करने पर हमें प्राप्त होता है।

$y' = -Aa\sin(ax)$ ... (40)

समीकरणों (39) और (40) को वर्ग करके जोड़ने पर हमें प्राप्त होता है

$$y^2 + \left(\frac{y'}{a}\right)^2 = A^2$$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर हम पाते हैं

$$2yy' + \frac{2}{a^2}y'y'' = 0$$

$$\Rightarrow y'\left(y + \frac{y''}{a^2}\right) = 0,$$

जो कि अभीष्ट अवकल समीकरण है।

E9) क) $\frac{dp}{dt} = kp$, जबकि $p(0) = p_0$

ख) $\frac{dx}{dt} = kx$, $x(0) = x_0$ जहां $k<0$ एक अचर है।

1.8 शब्दावली

आंशिक अवकलज	partial derivative
आंशिक अवकल समीकरण	partial differential equation
आदि मान समस्या	initial value problem
कोटि	order
निदर्श	model
वक्र-कुल	family of curves
विचित्र हल	singular solution
विशेष हल	particular solution
व्यापक हल	general solution
संपूर्ण अवकल समीकरण	total differential equation
सम्मिश्र हल	complex solution
साधारण अवकलज	ordinary derivative
साधारण अवकल समीकरण	ordinary differential equation