इन्दिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय, नई दिल्ली

अंतरविषयक एवं परा–विषयक अध्ययन विद्यापीठ

बीपीवाईसी–105

खण्ड 6

प्रतिज्ञप्ति का तर्कशास्त्र एवं प्रतीकात्मक तर्कशास्त्र

खण्ड परिचय

खण्ड VI "प्रतिज्ञप्ति का तर्कशास्त्र एवं प्रतीकात्मक तर्कशास्त्र" में 4 इकाइयाँ शामिल हैं। यह खंड छात्रों को प्रस्तावना तर्क से परिचित कराता है, जो आधुनिक तर्क और प्रतीकात्मक तर्क के विकास को समझने के लिए महत्वपूर्ण है। प्रतीकात्मक तर्क, तर्क के रूपों का अध्ययन है। तर्क, तर्क की एक इकाई है जो अन्य विचारों को प्रमाण के रूप में उद्धृत करके किसी निश्चित विचार को सत्य सिद्ध करने का प्रयास करता है। जिस विचार को तर्क सत्य सिद्ध करने का प्रयास करता है उसे "अंतिम निष्कर्ष" कहा जाता है। प्रत्येक तर्क का केवल एक ही अंतिम निष्कर्ष होता है। वे विचार जिन्हें तर्क अंतिम निष्कर्ष के प्रमाण के रूप में उपयोग करता है, "आधार" कहलाते हैं। प्रत्येक तर्क में कम से कम एक आधार होता है और उनकी संख्या कितनी भी हो सकती है। आधार से अंतिम निष्कर्ष तक पहुँचने के मार्ग में आने वाले मध्यवर्ती विचारों को "उप–निष्कर्ष" कहा जाता है। एक तर्क में किसी उप–निष्कर्ष का होना आवश्यक नहीं है, हालाँकि अधिकांश तर्कों में ऐसा होता है। यदि किसी तर्क में उप–निष्कर्ष हैं, तो उनकी संख्या कितनी भी हो सकती है।

इकाई 16 "प्रतिज्ञप्ति का तर्कशास्त्र" शिक्षार्थियों को प्रतिज्ञप्ति तर्क से परिचित कराती है। आधुनिक तर्कशास्त्र या प्रतीकात्मक तर्कशास्त्र के विकास को समझने के लिए प्रतिज्ञप्ति के तर्कशास्त्र को समझना अत्यंत महत्वपूर्ण है। यह इकाई शिक्षार्थियों को तार्किक अभिव्यक्तियों में सत्यता और वैधता की जाँच के लिए प्रतिज्ञप्ति तर्कशास्त्र द्वारा प्रयुक्त तकनीकों को समझने में भी मदद करती है। यह इकाई भारतीय तर्कशास्त्र में प्रतिज्ञप्ति तर्कशास्त्र के समानांतरों का भी संक्षेप में उल्लेख करती है।

इकाई 17 "वैधता के औपचारिक प्रमाणः अनुमान के नियम और विस्थापन के नियम" पर आधारित है। यह इकाई तर्कों के परीक्षण की तकनीक को स्पष्ट करती है। यह दो तरीकों से प्राप्त किया जा रहा हैः पारंपरिक तर्कशास्त्र की सीमाओं को उजागर करना और साथ ही पारंपरिक तर्कशास्त्र की आवश्यकता को प्रदर्शित करना। ये दो उद्देश्य इस इकाई का मूल हैं। इकाई प्रतिस्थापन के नियमों पर भी प्रकाश डालती है। यह अनुमान के नियमों की अपर्याप्तता को उजागर करती है। यह यह भी प्रदर्शित करती है कि तर्कशास्त्र एक विकासशील विज्ञान है। यदि तर्कों के परीक्षण की नई तकनीकों का आविष्कार किया जाता है, तो तर्कशास्त्र तकनीकी विज्ञान के समकक्ष हो जाता है जहाँ निरंतर आविष्कार और सुधार आम बात हैं। यह इकाई एक महत्वपूर्ण तथ्य को भी प्रदर्शित करती है कि सभी तर्क एक या दो श्रेणियों में नहीं आते हैं। इसलिए, समान नियम सफलता की गारंटी नहीं दे सकते।

इकाई 18 "सोपाधिक प्रमाण और अप्रत्यक्ष प्रमाण" का अर्थ समझाती है। यह इकाई तर्कों की वैधता जाँचने की तकनीकों की एक नई सूची प्रस्तुत करती है। जितनी तकनीकें हैं, उतने ही

तर्क भी होते हैं। इस इकाई का मुख्य उद्देश्य आपको यह समझाना है कि ऐसी कोई एक तकनीक नहीं है जो सभी प्रकार की समस्याओं को हल करने में आपकी मदद कर सके। केवल वैधता जाँचने की कला जानना ही पर्याप्त नहीं है। इसलिए, अमान्यता जाँचने की कला भी आनी चाहिए। अच्छे तर्क का संतोषजनक ज्ञान प्राप्त करने के लिए, आपको यह भी जानना चाहिए कि किसी तर्क को क्या बुरा बनाता है।

इकाई 19 "परिमाणन" पर चर्चा करती है। मोटे तौर पर, तर्क दो प्रकार के होते हैं: कथनों से युक्त तर्क, जो सत्य–कार्यात्मक रूप से यौगिक होते हैं और तर्क, जो न तो सत्य–कार्यात्मक होते हैं और न ही यौगिक। यह इकाई बाद वाले प्रकार के तर्कों से संबंधित है। इस इकाई में, तर्कों की वैधता जाँचने के लिए नियमों का एक नया समूह प्रस्तावित किया गया है, जिसमें सामान्य और एकवचन प्रस्ताव शामिल हैं। यह इकाई आपको प्रतीकात्मक तर्क की पृष्ठभूमि में अरस्तू के न्यायवाक्य के सिद्धांत को समझने में मदद करेगी।

ऊपर दी गई 4 इकाइयों का उद्देश्य प्रत्येक छात्र को गहन चिंतन करने, तर्कों की पहचान और विश्लेषण करने, प्रतीकात्मक संकेतन में तर्कों को प्रस्तुत करने, और निगमनात्मक प्रमाणों का उपयोग करके तर्कों की वैधता निर्धारित करने की क्षमता प्रदान करना है। एक व्यक्ति "तर्क" तब बनाता है जब वह कोई दावा करता है और उस दावे को कुछ प्रमाणों से पुष्ट करने का प्रयास करता है। दूसरे शब्दों में, एक तर्क में एक दावा और कुछ तर्क शामिल होते हैं जो उस दावे का समर्थन करने वाले होते हैं। बेशक, आप हर समय तर्क बनाते और उनका मूल्यांकन करते हैं, और संभवतः अच्छी कुशलता के साथ। लेकिन इस पाठ्यक्रम में हम एक कदम पीछे हटकर पूछते हैं: एक तर्क को अच्छा क्या बनाता है? अच्छे और बुरे तर्कों में अंतर करने के लिए हमें किन सिद्धांतों का प्रयोग करना चाहिए?

इन्दिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय, नई दिल्ली

अंतरविषयक एवं परा–विषयक अध्ययन विद्यापीठ

बीपीवाईसी–105

खण्ड 6

प्रतिज्ञप्ति का तर्कशास्त्र एवं प्रतीकात्मक तर्कशास्त्र

इकाई 16

प्रतिज्ञप्ति का तर्कशास्त्र

इकाई 17

वैधता के औपचारिक प्रमाणः अनुमान के नियम और विस्थापन के नियम

इकाई 18

सोपाधिक प्रमाण और अप्रत्यक्ष प्रमाण

इकाई 19

परिमाणन

इकाई 16 प्रतिज्ञप्ति का तर्कशास्त्र[17]

रूपरेखा

16.0 उद्देश्य

16.1 परिचय

16.2 प्रतिज्ञप्तियां और प्रतीकीकरण

16.3 सु–रचित सूत्र

16.4 सत्य फलन

16.5 प्रतिज्ञप्तियों के लिए सत्यता–सारणी

16.6 पुनरुक्ति, आत्म–व्याघात और आपातिक प्रतिज्ञप्तियां

16.7 युक्तियों के लिए सत्यता–सारणी

16.8 अप्रत्यक्ष सत्यता–सारणी विधि

16.9 युक्ति–रूप

16.10 वैधता का औपचारिक साक्ष्य

16.11 भारतीय तर्कशास्त्र पर एक समीक्षा

16.12 सारांश

16.13 कुंजी शब्द

16.14 अन्य सहायक अध्ययन–सामग्री एवं सन्दर्भ

16.15 बोध प्रश्नों के उत्तर

---

[17] श्री इकबाल हुसैन अहमद, सहायक प्राध्यापक, अध्यापन शिक्षण केन्द्र, तेजपुर विश्वविद्यालय। अनुवाद– डॉ. रिंकी जादवानी, अनुवाद– डॉ. रिंकी जादवानी, सहायक प्राध्यापक, दर्शनशास्त्र, मानविकी विभाग, दिल्ली प्रौद्योगिक विश्वविद्यालय, दिल्ली।

16.0 उद्देश्य

इस इकाई का उद्देश्य छात्र को प्रतिज्ञप्तीय तर्कशास्त्र से परिचित कराना है। आधुनिक तर्कशास्त्र या प्रतीकात्मक तर्कशास्त्र के विकास को समझने के लिए प्रतिज्ञप्तीय तर्कशास्त्र को समझना महत्वपूर्ण है। यह छात्र को तार्किक अभिव्यक्तियों में सत्यता और वैधता का परीक्षण करने के लिए, प्रतिज्ञप्तीय तर्कशास्त्र के अंतर्गत उपयोग की जाने वाली तकनीकों को समझने में भी मदद करता है। प्रतिज्ञप्तीय तर्कशास्त्र के विभिन्न पक्षों के विश्लेषण के माध्यम से, छात्र यह सीखने में सक्षम होंगे;

- प्रतिज्ञप्तीय तर्कशास्त्र की प्रकृति
- प्रतिज्ञप्तीय तर्कशास्त्र में प्रतीकीकरण की प्रक्रिया
- सत्य–फलन प्रतिज्ञप्तियों के प्रकार
- सत्य–सारणी विधि का उपयोग
- अप्रत्यक्ष सत्य–सारणी विधि
- भारतीय तर्कशास्त्र में प्रतिज्ञप्तीय तर्कशास्त्र की समानताएं

(**टिप्पणीः** इस इकाई में अन्य इकाईयों की भांति हिन्दी और अंग्रेजी दोनों भाषाओं के वर्णों का उपयोग प्रतिज्ञप्तियों के प्रतीकीकरण के लिए किया गया है, यह विद्यार्थी की समझ के दायरे को बढ़ाने के उद्देश्य से किया गया है)।

16.1 परिचय

इस पाठ्यक्रम के पिछले खंडों में और इस खंड की पिछली इकाइयों में आपने सीखा है कि निगमनात्मक तर्क–युक्ति की वैधता उसके प्रारूप पर निर्भर करती है। यह न्यायवाक्य की इकाइयों में और अधिक स्पष्ट किया गया है। केवल प्रारूप/रुप को देखकर आप कह सकते हैं कि तर्क–युक्ति वैध है या अवैध। हालाँकि आपने देखा होगा कि भाषा के सामान्य उपयोग में प्रारूप का मूल्यांकन जटिल है। उदाहरण के लिए, एक ही शब्द का उपयोग दो प्रतिज्ञप्तियों में अलग–अलग अर्थों के लिए किया जा सकता है या कभी–कभी दो शब्दों के बीच का संबंध स्पष्ट रूप से नहीं बताया जा सकता है। इसलिए तर्कशास्त्री हमेशा प्रक्रिया को सरल बनाने का प्रयास करते रहे हैं। पारंपरिक तर्कशास्त्र में आपने देखा है कि कैसे S, P और M अक्षरों का उपयोग न्यायवाक्यीय युक्तियों में शब्दों का प्रतिनिधित्व करने के लिए किया जाता है और कैसे एक न्यायवाक्य को एक मानक रूप दिया जाता है। यह कुछ हद तक सामान्य भाषा की अस्पष्टता को कम करने में सक्षम था। हालाँकि, यह प्रक्रिया काफी हद तक दो चीजों तक सीमित थी; मानक–प्रारूप न्यायवाक्य में केवल निरूपाधिक प्रतिज्ञप्तियों का उपयोग करना और

प्रतिज्ञप्तियों के पदों का प्रतीकीकरण। लेकिन आधुनिक तर्कशास्त्री तार्किक प्रारूपों की पहचान को आसान बनाने के लिए विशेष प्रतीकों के उपयोग द्वारा, जो पदों के बीच संबंध भी दिखाते हैं, और भी आगे बढ़े। उन्होंने प्रतिज्ञप्तियों को पुनः वर्गीकृत करने का प्रयास किया ताकि जटिल प्रतिज्ञप्तियों वाली युक्तियों के प्रारूप को भी आसानी से पहचाना जा सके। इन प्रयासों से प्रतिज्ञप्तीय तर्कशास्त्र का विकास हुआ।

पारंपरिक तर्कशास्त्र के विपरीत, प्रतिज्ञप्तीय तर्कशास्त्र, तर्क–युक्तियों को देखते समय केवल प्रतिज्ञप्ति के पदों को न देखकर, पूरी प्रतिज्ञप्ति पर विचार करता है। चूंकि यह प्रतिज्ञप्तियों या तार्किक वाक्यों से संबंधित है, इसलिए इसे प्रतिज्ञप्तीय तर्कशास्त्र और कभी–कभी वाक्यी तर्कशास्त्र भी कहा जाता है। इस प्रकार प्रतिज्ञप्तीय तर्कशास्त्र प्रतिज्ञप्तियों की आंतरिक संरचना का विश्लेषण नहीं करता है। (हालांकि आधुनिक तर्कशास्त्र की एक और शाखा है जो प्रतिज्ञप्तियों की आंतरिक संरचना का विश्लेषण करती है। तर्क की उस शाखा को विधेय तर्कशास्त्र के रूप में जाना जाता है। हमारे पास यहां इस पर चर्चा करने की कोई स्थिति नहीं है।) प्रतिज्ञप्तीय तर्कशास्त्र एक युक्ति की सभी प्रतिज्ञप्तियों को देखता है। प्रतिज्ञप्तियों को अक्षरों द्वारा दर्शाया जाता है और प्रतिज्ञप्तियों के बीच संबंधों को संयोजकों या संकारकों (ऑपरेटर) द्वारा दर्शाया जाता है। इस प्रकार प्रतिज्ञप्तीय तर्कशास्त्र जटिल तर्क–युक्तियों को प्रतीकात्मक रूप में प्रस्तुत कर सकता है और ऐसी तर्क–युक्तियों की वैधता का निर्धारण करना बहुत आसान हो जाता है।

16.2 प्रतिज्ञप्तियां और प्रतीकीकरण

प्रतिज्ञप्तीय तर्कशास्त्र प्रतिज्ञप्तियों वाली तर्क–युक्तियों से संबंधित है और युक्ति की वैधता और अवैधता के लिए प्रत्येक प्रतिज्ञप्ति को संपूर्णता में लिया जाता है। इसलिए यह प्रतिज्ञप्ति की पारंपरिक परिभाषा और वर्गीकरण पर आधारित नहीं हो सकता। पारंपरिक तर्कशास्त्र, जैसा कि आप पहले ही देख चुके हैं, व्यापक रूप से निरूपाधिक प्रतिज्ञप्तियों तक ही सीमित था। इसलिए पारंपरिक तर्कशास्त्र जटिल वाक्यों वाली तर्क–युक्तियों के संबंध में असमर्थ था। प्रतिज्ञप्तीय तर्कशास्त्र, प्रतिज्ञप्ति की आधुनिक परिभाषा कि प्रतिज्ञप्ति एक कथन है जो या तो सत्य है या असत्य है, के आधार पर इन सीमाओं को तोड़ पाया। इसलिए यह दो पद और एक संयोजक वाले वाक्यों तक ही सीमित नहीं है।

आधुनिक तर्कशास्त्रियों ने प्रतिज्ञप्तियों को मुख्य तौर पर दो प्रकारों में वर्गीकृत किया है– सरल और मिश्रित प्रतिज्ञप्तियां। प्रतिज्ञप्तीय तर्कशास्त्र इस वर्गीकरण को आधार बनाता है। यह अंतर युक्ति की प्रतीकीकरण प्रक्रिया को समझने और प्रतिज्ञप्तीय तर्कशास्त्र में उसकी वैधता का परीक्षण करने के लिए महत्वपूर्ण है।

एक सरल प्रतिज्ञप्ति वह है जिसके घटक के रूप में कोई अन्य प्रतिज्ञप्ति शामिल नहीं है। दूसरे शब्दों में, एक सरल प्रतिज्ञप्ति को विभिन्न प्रतिज्ञप्तियों में विभाजित नहीं किया जा सकता है। उदाहरण के लिए;

टोडरमल एक महान व्यक्ति थे।

योग का आविष्कार प्राचीन भारत में हुआ था।

टैगोर नोबेल पुरस्कार विजेता थे।

इन प्रतिज्ञप्तियों में घटकों के रूप में अन्य प्रतिज्ञप्तियां नहीं होती हैं। इसलिए, ये सरल प्रतिज्ञप्तियां हैं। प्रतिज्ञप्तीय तर्कशास्त्र में इन प्रतिज्ञप्तियों को प्रतीकात्मक रूप से किसी भी सुविधाजनक अपरकेस अक्षर का उपयोग करके दर्शाया जाता है। आमतौर पर किसी भी महत्वपूर्ण शब्द का पहला अक्षर लिया जा सकता है। यहाँ ट, य और ट का उपयोग क्रमशः उपरोक्त तीन प्रतिज्ञप्तियों का प्रतिनिधित्व करने के लिए किया जा सकता है। अब आप देख सकते हैं कि 'टोडरमल' और 'टैगोर' शब्दों से संकेत लेते हुए ट का दो बार प्रयोग किया गया है। क्या आपको नहीं लगता कि इससे कुछ स्थितियों में भ्रम पैदा होगा? विशेषरूप से अगर ये एक ही युक्ति के भाग हैं। इसलिए, एक युक्ति की सभी सरल प्रतिज्ञप्तियों के लिए हमें प्रत्येक प्रतिज्ञप्ति का एक अद्वितीय अक्षर उपयोग करने की आवश्यकता है। हम प्रतीकीकरण के इस विषय पर जल्द ही वापस आएंगे। आइए अब पहले मिश्रित प्रतिज्ञप्ति के बारे में जानते हैं।

एक मिश्रित प्रतिज्ञप्ति को एक ऐसी प्रतिज्ञप्ति के रूप में परिभाषित किया जा सकता है जिसमें घटक के रूप में एक या एक से अधिक सरल प्रतिज्ञप्तियां होती हैं। उदाहरण के लिए,

ऐसा नहीं है कि तानसेन एक महान संगीतज्ञ थे।

योग का आविष्कार प्राचीन भारत में हुआ था और टैगोर नोबेल पुरस्कार विजेता थे।

पहले मामले में घटक के रूप में एक सरल प्रतिज्ञप्ति है कि 'तानसेन एक महान संगीतकार थे'। और दूसरी प्रतिज्ञप्ति में घटक के रूप में दो सरल प्रतिज्ञप्तियां हैं – (1) योग का आविष्कार प्राचीन भारत में हुआ था, (2) टैगोर नोबेल पुरस्कार विजेता थे।

तर्कशास्त्री व्यापक रूप से मिश्रित प्रतिज्ञप्तियों को पाँच प्रकारों में वर्गीकृत करते हैं; निषेध, संयोजन, वियोजन, सोपाधिक और द्वि–उपाधिक।

निषेध या निषेधात्मक प्रतिज्ञप्ति में किसी प्रतिज्ञप्ति का निषेध शामिल होता है। इस प्रतिज्ञप्ति में शब्द 'नहीं' या वाक्यांश 'ऐसा नहीं है कि' का प्रयोग किया जाता है। उदाहरण के लिए, 'हरीश एक ईमानदार व्यक्ति नहीं है', 'ऐसा नहीं है कि हरीश एक ईमानदार व्यक्ति है।' कृपया ध्यान दें

कि केवल नकारात्मक अर्थ वाले शब्द का उपयोग करने से एक प्रतिज्ञप्ति एक नकारात्मक मिश्रित प्रतिज्ञप्ति नहीं बन जाती है। उदाहरण के लिए, 'हरीश एक बेईमान व्यक्ति है' केवल एक सरल प्रतिज्ञप्ति है, 'हरीश एक बेईमान व्यक्ति नहीं है' एक निषेध है, और इसलिए, एक मिश्रित प्रतिज्ञप्ति है।

संयोजन या संयोजक प्रतिज्ञप्ति ऐसी मिश्रित प्रतिज्ञप्ति है जहाँ सरल प्रतिज्ञप्तियां 'और' या इसके जैसे शब्दों से जुड़ी होती हैं। उदाहरण के लिए, 'रमा एक शिक्षक है और दिनेश एक पत्रकार है'। इस प्रतिज्ञप्ति में दो सरल प्रतिज्ञप्तियां हैं– 'रमा एक शिक्षक है' और 'दिनेश एक पत्रकार हैं'। इन घटक प्रतिज्ञप्तियों को मिश्रितक कहा जाता है।

वियोजन या वियोजक प्रतिज्ञप्ति ऐसी मिश्रित प्रतिज्ञप्ति है जहाँ सरल प्रतिज्ञप्तियां 'या' या इसके जैसे शब्दों से जुड़ी होती हैं। उदाहरण के लिए, 'राम एक शिक्षक हैं या राम एक पत्रकार है'। प्रतिज्ञप्ति में दो सरल प्रतिज्ञप्तियां हैं– 'राम एक शिक्षक है' और 'राम एक पत्रकार है'। इन घटक प्रतिज्ञप्तियों को वियुक्तक कहा जाता है। यह ध्यान दिया जा सकता है कि वियोजक प्रतिज्ञप्ति को आगे व्यावर्तक और समावेशी वियोजन में विभाजित किया जा सकता है। व्यावर्तक वियोजन में दो वियुक्तकों में से केवल एक ही सत्य हो सकता है।

सोपाधिक प्रतिज्ञप्ति ऐसी मिश्रित प्रतिज्ञप्ति है जहां घटकों के बीच संबंध 'यदि' और 'तो' द्वारा व्यक्त किया जाता है। उदाहरण के लिए, यदि मौसम प्रतिकूल रहेगा तो क्रिकेट मैच रद्द कर दिया जाएगा। इस मिश्रित प्रतिज्ञप्ति में दो सरल प्रतिज्ञप्तियां क्रमशः 'मौसम प्रतिकूल रहेगा' और 'क्रिकेट मैच रद्द कर दिया जाएगा' 'यदि...तो..' से जुड़े हुए हैं। 'यदि' /'अगर' के बाद की प्रतिज्ञप्ति को पूर्ववर्ती कहा जाता है और 'तो' के बाद की प्रतिज्ञप्ति को अनुवर्ती कहा जाता है। इस संबंध को शाब्दिक आपादन कहा जाता है। क्योंकि अनुवर्ती का वस्तुगत सत्य पूर्ववर्ती के वस्तुगत सत्य द्वारा निहित या स्थापित होता है। कृपया यहां ध्यान दें कि आपादन को व्युत्पत्ति के अर्थ में नहीं लिया जाना चाहिए जैसे कि किसी युक्ति की प्रतिज्ञप्ति निष्कर्ष को दिखाती है।

दूसरी ओर, द्वि–उपाधिक प्रतिज्ञप्ति, एक ऐसी मिश्रित प्रतिज्ञप्ति है जहां घटक 'यदि और केवल यदि' वाक्यांश से जुड़े होते हैं। उदाहरण के लिए, सीमा सिनेमा तभी जाएगी जब रिहाना उसके साथ जाएगी। यहाँ संबंध वास्तविक तुल्यता का है। इस प्रतिज्ञप्ति को द्वि–उपाधिक कहा जाता है क्योंकि इसमें दो सोपाधिक प्रतिज्ञप्तियों का संयोजन होता है। अगर हम वर्तमान उदाहरण का विश्लेषण करें तो हम पाते हैं कि– यदि रिहाना उसके साथ जाती है तो सीमा सिनेमा जाएगी और सीमा तभी सिनेमा जाएगी जब रिहाना उसके साथ जाएगी। यहां घटकों के बीच संबंध एक अनिवार्य और पर्याप्त उपाधि है।

अब देखते हैं कि ऊपर बताई गई विधि के अनुसार इन पांच प्रकार की मिश्रित प्रतिज्ञप्तियों का प्रतीकीकरण किस प्रकार किया जा सकता है।

मिश्रित प्रतिज्ञप्ति	उदाहरण	प्रतीकीकरण
निषेधात्मक प्रतिज्ञप्ति	यह मामला नहीं है कि हरीश एक ईमानदार व्यक्ति है	यह मामला नहीं है कि ह
संयोजक प्रतिज्ञप्ति	रमा एक अध्यापक है और दिनेश एक पत्रकार है	र और द
वियोजक प्रतिज्ञप्ति	रमा एक अध्यापक है अथवा रमा एक पत्रकार है	अ अथवा प
सोपाधिक प्रतिज्ञप्ति	यदि मौसम अस्थित है तो क्रिकेट मैच निरस्त हो जायेगा	यदि म तो न
द्वि–उपाधिक प्रतिज्ञप्ति	सीमा सिनेमा जायेगी यदि और केवल यदि रिहाना उसके साथ जायेगी	स यदि और केवल यदि र

तालिका 1: मिश्रित प्रतिज्ञप्ति और प्रतीकीकरण

यहाँ आप देख सकते हैं कि प्रत्येक मिश्रित प्रतिज्ञप्तियों में सरल प्रतिज्ञप्तियों को अपर केस वर्णमाला का उपयोग करके दिखाया गया है। लेकिन शब्दों और वाक्यांशों का प्रतीकीकरण कैसे करें, जैसे 'ऐसा नहीं है कि', 'या', 'और', 'यदि ... तो...', 'यदि और केवल यदि', आदि? अब इनका प्रतीकीकरण करने से पहले हमें यह याद रखना होगा कि ये सरल प्रतिज्ञप्तियों से अलग हैं। ये वाक्यांश मिश्रित प्रतिज्ञप्तियों की प्रकृति को प्रकट करते हैं। निषेध की स्थिति में, एक सरल प्रतिज्ञप्ति को नकारा जाता है, दूसरे मामलों में कम से कम दो सरल प्रतिज्ञप्तियों को एक विशेष विधि से एक विशेष अर्थ के लिए जोड़ा जाता है। इसलिए, मिश्रित प्रतिज्ञप्तियों का प्रतीकीकरण करते समय हमें विशेष तार्किक प्रतीकों का उपयोग करने की आवश्यकता होती है जिन्हें तार्किक संकारक (लॉजिकल ऑपरेटर्स) या संयोजक या तार्किक स्थिरांक के रूप में जाना जाता है। ये अंग्रेजी वाक्यों को प्रतीकात्मक तार्किक अभिव्यक्तियों में अनुवाद करने में हमारी मदद करते हैं। इस प्रकार मिश्रित प्रतिज्ञप्तियों को व्यक्त करने के लिए हमारे पास पाँच तार्किक संकारक हैं। निम्नलिखित सूची प्रतीकीकरण की प्रक्रिया में हमारी मार्गदर्शिका बनने जा रही है।

प्रतिज्ञप्ति	प्रतिनिधि शब्द / वाक्यांश	तार्किक संकारक	नम	कार्य
निषेधात्मक	नहीं / यह मामला नहीं है कि / यह असत्य है कि	~	वक्र रेखा	निषेध
संयोजक	और / भी / अधिक क्या कहा जाये	•	बिन्दु	संयोजन
वियोजक	या / अथवा / यदि ऐसा नहीं	V	पत्ती की तरह	वियोजन

सोपाधिक	केवल यदि/यदि... तब/यदि...तो	⊃	़घोड़े की नाल की तरह	आपादान
द्वि–उपाधिक	यदि और केवल यदि/के लिए पर्याप्त और आवश्यक/अपरिहार्य शर्त	≡	त्रि–समानान्तर रेखाचिन्ह	समतुल्यन

तालिका 2

उपर्युक्त तालिका के आलोक में, पूर्व में उल्लिखित उदाहरणों को संकारकों के उपयोग से प्रतीकीकृत करते हैं।

मिश्रित प्रतिज्ञप्ति	**उदाहरण**	**प्रतीकीकरण**	**संकारक के उपयोग से प्रतीकीकरण**
निषेधात्मक प्रतिज्ञप्ति	यह मामला नहीं है कि हरीश एक ईमानदार व्यक्ति है	यह मामला नहीं है कि ह	~ह
संयोजक प्रतिज्ञप्ति	रमा एक अध्यापक है और दिनेश एक पत्रकार है	र और द	र•द
वियोजक प्रतिज्ञप्ति	रमा एक अध्यापक है अथवा रमा एक पत्रकार है	अ अथवा प	अ अ प
सोपाधिक प्रतिज्ञप्ति	यदि मौसम अस्थित है तो क्रिकेट मैच निरस्त हो जायेगा	यदि म तो न	म ⊃ न
द्वि–उपाधिक प्रतिज्ञप्ति	सीमा सिनेमा जायेगी यदि और केवल यदि रिहाना उसके साथ जायेगी	स यदि और केवल यदि र	स ≡ र

तालिका 3

सामान्य तौर पर, यह प्रतीकीकरण की प्रक्रिया है। इस तरह से हम वाक्यों का रूपांतरण तार्किक प्रतिज्ञप्तियों के प्रतीक रूप में कर सकते हैं, इससे मिश्रित प्रतिज्ञप्ति की तार्किक संरचना के निश्चय में सरलता होती है। लेकिन यह रूपांतरण हमेशा हमारी भाषा के भाव को पकड़ने में समर्थ नहीं होता है, लेकिन फिर भी एक हद यह उस भाव को पकड़ता है। यह चर्चा करना इस इकाई का प्रतिपाद्य नहीं है। आईये प्रतीकीकरण से सुपरिचित होने के लिए कुछ अन्य उदाहरणों की चर्चा करते हैं।

आप जान ही चुके हैं कि किसी सरल प्रतिज्ञप्ति के निषेध से मिश्रित प्रतिज्ञप्ति बनती है, जिसे निषेधात्मक प्रतिज्ञप्ति कहते हैं। निषेध को दर्शाने के लिए उस सरल प्रतिज्ञप्ति के पहले वक्र रेखा चिन्ह का उपयोग करते हैं। हमारी भाषा में निषेध कई तरह से अभिव्यक्ति पाता है, लेकिन तार्किक संकारक प्रत्येक मामले में समान रहता है।

सभी मनुष्य वैज्ञानिक नहीं हैं। ~व (वैज्ञानिक के लिए प्रतीक व)

यह मामला नहीं है कि सभी मनुष्य वैज्ञानिक हैं। ~व

यह असत्य है कि सभी मनुष्य वैज्ञानिक हैं। ~व

यह स्पष्ट है कि ~ को उस प्रतिज्ञप्ति के पहले लिखा जाना चाहिए, जिसका निषेध किया गया है। ~ को दो प्रतिज्ञप्तियों के संयोजक/जोड़ने वाले के तौर पर नहीं लिखा जा सकता है। इसलिए अ~ और अ~ब सही नहीं हैं। यद्यपि अ• ~ब सही है, क्योंकि यहाँ ~ को ब के पहले रखा गया है, और उसके पूर्व कोई प्रतिज्ञप्ति न होकर एक अन्य संकारक है। ~ का उपयोग एक मिश्रित प्रतिज्ञप्ति, जिसमें अनेक सरल प्रतिज्ञप्तियां सम्मिलित हैं, के पहले किया जा सकता है। उदाहरण के लिए,

~(PvQ)

~(P•-¼Q≡R))

~[(P•S) v (Q⊃R)]

ये सभी प्रतिज्ञप्तियां निषेधात्मक हैं, क्योंकि इनमें ~ मुख्य संकारक है। अब प्रश्न है कि मुख्य संकारक क्या है? मुख्य संकारक वह है, जिसकी सीमा में मिश्रित प्रतिज्ञप्ति का सभी कुछ सम्मिलित हो जाता है। आप जानते ही हैं कि मिश्रित प्रतिज्ञप्ति में अनेक घटक प्रतिज्ञप्तियां हो सकती हैं, जिसके कारण उसमें अनेक संकारकों का उपयोग हो सकता है। लेकिन मुख्य संकारक के ज्ञान से ही कथन की अभिव्यक्ति उचित ढंग से सम्भव है। उदाहरण के लिए, A •B **v** C। इसमें हम यह नहीं जान सकते कि यह किस प्रकार की मिश्रित प्रतिज्ञप्ति है, क्योंकि इसमें मुख्य संकारक की पहचान नहीं हो पा रही है। लेकिन A • (B **v** C) में मुख्य संकारक को पहचाना जा सकता है। इसमें • मुख्य संकारक है, क्योंकि सभी कुछ • की सीमा में सम्मिलित है। मुख्य संकारक को पहचाने का एक सरल उपाय यह है कि यदि कोष्ठक हों, तो कोष्ठक के बाहर जो संकारक हो वह मुख्य संकारक होता है। हाँ, यदि दो संकारक हों तो ~ के अलावा अन्य दूसरा मुख्य संकारक होगा। उदाहरण के लिए, (H v H) • ~ (P v Z)। यहाँ • मुख्य संकारक है।

अब संयोजन की चर्चा करते हैं। • प्रतीक का उपयोग "और", "भी", "लेकिन", "किन्तु", "तो भी", "अब भी", इत्यादि संयोजन के रूपांतरण में किया जाता है। इन प्रतिज्ञप्तियों के रूपांतरण के

लिए यह सुनिश्चित होना चाहिए कि तार्किक कथन सामान्य वाक्य के समतुल्य हों। उदाहरण के लिए, राम और लक्ष्मण दार्शनिक हैं। इसका रूपांतरण होगा, र • ल, क्योंकि यह वाक्य राम दार्शनिक है और लक्ष्मण दार्शनिक है के समतुल्य है। लेकिन राम और लक्ष्मण मित्र हैं को र • ल में रूपांतरित नहीं किया जा सकता है, क्योंकि र • ल का तात्पर्य है राम मित्र है और लक्ष्मण मित्र है। और यह सामान्य (आम बोलचाल) वाक्य के समतुल्य नहीं है।

निम्नोक्त सभी संयोजक प्रतिज्ञप्तियां हैं, क्योंकि इनमें मुख्य संकारक • है।

W • L, (W v L) • (D v L), ~ P • [W v (S ⊃ T)]

वियोजन में, अ प्रतीक का उपयोग "या", "यदि ऐसा नहीं", "अथवा", इत्यादि के रूपांतरण के लिए किया जाता है। "या"/"अथवा" का उपयोग समावेशन अथवा बहिर्वेशन/निष्कासन दोनों भावों में किया जा सकता है। यदि समावेशन भाव लिया जाता है, तो इसका आशय होता है कि या से जुड़ी दोनों प्रतिज्ञप्तियां सत्य हो सकती हैं। उदाहरण के लिए, या तो वह अध्यापक है या फिर पत्रकार है। यहाँ अध्यापक और पत्रकार दोनों हुआ जा सकता है। निष्कासन के भाव में, दोनों प्रतिज्ञप्तियां एक साथ सत्य नहीं हो सकती हैं। उदाहरण के लिए, वह कल शाम लंदन गई या वह कल शाम वाशिंगटन गई। यहाँ केवल एक ही प्रतिज्ञप्ति सत्य हो सकती है। जब यदि मिश्रित प्रतिज्ञप्ति में मुख्य संकारक v हो तो यह वियोजक प्रतिज्ञप्ति होती है। निम्नोक्त वियोजक प्रतिज्ञप्ति के उदाहरण हैं,

P v Q, Z v (G • L), (L• V) v (Q v ~ K)

सोपाधिक या आपातिक प्रतिज्ञप्तियों के लिए का उपयोग करके "यदि...तो...", "केवल यदि" या समरूप अभिव्यक्तियों का रूपांतरण किया जाता है। सोपाधिक प्रतिज्ञप्ति के मामले में, उपाधि (शर्त) या तो पर्याप्त ("यदि" से इंगित) या फिर आवश्यक/अपरिहार्य ("केवल यदि" से इंगित) हो सकती है। इसलिए पूर्ववर्ती और अनुवर्ती/उत्तरवर्ती को चुनना थोड़ा जटिल है। "यदि" के साथ आने वाला हिस्सा पूर्ववर्ती के तौर पर माना जाता है। और "केवल यदि" के साथ आने वाला हिस्सा हमेशा उत्तरवर्ती माना जाता है। उदाहरण के लिए, अ केवल यदि ब, का रूपांतरण है अ ⊃ ब, जबकि अ यदि ब का रूपांतरण है ब ⊃ अ।

⊃ को मुख्य संकारक के तौर पर रखने वाली अभिव्यक्ति सोपाधिक/आपातिक प्रतिज्ञप्ति होती है। उदाहरण के लिए,

P⊃Q, Z⊃ (G • L), (L• V) ⊃ (Q v ~ K)

द्वि–उपाधिक प्रतिज्ञप्ति में ≡ प्रतीक को "यदि और केवल यदि" और समरूप अभिव्यक्तियों के रूपांतरण के लिए उपयोग में लाया जाता है। यह दो उपाधियों– अपरिहार्य और पर्याप्त को

इंगित करता है। इसलिए यह प्रतिज्ञप्ति दो सोपाधिक प्रतिज्ञप्तियों के समतुल्य होती है। उदाहरण के लिए, मोबाइल कम्पनी अ 4जी सेवा का मूल्य घटाती है यदि और केवल यदि मोबाइल कम्पनी ब 4जी सेवा का मूल्य घटाती है। इसे अ≡ब से प्रतीकीकृत किया जा सकता है। इसे इस तरह भी अभिव्यक्त किया जा सकता हैरू मोबाइल कम्पनी अ 4जी सेवा का मूल्य घटाती है यदि मोबाइल कम्पनी ब 4जी सेवा का मूल्य घटाती है (ब⊃अ) और मोबाइल कम्पनी अ 4जी सेवा का मूल्य घटाती है केवल यदि मोबाइल कम्पनी ब 4जी सेवा का मूल्य घटाती है (अ⊃ब)।

इन सोपाधिक प्रतिज्ञप्तियों को एक साथ इस तरह प्रतीकीकृत किया जा सकता है (ब⊃अ)•(अ⊃ब) और यह अ≡ब के समतुल्य है।

निम्नोक्त मिश्रित प्रतिज्ञप्तियां दि–उपाधिक हैं, क्योंकि इनका मुख्य संकारक ≡ है।

$\sim P \equiv Q,\ Z \equiv (G \bullet L),\ (L \bullet \sim V) \equiv (Q \vee \sim K)$

16.3 सु–रचित सूत्र

उपर्युक्त उदाहरणों में दर्शाये गये प्रतीकीकृत अभिव्यक्तियों को सु–रचित सूत्र कहते हैं। वे अर्थपूर्ण और अभ्रामक वाक्यों के अनुवाद/रूपांतरण हैं। वे वाक्य–विन्यास में उचित वाक्यों के समान ही वाक्य–विन्यास में उचित होते हैं। इसे एक उदाहरण से स्पष्ट किया जा सकता है– "मैरी इंद्रधनुष के रंगों को प्यार करती है"। यह वाक्य–विन्यास में उचित वाक्य है। इसका अर्थ स्पष्ट और अभ्रामक है। लेकिन "इंद्रधनुष प्यार है मैरी रंग करता" वाक्य–विन्यास में उचित नहीं है। समानरूप से, तार्किक अभिव्यक्तियां वाक्य–विन्यास में उचित या अनुचित हो सकती हैं।

जो उचित होगी, उसे सु–रचित सूत्र कहते हैं। इस प्रकार "P v Q~", "v P•" सु–रचित सूत्र नहीं हैं।

नियम/रीति जो	सु–रचित सूत्र नहीं	सु–रचित सूत्र
संकारक को मध्य में रखे बिना, दो या अधिक प्रतिज्ञप्तियों को नहीं जोड़ा जा सकता है।	AB A(AvB)	A v B A • (A v B)
वक्र रेखा चिन्ह को प्रतिज्ञप्ति के तुरन्त बाद नहीं, अपितु प्रतिज्ञप्ति के पहले रखा जाना चाहिए	A~ (A v B) ~	~ A ~(A v B)

वक्र रेखा को अन्य संकारक के तुरन्त पहले नहीं रखा जा सकता है	~ • A A ~ v B	~ A• B A v ~ B
बिन्दु •, पत्ती चिन्ह अ, घोड़े की नाल का चिन्ह ⊃, या त्रिसमानान्तर रेखाचिन्ह ≡ को प्रतिज्ञप्तियों के मध्य में रखा जाना चाहिए	•A BC v ⊃ D F	A•B B v C F ⊃ D
कोष्ठकों का उचित उपयोग करके भ्रामकता से बचना चाहिए	A • ~R v Q ≡ T v Z	A •[(~R v Q) ≡ (T v Z)]

तालिका 4

बोध प्रश्न I

टिप्पणी: क) अपने उत्तर के लिए दिये गये स्थान का उपयोग कीजिए।

ख) अपने उत्तरों की जांच इकाई के अंत में दिये गये उत्तरों से कीजिए।

1. प्रतिज्ञप्ति तर्कशास्त्र क्या है?

....

....

....

....

2. उचित तार्किक संकारकों का उपयोग करते हुये निम्नलिखित प्रतिज्ञप्तियों का प्रतीकीकरण कीजिए।

अ) यह मामला नहीं है कि भारत मंगल मिशन को छोड़ देगा।

आ) यदि अमेजन का वर्षावन नष्ट हुआ, तो वैश्विक तापन खतरनाक होगा।

....

....

....

....

16.4 सत्यता फलन

सत्यता फलन को गणितीय फलन की तुलना में समझा जा सकता है। उदाहरण के लिए; क= ख+2। इसमें क के मूल्य का निर्धारण किया जा सकता है, यदि ख का मूल्य ज्ञात हो। मान लेते हैं कि ख का मूल्य है 1। तब क का मूल्य होगा 3। इसी प्रकार से, प्रतिज्ञप्ति तर्कशास्त्र में मिश्रित प्रतिज्ञप्ति के मूल्य को इसके घटकों के मूल्य से निर्धारित किया जा सकता है। गणित से अन्तर यह है कि तर्कशास्त्र में मूल्य संख्या न होकर सत्यता मूल्य होते हैं। एक प्रतिज्ञप्ति सत्य हो सकती है या असत्य हो सकती है। सत्य प्रतिज्ञप्ति का सत्यता मूल्य "सत्य" और असत्य प्रतिज्ञप्ति का सत्यता मूल्य "असत्य" होता है।

इस प्रकार सत्यता फलन वह मिश्रित अभिव्यक्ति है जिसका सत्यता मूल्य पूर्णतः इसके घटकों से निर्धारित होता है। तार्किक अभिव्यक्ति में हमारा लक्ष्य होता है, मुख्य संकारक (अचर) के मूल्य को अन्य संकारकों और प्रतिज्ञप्तियों इत्यादि के मूल्य के आधार पर पता करना, ये संकारक और प्रतिज्ञप्तियां उस मिश्रित प्रतिज्ञप्ति के घटक होते हैं। किन्तु, मूल्य के निर्धारण के लिए पूर्व में चर्चित मिश्रित प्रतिज्ञप्तियों के पांच प्ररूपों के लिए अनुप्रयुक्त नियमों का अनुसरण करना आवश्यक है।

16.4.1 कथन रूप अथवा प्रतिज्ञप्ति रूप

अभी तक हमारा सम्भन्ध प्रतिज्ञप्तियों के रूपांतरण से था। प्रतिज्ञप्तियों के प्रतिरूपण (प्रतिनिधित्व) के लिए, हमने बड़े वर्णों का उपयोग किया (यह अंग्रेजी भाषा या उसके समरूप भाषाओं के लिए लागू है)। लेकिन जैसाकि हम जानते हैं कि तर्कशास्त्र का सम्बन्ध वास्तविक युक्तियों अथवा वास्तविक प्रतिज्ञप्तियों की अपेक्षा तार्किक रूप (या तार्किक आकार) हैं। अतः, अब हम कथन रूप अथवा प्रतिज्ञप्ति रूप का परिचय प्राप्त करेंगे। संकारकों और कथन चरों के उपयोग से कथन रूप विकसित किया जा सकता है। कथन चरों को छोटे वर्णों से प्रतीकीकृत किया जाता है (यह अंग्रेजी भाषा या उसके समरूप भाषाओं के लिए लागू है)। कथन चर किसी भी प्रतिज्ञप्ति का प्रतिनिधित्व कर सकते हैं। संकारकों को तार्किक अचर कहते हैं, क्योंकि उनका उपयोग हमेशा समान ढंग से ही होता है। उदाहरण के लिए, "p v q" एक कथन रूप है। यदि हम "p" और "q" को क्रमशः "A" और "B" से प्रतिस्थापित कर दें, तो हमें प्रतिज्ञप्ति "A v B" प्राप्त होती है। इसलिए कथन रूप को हम इस तरह परिभाषित कर सकते हैं, "कथन–रूप कथन चरों और संकारकों की इस तरह की व्यवस्था है कि चरों का कथनों से एकरूप प्रतिस्थापन का परिणाम कथन होता है।"

तार्किक संकारकों की प्रकृति की परीक्षा कथन रूपों के पदों में की जा सकती है। इसके लिए प्रत्येक कथन रूप के लिए सत्यता सारणी बनानी होगी। सत्यता सारणी सत्यता मूल्यों की वह

व्यवस्था है जो सभी सम्भावित मामलों में यह दर्शाती है कि मिश्रित प्रतिज्ञप्ति का सत्यता मूल्य उसके सरल घटकों के सत्यता मूल्यों के द्वारा किस तरह निर्धारित होता है। सरल प्रतिज्ञप्ति का सत्यता मूल्य सत्य या असत्य हो सकता है। सत्यता सारणी को बनाने के समय यह प्रथा है कि सत्य के लिए अंग्रेजी का बड़ा वर्ण T और असत्य के लिए अंग्रेजी का बड़ा वर्ण F प्रयोग किया जाता है (**टिप्पणी:** हिन्दी भाषा में आप सत्य या असत्य भी प्रयोग कर सकते हैं, या फिर सत्य के लिए स और असत्य के लिए अ का प्रयोग भी कर सकते हैं)।

निषेध के लिए वक्र रेखा ˎ प्रतीक का उपयोग किया जाता है। निषेध के लिए सत्यता सारणी दर्शाती है कि निषेध रूप वाली किसी प्रतिज्ञप्ति **~p** का सत्यता मूल्य किस तरह उस प्रतिज्ञप्ति (**p**) जिसका निषेध किया गया है के सत्यता मूल्य से निर्धारित होता है।

16.4.1.1 निषेध

p	~p
T	F
F	T

सत्यता सारणी दर्शाती है जब **p** सत्य होता है तो **~p** असत्य और जब **p** असत्य हो तो **~p** सत्य।

अगला हम संयोजन के बारे में जानते हैं, जिसे से दर्शाते हैं। संयोजन (**p • q**) के रूप वाली प्रतिज्ञप्ति के सत्यता मूल्य को इसके वियोजों (**p, q**) के सत्यता मूल्य से निर्धारित किया जाता है।

16.4.1.2 संयोजन

P	Q	p • q
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

इस सत्यता सारणी में हम देखते हैं कि संयोजन केवल तभी सत्य होता है जब इसके दोनों संयोज सत्य हों और अन्य सभी मामलों में संयोजन असत्य होता है।

अब हम वियोजन पर चर्चा करते हैं, जिसे पत्ती (v) प्रतीक से दर्शाते हैं। वियोजन रूप वाली किसी प्रतिज्ञप्ति (pvq) के सत्यता मूल्य को वियोजों (p, q) के सत्यता मूल्य से निर्धारित करते हैं।

16.4.1.3 वियोजन

P	Q	p v q
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

वियोजन केवल तभी असत्य होता है जब दोनों वियोज असत्य होते हैं। अन्य सभी मामलों वियोजन सत्य होता है।

अब हम सोपाधिक (वस्तुगत आपादान) की चर्चा करेंगे, जिसे घोड़े की नाल जैसी आकृति (⊃) से दर्शाया जाता है। सोपाधिक रूप वाली किसी प्रतिज्ञप्ति (p⊃q) का सत्यता मूल्य इसके पूर्ववर्ती (p) और पश्चवर्ती/उत्तरवर्ती (q) के सत्यता मूल्यों से निर्धारित होता है।

16.4.1.4 सोपाधिक

P	Q	p ⊃ q
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

सोपाधिक केवल तभी असत्य होता है जब इसका पूर्ववर्ती सत्य हो और पश्चवर्ती असत्य। अन्य सभी मामलों में यह सत्य होता है।

अन्त में, हम द्विसोपाधिक (वस्तुगत समतुल्य) की चर्चा करते हैं, जिसे त्रिसमानान्तर रेखा (≡) से दर्शाया जाता है। द्विसोपाधिक रूप वाली किसी प्रतिज्ञप्ति (p ≡ q) का सत्यता मूल्य इसके घटकों (p, q) के सत्यता मूल्य से निर्धारित होता है।

16.4.1.5 द्विसोपाधिक

P	Q	p ≡ q
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

सत्यता सारणी दर्शाती है कि द्विसोपाधिक केवल तभी सत्य होता है जब इसके दोनों घटक समान सत्यता मूल्य रखते हैं, चाहे दोनों सत्य हों या फिर असत्य। लेकिन यदि घटकों का सत्यता मूल्य भिन्न है, तो द्विसोपाधिक असत्य होता है।

16.5 प्रतिज्ञप्तियों के लिए सत्यता–तालिका

उपरोक्त खंड में हमने विभिन्न अचर/संकारक के मूल्य निर्धारित करने के मानक सीखे हैं। अब हम यह देखेंगे कि सत्यता–तालिकाओं के उपयोग से जटिल प्रतिज्ञप्तियों के मूल्य किस प्रकार से निर्धारित किया जा सकता है।

सत्यता तालिका सत्य–मानों का एक विन्यास है जो यह दिखाता है कि कैसे किसी विशिष्ट यौगिक प्रतिज्ञप्ति का सत्यता–मान उसके घटकों के सत्यता–मान से निर्धारित होता है। यह विधि सत्यता के मानों की एक तालिका द्वारा प्रस्तुत की जाती है। प्रत्येक चर और संकारक के लिए अलग पंक्ति होगी, अक्षर और संकारक (सत्यता फलन संयोजक) को लिखने के लिए एक शीर्ष स्तंभ होगा और उसके नीचे प्रत्येक घटक की संभव सत्यता मूल्य प्रदर्शित करती हुई अन्य पंक्तियां होती हैं। मिश्रित प्रतिज्ञप्ति के सत्यता–मूल्य की गणना करने के लिए पहले हम घटक सरल प्रतिज्ञप्तियों के संभाव्य मामलों की संख्या निर्धारित करते हैं। इस संभाव्य मामलों की सम्ख्या के निर्धारण के लिए हमारे पास आसान सी पद्धति है। सभी मिश्रित प्रतिज्ञप्तियां सरल प्रतिज्ञप्तियों से बनती हैं। हम यह जानते ही हैं कि सरल प्रतिज्ञप्ति के दो संभावित मूल्य सत्य और असत्य होते हैं। अतः यदि हमारे पास एक सरल प्रतिज्ञप्ति है तो संभावित मामले दो होंगें लेकिन दो सरल प्रतिज्ञप्तियां हों तो संभावित मामले निम्नलिखित होंगें;

संभावित मामला 1: अ सत्य हो सकता है और ब सत्य हो सकता है।

संभावित मामला 2: अ सत्य हो सकता है और ब असत्य हो सकता है।

संभावित मामला 3: अ असत्य हो सकता है और ब सत्य हो सकता है।

संभावित मामला 4: अ असत्य हो सकता है और ब असत्य हो सकता है।

अधिक घटक होने पर संभावित मामलों की संख्या की गणना के लिए सूत्र है;$L=2^n$। जहां L संभावित सत्यता मूल्यों के संचयों की पंक्तियां हैं। अतरू यदि एक मिश्रित प्रतिज्ञप्ति में तीन घटक हैं तो संभावित मामलों की संख्या होगी $L=2^3=8$। चलिए अब एक सरल सा उदाहरण लेते हैं;

$pv(q \supset \sim p)$

यहां सरल प्रतिज्ञप्तियों की संख्या दो है और संभावित मामलों की संख्या चार होगी और इसलिए हमें सत्यता मूल्यों की संभावित संख्या के लिए चार पंक्तियों की आवश्यकता होगी। अब आगे कुछ परिपाटियों का अनुसरण करेंगे, ताकि सभी संभावित मामलों को लिखा जा सके, यानि प्रत्येक पंक्ति और स्तम्भ में कहाँ सत्य (T) और कहाँ असत्य (F) लिखा जाये यह पता हो। पंक्तियों की कुल संख्या को 2 से विभक्त करेंगे। हमारे उदाहरण में 4 पंक्तियां हैं, जिसे 2 से विभक्त करने पर 2 प्राप्त होता है। अतः प्रथम अक्षर की दो पंक्तियों में हम सबसे पहले T लिखते हैं, और शेष पंक्तियों में F लिखेंगे। तत्पश्चात् पहले के विभाजित परिणाम यानि 2 को फिर 2 से विभक्त करते हैं, जिसका परिणाम आता है 1। अतः दूसरे अक्षर के अन्तर्गत् T लिखते हैं, उसके बाद F और फिर T फिर F ।

p	v	(q⊃	~	p)	
T		T			
T		F			
F		T			
F		F			

हम देखते हैं कि सत्य और असत्य के प्रत्येक संभावित संचय p और q के अन्तर्गत् निर्धारित किया गया है। दूसरे p के मामले में पहले p के मूल्यों को ही लिखते हैं।

p	v	(q⊃		~ p)	
T		T			T
T		F			T
F		T			F
F		F			F

अगले चरण में हमें अचरों/संकारकों के मूल्यों को पता करने की आवश्यकता है। अन्य अचरों के पहले वक्र लकीर (~) के मूल्य का पता लगाते हैं। उसके बाद कोष्ठक में बंद अचरों का मूल्य पता लगाते हैं, आदि–आदि। अन्ततः, हम मुख्य अचर (जो कोष्ठक के बाहर होता है) के मूल्य का पता लगाते हैं। हमें इन परिपाटियों का पालन करना चाहिए।

p	v	(q ⊃	~		p)
T	**T**	T	F	F	T
T	**T**	F	T	F	T
F	**T**	T	T	T	F
F	**F**	F	T	T	F

हमारे उदाहरण में मुख्य अचर v (पत्ती के आकार वाली आकृति) के स्तम्भ p से और ⊃ (घोड़े की नाल जैसी आकृति) से संगणित है। चलिए अब तीन सरल प्रतिज्ञप्तियों वाला एक उदाहरण लेते हैं।

p⊃(q v r)

P	⊃	(q	v	r)
T	**T**	T	T	T
T	**T**	T	T	F
T	**T**	F	T	T
T	**F**	F	F	F
F	**T**	T	T	T
F	**T**	T	T	F
F	**T**	F	T	T
F	**T**	F	F	F

इस मिश्रित प्रतिज्ञप्ति में तीन सरल प्रतिज्ञप्तियां हैं और इसलिए सत्य और असत्य के सभी संभावित संचयों के लिए 8 पंक्तियां बनेंगी। यहाँ मुख्य अचर/संकारक (सत्यता फलन) $\supset$ है। अतः, के लिए निर्धारित नियमों का अनुसरण करते हुए हम पाते हैं कि मिश्रित प्रतिज्ञप्ति उस पंक्ति असत्य है, जहाँ का p मूल्य सत्य और v का मूल्य असत्य होता है।

इस तरह से हम किसी भी प्रकार की मिश्रित प्रतिज्ञप्ति के लिए सत्यता–सारणी बना सकते हैं।

16.6 पुनरुक्ति, आत्म–व्याघात और आपातिक प्रतिज्ञप्तियां

मिश्रित प्रतिज्ञप्तियों की सत्यता–सारणियों के आधार पर हम प्रतिज्ञप्तियों को तीन वर्गों में बांट सकते हैं। हमने जैसेकि पाया है कि मुख्य संकारक का मूल्य सभी सत्य या सभी असत्य या फिर कुछ सत्य और कुछ असत्य हो सकता है। यदि मुख्य संकारक का मूल्य केवल सत्य है, इसका आशय है कि मिश्रित प्रतिज्ञप्ति सत्य होती है, चाहे घटक प्रतिज्ञप्तियां सत्य हो या असत्य। इस स्थिति में प्रतिज्ञप्ति को तार्किकतः सत्य प्रतिज्ञप्ति अथवा पुनरुक्ति प्रतिज्ञप्ति कहते हैं। वहीं, यदि प्रतिज्ञप्ति अपने घटक प्रतिज्ञप्तियों से निरपेक्ष असत्य हो, तो इसे तार्किकतः असत्य अथवा आत्म–व्याघाती प्रतिज्ञप्ति कहते हैं। और यदि प्रतिज्ञप्ति का सत्यता मूल्य उसके घटक प्रतिज्ञप्तियों के सत्यता मूल्य के आधार पर परिवर्तित हो रहा है, तो इसे आपातिक प्रतिज्ञप्ति कहते हैं। इन तीनों को पहचानने का आसान तरीका हैरू यदि मुख्य संकारक के अन्तर्गत् सभी मूल्य सत्य हैं, तो पुनरुक्ति; यदि मुख्य संकारक के अन्तर्गत् सभी मूल्य असत्य हैं, तो आत्म–व्याघाती; और यदि मुख्य संकारक के अन्तर्गत् मूल्य कम से कम एक बार सत्य और कम से कम एक बार असत्य हो, तो आपातिक।

16.7 युक्तियों के लिए सत्यता–सारणी

अभी तक हमने प्रतिज्ञप्तियों और प्रतिज्ञप्ति तर्कशास्त्र में प्रतिज्ञप्तियों के सत्यता–मूल्य को निर्धारित करने पर चर्चा की। लेकिन आप जानते ही हैं कि तर्कशास्त्र का मुख्य उद्देश्य युक्तियों की वैधता पर विचार करना है। प्रतिज्ञप्ति तर्कशास्त्र युक्ति की वैधता के परीक्षण हेतु सत्यता–सारणी पद्धति को मानक तकनीक के रूप में प्रस्तुत करती है। युक्ति की सत्यता सारणी बनाने के लिए हमें कुछ निश्चित चरणों का अनुसरण करना होता है।

प्रथम, सरल प्रतिज्ञप्तियों के प्रतिरूपण करने वाले अक्षरों का प्रयोग करके युक्ति का प्रतीकीकरण करना।

द्वितीय, प्रतीकीकृत युक्ति को प्रतीकीकृत प्रतिज्ञप्ति की तरह लिखते हैं। प्रथम आधारवाक्य को बायीं ओर लिखते हैं और फिर द्वितीय आधारवाक्य और अन्त में निष्कर्ष। आधारवाक्यों के बीच

में एक तिर्यक रेखा (तिरछी रेखा) खींचते हैं और अन्तिम आधारवाक्य और निष्कर्ष के बीच में दो तिर्यक रेखायें खींचते हैं, य्ह इसलिए कि उनकी पहचान आसानी से की जा सके।

तृतीय, प्रतीकीकृत युक्ति के लिए सत्यता सारणी प्रतिज्ञप्ति की तरह ही खींचते हैं, इसमें स्तम्भ आधारवाक्यों और निष्कर्ष को प्रतिरूपित करते हैं।

अन्ततः, उस पंक्ति को खोजते हैं जिनमें सभी आधारवाक्य सत्य हैं और निष्कर्ष असत्य है। यदि ऐसी कोई पंक्ति है, तो युक्ति अवैध, अन्यथा वैध होगी।

उदाहरणार्थ, निम्नलिखित युक्ति की वैधता का परीक्षण करते हैं;

यदिअ सीमा सिनेमा जाती है तो मैरी घर पर ठहरती है।

सीमा सिनेमा नहीं जाती है।

अतः, मैरी घर पर नहीं ठहरती है।

आईये युक्ति का प्रतीकीकरण करते हैं।

स ⊃ म

~स

∴ ~म

(यहाँ स, सीमा सिनेमा जाती है, और म मैरी घर पर ठहरती है का प्रतीकीकरण है)

अब इस युक्ति के लिए सत्यता सारणी बनाते हैं। चूंकि प्रतीकीकृत युक्ति में दो अक्षर हैं अतः मूल्यों के लिए चार पंक्तियां होंगी। अब प्रत्येक अक्षर के अन्तर्गत् मूल्य निर्धारित करेंगे। यदि एक जैसे ही अक्षर हैं तो मूल्य समान होंगे। अगले चरण में, आधारवाक्यों और निष्कर्ष का प्रतिनिधित्व करने वाले स्तम्भों के अन्तर्गत्, संकारकों के नियमों के अनुसार मूल्य, निर्धारित करेंगे। अब हमें निम्नांकित सत्यता–सारणी प्राप्त होती है।

स	⊃	म	/	~	स	//	~	म
T	**T**	T		**F**	T		**F**	T
T	**F**	F		**F**	T		**T**	F
F	**T**	T		**T**	F		**F**	T

F	**T**	F		**T**	F		**T**	F

हम पाते हैं कि तृतीय पंक्ति में दोनों आधारवाक्य सत्य हैं, परन्तु निष्कर्ष असत्य है। आप यह जानते ही हैं कि किसी वैध युक्ति में यदि आधारवाक्य सत्य हैं, तो निष्कर्ष सत्य होना ही चाहिए। यदि कोई आधारवाक्य असत्य है, तब फर्क नहीं पड़ता कि निष्कर्ष सत्य है या असत्य। लेकिन यदि मूल्यों की कोई पंक्ति आधारवाक्य के स्तम्भ सत्य हैं, लेकिन निष्कर्ष का स्तम्भ असत्य मूल्य रखता है, तो परिभाषा के अनुसार युक्ति अवैध होती है। इसे बेहतर समझने के चलिए एक वैध युक्ति का परीक्षण करते हैं।

G ⊃ ~H

~H ⊃ I

∴ G ⊃ I

G	⊃	~	H	/	~	H	⊃	I	//	G	⊃	I
T	**F**	F	T		F	T	**T**	T		T	**T**	T
T	**F**	F	T		F	T	**T**	F		T	**F**	F
T	**T**	T	F		T	F	**T**	T		T	**T**	T
T	**T**	T	F		T	F	**F**	F		T	**F**	F
F	**T**	F	T		F	T	**T**	T		F	**T**	T
F	**T**	F	T		F	T	**T**	F		F	**T**	F
F	**T**	T	F		T	F	**T**	T		F	**T**	T
F	**T**	T	F		T	F	**F**	F		F	**T**	F

आधारवाक्य और निष्कर्ष का मुख्य स्तम्भ गहरे रंग में प्रदर्शित है। सम्भाव्य सत्यता मूल्य की आठ पंक्तियों में कोई भी ऐसा मामला नहीं है, जहाँ सभी आधारवाक्य सत्य हों और निष्कर्ष असत्य। अतः, यह युक्ति वैध है। इस तरह से हम किसी भी युक्ति की वैधता का परीक्षण आसानी से कर सकते हैं।

16.8 अप्रत्यक्ष (परोक्ष) सत्यता सारणी पद्धति

परोक्ष सत्यता सारणी पद्धति सत्यता सारणी का उपयोग करके युक्तियों के परीक्षण की संक्षिप्त पद्धति है। यदि युक्तियां अधिक संख्या में विभिन्न सरल प्रतिज्ञप्तियां रखती हैं तो यह पद्धति अत्यधिक उपयोगी है। इस पद्धति में सामान्य सत्यता सारणी की तुलना में पश्चगामी ढंग अपनाया जाता है। हम जानते ही हैं कि यदि युक्ति वैध है और इसके आधारवाक्य सत्य हैं तो निष्कर्ष का असत्य होना असंभव है। इसलिए परोक्ष पद्धति में आधारवाक्यों के स्तंभ के नीचे सत्य और निष्कर्ष के नीचे असत्य निर्धारित करते हैं । दूसरे चरण में इन दिये गये सत्यता मूल्यों और संकारकों के नियमों का अनुसरण करते हुए हम अन्य घटकों तथा अन्त में सरल प्रतिज्ञप्तियों का प्रतिनिधित्व करने वाले अक्षरों के मूल्यों को निर्धारित करते हैं। यदि हम यह बिना किसी व्याघात के कर सकते हैं तो इसका आशय है कि कम से कम मूल्यों की एक पंक्ति संभव है जिसमें आधारवाक्य सत्य और निष्कर्ष असत्य है। इस मामले में युक्ति अवैध होगी। लेकिन यदि व्याघात प्राप्त होता है, जैसे अक्षर A के अन्तर्गत् स्तंभ में सत्य और एक दूसरे स्तंभ में A के अन्तर्गत् असत्य निर्धारित करते हैं तो यह आत्मव्याघात है और यह आपादित करता है कि आधारवाक्य का सत्य होना और निष्कर्ष होना आत्मव्याघाती है। अतः परोक्ष ढंग से या प्रत्यक्ष ढंग से युक्ति वैध सिद्ध होती है। आइए एक उदाहरण लेते हैं;

$(A \vee B) \supset (C \bullet D)$

$(D \vee E) \supset F$

$\therefore A \supset F$

(A	V	B)	⊃	(C	•	D)	/	(D	V	E)	⊃	F	//	A	⊃	F
T	T		**T**	T	T	T		F	F	F	**T**	F		T	**F**	F

आप देखते हैं कि दोनों आधारवाक्यों के अन्तर्गत सत्य और निष्कर्ष के अन्तर्गत असत्य निर्धारित किया गया है। इन तीनों मूल्यों को गहरे अक्ष्रों से दर्शाया गया है। अगले चरण में हम A के लिए सत्यता मूल्य निर्धारित करते हैं और निष्कर्ष के लिए असत्यता मूल्य निर्धारित करते हैं। यहां निष्कर्ष सोपाधिक प्रतिज्ञप्ति है इसलिए प्रतिज्ञप्ति को असत्य केवल एक ही संचय में निर्धारित कर सकते हैं, जब पूर्ववर्ती सत्य है और पश्चवर्ती असत्य। इसलिए प्रतिज्ञप्ति A के अन्तर्गत सत्य मूल्य और प्रतिज्ञप्ति F के अन्तर्गत असत्य मूल्य रखते हैं। इस तरह A और F की सभी घटनाओं के लिए मूल्य निर्धारित कर सकते हैं। प्रथम आधारवाक्य एक सोपाधिक प्रतिज्ञप्ति $(A \vee B) \supset (C \bullet D)$ और मूल्य सत्य है और इसका पूर्ववर्ती एक वियोजक प्रतिज्ञप्ति है। A के अन्तर्गत हमने पहले से ही सत्य निर्धारित किया हुआ है इसलिए वियोजक प्रतिज्ञप्ति किसी भी मामले में सत्य होगी क्योंकि वियोजक प्रतिज्ञप्ति सत्य होती है जब इसका कम से कम एक वियोज सत्य होता है। अब चूंकि यह मुख्य सोपाधिक प्रतिज्ञप्ति का पूर्ववर्ती है जो सत्य है अतः पश्चवर्ती

असत्य नहीं हो सकता है। इसलिए पश्चवर्ती के अन्तर्गत सत्य मूल्य रखा जाना चाहिए। यह पश्चवर्ती संयोजक प्रतिज्ञप्ति है। संयोजक प्रतिज्ञप्ति सत्य केवल तभी होती है जब दोनों संयोज सत्य हों। इसलिए C और D दोनों के अन्तर्गत सत्य मूल्य निर्धारित किया जाना चाहिए।

आइए अब द्वितीय आधारवाक्य $(D \vee E) \supset F$ जो कि सोपाधिक प्रतिज्ञप्ति है, उसकी जांच करते हैं। प्रतिज्ञप्ति F (पश्चवर्ती का मूल्य पहले से ही असत्य निर्धारित है)। इसलिए पूर्ववर्ती $D \vee E$ के लिए असत्य मूल्य निर्धारित करना चहिए यह इसलिए भी क्योंकि अन्यथा आधारवाक्य सत्य नहीं हो सकते हैं। अब वियोजक प्रतिज्ञप्ति $D \vee E$ के लिए असत्य मूल्य निर्धारित किया गया है। आप जानते ही हैं कि वियोजक तभी असत्य होता है जब इसके दोनों वियोज्य असत्य हों। इसलिए D और E दोनों के अन्तर्गत हम असत्य मूल्य निर्धारित करने के लिए बाध्य हैं।

लेकिन प्रथम आधारवाक्य में D के अन्तर्गत पहले से ही सत्य मूल्य निर्धारित किया गया है। इसका आशय है कि यदि हम युक्ति को अवैध मानते हैं तो घटकों के सत्यता मूल्य करने में आत्म–व्याघात होगा। अतः परोक्ष ढंग से युक्ति वैध सिद्ध होती है।

16.9 युक्ति रूप

अभी तक हमने तार्किक प्रतीकों में अभिव्यक्त युक्तियों की चर्चा की। हम जानते हैं कि कोई युक्ति वैध होती है जब यह युक्ति वैध रूप रखती है। प्रतिज्ञप्ति तर्कशास्त्र में विशिष्ट रूपों के कारण अनेक युक्तियों वैध या अवैध होती हैं और इन युक्ति रूपों को विशिष्ट नाम दिये गये हैं। इनकी सहायता से हम तुरन्त युक्ति के वैध और अवैध होने का पता लगा सकते हैं।

आपको याद होगा कि हमने प्रतिज्ञप्ति रूपों की चर्चा पहले की है। प्रतिज्ञप्ति रूप प्रतिज्ञप्ति चरों और तार्किक संकारकों की एक ऐसी व्यवस्था है, जिसमें चरों का एकरूप प्रतिज्ञप्ति द्वारा प्रतिस्थापन से प्रतिज्ञप्ति प्राप्त होती है। प्रतिज्ञप्ति रूप का एक उदाहरण $p \vee q$ है, जहाँ p और q चर हैं।

यदि चरों p और q के स्थान पर प्रतिज्ञप्तियों A और B का उपयोग किया जाये, तो प्रतिज्ञप्ति $A \vee B$ प्राप्त होती है। इसी तरह, युक्ति रूप प्रतिज्ञप्ति चरों और तार्किक संकारकों की इस तरह व्यवस्था है, कि चरों का प्रतिज्ञप्तियों से प्रतिस्थापन युक्ति को उत्पन्न करता है। यह प्राप्त युक्ति तत्सम्बन्धी युक्ति रूप का प्रतिस्थापन घटना कहलाती है। उदाहरणार्थ,

$p \cdot q$

$\therefore p$

यदि युक्ति रूप के प्रतिज्ञप्ति चरों p और q के स्थान पर क्रमशः A और B प्रतिज्ञप्तियों का एकरूप प्रतिस्थापन कर दिया जाये तो हमें निम्नलिखित युक्ति प्राप्त होती है;

A •B

. ˙ . A

इसी युक्ति रूप में हम अधिक जटिल प्रतिज्ञप्तियों द्वारा प्रतिस्थापन से प्रतिस्थापन घटना प्राप्त कर सकते हैं। लेकिन रूप समान रहेगा और इसीलिए वैधता भी समान होगी।

(A v B) • (B⊃ D)

. ˙ . (A v B)

यदि उपरोक्त युक्ति रूप वैध है तब उसी युक्ति रूप से प्राप्त युक्तियों के उपरोक्त दोनों उदाहरण भी वैध होंगे। अब युक्ति रूप वैध है यह सत्यता सारणी पद्धति से जांचा जा सकता है।

यह ध्यान देने योग्य है कि वैध युक्ति रूप से प्राप्त कोई भी प्रतिस्थापन घटना वैध ही होगी। मान लीजिए कि एक युक्ति रूप है जिससे कभी–कभी वैध प्रतिस्थापन घटना प्राप्त हो सकती है। लेकिन यदि एक भी ऐसी प्रतिस्थापन घटना है जिसमें आधारवाक्य सत्य और निष्कर्ष असत्य है, तब युक्ति रूप अवैध होगा।

लेकिन हम यह कैसे जान सकते हैं कि युक्ति रूप अवैध प्रतिस्थापन घटनाएं रख सकता है? आईये इसके लिए युक्ति रूप का एक उदाहरण लेते हैं;

P ⊃ q

q

. ˙ . p

इस युक्ति रूप के लिए सत्यता सारणी में सत्यता मूल्यों के संचयों के लिए चार पंक्तियां होंगी। ये पंक्तियां सभी सम्भावित मामलों का प्रतिनिधित्व करती हैं और इसीलिए प्रतिस्थापन घटनाओं के सभी सम्भावित वर्गों का प्रतिनिधित्व करती हैं।

P	⊃	Q	/	q	//	P
T	T	T		T		T
T	F	F		F		T

F	**T**	**T**		**T**		**F**
F	T	F		F		F

सत्यता सारणी को देखने से पता चलता है कि तृतीय पंक्ति का पहला आधारवाक्य $p \supset q$ सत्य मूल्य रखता है, दूसरा आधारवाक्य q सत्य मूल्य रखता है लेकिन निष्कर्ष p असत्य मूल्य रखता है। इसका र्थ है कि दिये गये युक्ति रूप की कम से कम एक प्रतिस्थापन घटना में आधारवाक्य सत्य और निष्कर्ष असत्य है। और आप जानते ही हैं कि ऐसी स्थिति में युक्ति अवैध होती है। आईये अब कुछ वैध युक्ति रूपों पर विचार करते हैं।

16.9.1 वैध युक्ति रूप

16.9.1.1 वियोजक न्यायवाक्य (Disjunctive Syllogism)

p v q

~ p

$\therefore$ q

इस युक्ति रूप के लिए सत्यता सारणी निम्नवत् होगी;

P	V	q	/	~	P	//	q
T	T	T		F	T		T
T	T	F		F	T		F
F	T	T		T	F		T
F	F	F		T	F		F

इस सत्यता सारणी में कोई भी ऐसी पंक्ति नहीं है जिसमें आधारवाक्य सत्य और निष्कर्ष असत्य हो। तृतीय पंक्ति में दोनों आधारवाक्य सत्य और निष्कर्ष भी सत्य है। इसलिए यह युक्ति रूप वैध है। इस युक्ति रूप की कोई भी प्रतिस्थापन घटना वैध होगी। इसे वियोजक न्यायवाक्य नाम दिया गया है। हमें यह याद जरूर रखना चाहिए कि प्रतिस्थापन घटना प्रत्येक चर का ठीक (हूबहू) स्थानापन्न होना चाहिए। यदि हम p के स्थानापन्न प्रतिस्थापन घटना से q का स्थानापन्न कर देते हैं, तो यह उचित प्रतिस्थापन घटना नहीं होगी।

16.9.1.2 हेत्वाश्रित न्यायवाक्य (Hypothetical Syllogism)

$p \supset q$

$q \supset r$

$\therefore p \supset r$

इस युक्ति रूप के लिए सत्यता सारणी निम्नवत् है;

P	⊃	Q	/	q	⊃	r	//	p	⊃	r
T	T	T		T	T	T		T	T	T
T	T	T		T	F	F		T	F	F
T	F	F		F	T	T		T	T	T
T	F	F		F	T	F		T	F	F
F	T	T		T	T	T		F	T	T
F	T	T		T	F	F		F	T	F
F	T	F		F	T	T		F	T	T
F	T	F		F	T	F		F	T	F

इस सत्यता सारणी में कोई भी पंक्ति ऐसी नहीं है जिसमें आधारवाक्य सत्य और निष्कर्ष असत्य हो। यह वैध युक्ति रूप है, इसे हेत्वाश्रित न्यायवाक्य कहते हैं। इस युक्ति रूप में प्रतिज्ञप्तियां श्रृंखला की तरह जुड़ी हुई हैं, इसलिए इसकी किसी प्रतिस्थापन घटना में घटक एकरूपतः प्रतिस्थापित होने चाहिए।

16.9.1.3 विधायक हेतुफलानुमान (Modus Ponens)

$p \supset q$

p

$\therefore q$

इस युक्ति रूप के लिए सत्यता सारणी निम्नवत् होगी;

p	⊃	q	/	P	//	q
T	T	T		T		T
T	F	F		T		F
F	T	T		F		T
F	T	F		F		F

इसमें भी कोई भी घटना ऐसी नहीं है जिसमें आधारवाक्य सत्य और निष्कर्ष असत्य हो। यह भी वैध युक्ति रूप है। इसे विधायक हेतुफलानुमान कहते हैं।

16.9.1.4 निषेधक हेतुफलानुमान (Modus Tollens)

$p \supset q$

$\sim q$

$\therefore \sim p$

इस युक्ति रूप के लिए सत्यता सारणी निम्नवत् होगी;

p	⊃	Q	/	~	q	//	~	p
T	T	T		F	T		F	T
T	F	F		T	F		F	T
F	T	T		F	T		T	F
F	T	F		T	F		T	F

इसमें केवल एक ही पंक्ति में आधारवाक्य सत्य हैं, लेकिन तब निष्कर्ष भी सत्य है। यह भी वैध युक्ति रूप है। इसे निषेधक हेतुफलानुमान कहते हैं।

बोध प्रश्न II

टिप्पणी: क) अपने उत्तर के लिए दिये गये स्थान का उपयोग कीजिए।

ख) अपने उत्तरों की जांच इकाई के अंत में दिये गये उत्तरों से कीजिए।

1. किस परिस्थिति में वियोजक फलन असत्य हो जाता है?

....

....

....

....

2. निम्नलिखित युक्ति रूप की वैधता का परीक्षण सत्यता सारणी की सहायता से कीजिए।

$p \vee (p \bullet q)$

p

$\therefore q$

....

....

....

....

16.10 वैधता का औपचारिक साक्ष्य

जब घटक प्रतिज्ञप्तियों की संख्या अधिक होती है, तो सत्यता सारणी पद्धति का उपयोग कठिन हो जाता है। मान लीजिए किसी युक्ति में पांच विभिन्न सरल प्रतिज्ञप्तियां हैं। तब सत्यता सारणी में पंक्तियों की संख्या 32 होगी। इस परिस्थिति में सभी मूल्यों को निर्धारित करना और जांचना बोझिल होगा। इसलिए तर्कशास्त्री अधिक आसान संक्षिप्त पद्धति का उपयोग करते हैं। इस पद्धति में वैध प्राथमिक युक्ति रूपों के क्रम की सहायता से आधारवाक्यों से निष्कर्ष निगमित करके किसी युक्ति की वैधता स्थापित करते हैं।

प्राथमिक वैध युक्ति को प्राथमिक वैध युक्तिरूप की प्रतिस्थापन घटना के रूप में परिभाषित किया जाता है। उदाहरणार्थ, विधायक हेतुफलानुमान एक वैध युक्ति रूप है। यदि युक्ति इस युक्ति रूप की प्रतिस्थापन घटना हो, तो युक्ति वैध होती है। तर्कशास्त्र में नौ प्राथमिक वैध युक्ति रूप हैं, जिन्हें अनुमान के नियम कहते हैं। किन्तु, कई ऐसे वैध सत्यता फलन युक्तियां हैं जिन्हें इन नौ नियमों की सहायता से वैध सिद्ध नहीं किया जा सकता है। तर्कशास्त्र में इन नौ नियमों के अतिरिक्त प्रतिस्थापन के दस नियम हैं, जो किसी प्रतिज्ञप्ति के किसी भी घटक को इस घटक से तार्किक समतुल्य से स्थानापन्न करने की अनुमति देते हैं। इन कुल 19 नियमों (नौ अनुमान के और दस प्रतिस्थापन के नियम) की सहायता से हम केवल कुछ चरणों में ही मिश्रित युक्तियों की वैधता को आसानी से सिद्ध कर सकते हैं।

16.11 भारतीय तर्कशास्त्र पर टिप्पणी

प्रतिज्ञप्ति तर्कशास्त्र मुख्यतः आधुनिक पाश्चात्य तर्कशास्त्रियों का योगदान है। लेकिन जैसाकि हमने देखा ही है कि इस दृष्टिकोण के बीज पहले से ही अरस्तू के तर्कशास्त्र में थे, जहाँ मानक रूप न्यायवाक्य विकसित हुआ और प्रतिज्ञप्तियों के पदों की प्रतीकात्मक ढंग से अभिव्यक्ति आरम्भ हुई, ताकि न्यायवाक्य रूपों की पहचान आसानी से और तीव्रता से की जा सके। अब प्रश्न है कि क्या भारतीय तर्कशास्त्र में भी इस तरह के दृष्टिकोण को खोजा जा सकता है?

प्रतिज्ञप्ति कलन के कुछ सिद्धान्तों के ज्ञान के संकेत देने वाला प्राचीनतम भारतीय ग्रंथ *कथावत्थु* है। इस ग्रंथ में नास्तिक सिद्धांत की चर्चा रूढ़ ढंग का अनुसरण करते हुए की गई है, जिसे इस तरह अभिव्यक्त किया जा सकता है; "यदि अ ब है, तब स द है; लेकिन स द नहीं है; अतः अ ब नहीं है"। यह सूत्र स्टॉइक निषेधक हेतुफलानुमान के समतुल्य है। भारतीय दर्शन के विद्वान गनेरी के अनुसार, कथावत्थु में प्रयुक्त प्रतिज्ञप्ति तर्कशास्त्र है। बुद्धघोष अपने ग्रंथों में आधारवाक्य

p ⊃ q से प्राप्त निष्कर्ष को अनुलोम (सीधा) और आधारवाक्य ~q ⊃ ~p से प्राप्त निष्कर्ष को प्रतिलोम (उल्टा) कहते हैं। इस प्रकार हम कह सकते हैं कि भारतीय तर्कशास्त्र में भी प्रतिज्ञप्ति तर्कशास्त्र के कुछ पदचिन्ह हैं।

16.12 सारांश

इस इकाई में हमने प्रतिज्ञप्ति तर्कशास्त्र के कई पहलुओं के बारे में सीखा है। हमने यह भी पाया कि परम्परागत तर्कशास्त्र के असमान, प्रतिज्ञप्ति तर्कशास्त्र सम्पूर्ण प्रतिज्ञप्ति पर विचार करता है, न कि प्रतिज्ञप्ति के पदों पर। चूंकि यह प्रतिज्ञप्ति अथवा तार्किक वाक्यों से सम्बन्धित है, अतः इसे प्रतिज्ञप्ति तर्कशास्त्र और कभी–कभी वाक्यगत तर्कशास्त्र कहते हैं। प्रतिज्ञप्ति तर्कशास्त्र प्रतिज्ञप्ति की आंतरिक संरचना का विश्लेषण नहीं करता है। प्रतिज्ञप्ति तर्कशास्त्र मिश्रित/जटिल युक्तियों को प्रतीक रूप में अभिव्यक्त कर सकता है और इन युक्तियों की वैधता को आसानी से निर्धारित कर सकता है।

16.3 कुंजी शब्द

युक्ति रूप : युक्ति रूप प्रतिज्ञप्ति चरों और तार्किक संकारकों की ऐसी व्यवस्था होती है कि चरों का प्रतिज्ञप्तियों से एकरूप प्रतिस्थापन युक्ति को उत्पन्न करता है।

मिश्रित प्रतिज्ञप्ति : मिश्रित प्रतिज्ञप्ति वह है जिसमें एक या अधिक सरल प्रतिज्ञप्ति घटक रूप में होती है।

प्रतिज्ञप्ति तर्कशास्त्र : प्रतिज्ञप्ति तर्कशास्त्र, युक्ति में सम्पूर्ण प्रतिज्ञप्ति पर विचार करता है, न कि प्रतिज्ञप्ति के पदों पर। प्रतिज्ञप्तियों या तार्किक वाक्यों पर विचार करने के कारण इसे प्रतिज्ञप्ति तर्कशास्त्र या कभी–कभी वाक्यगत तर्कशास्त्र भी कहते हैं।

सरल प्रतिज्ञप्ति : सरल प्रतिज्ञप्ति वह है जो किसी अन्य प्रतिज्ञप्ति को घटक रूप में नहीं रखती है।

16.14 अन्य सहायक अध्ययन–सामग्री एवं सन्दर्भ

- Basson, A.H. and O'Connor, D. J. *Introduction to Symbolic Logic*. Oxford: Oxford University Press.
- Copi, I. M. and Cohen, Carl. *Introduction to Logic*. Prentice-Hall India, Eleventh Edition.
- Ganeri, Jonardon (ed.). *Indian Logic A reader*. UK: Curzon Press, 2001.

- Hurley, Patrick J. *A Concise Introduction to Logic*. USA: Cengage Learning, 2015.
- Mosley, Albert and Baltazar, Eulalio. *An Introduction to Logic: From Everyday Life to Formal Systems*. (2019). Open Educational Resources: Textbooks, Smith College, Northampton, MA. https://scholarworks.smith.edu/textbooks/1, 2019.

16.15 बोध प्रश्नों के उत्तर

बोध प्रश्न I

1. प्रतिज्ञप्ति तर्कशास्त्र प्रतिज्ञप्तियों अथवा तार्किक वाक्यों से सम्बन्धित होता है। इसे वाक्यगत तर्कशास्त्र भी कहते हैं। प्रतिज्ञप्ति तर्कशास्त्र प्रतिज्ञप्तियों और युक्तियों की आन्तरिक संरचना को विश्लेषण नहीं करता है। यह प्रतिज्ञप्ति को सम्पूर्णता में स्वीकारता है, न कि प्रतिज्ञप्ति के पदों को।

2. (i) यह मामला नहीं है कि भारत ने मंगल मिशन त्याग देगा।

यह मामला नहीं है कि म

~ म

(ii) यदि अमेज़न वर्षाजंगल नष्ट हुआ, तो वैश्विक ताप बढ़ जायेगा।

यदि अ तब व

अ ⊃ व

बोध प्रश्न II

1. वियोजन फलन असत्य हो जाता है जब दोनों वियोज असत्य हों।

2.

P	V	(p	•	q)	/	p	//	q
T	T	T	T	T		T		T
T	T	T	F	F		T		F
F	F	F	F	T		F		T
F	F	F	F	F		F		F

सत्यता तालिका में दोनों आधारवाक्य सत्य हैं, लेकिन निष्कर्ष असत्य है। अतः, युक्ति रूप अवैध है।

हिन्दी सहायक अध्ययन–सामग्री

काश्यप, भिक्षु जगदीश. *पाश्चात्य तर्कशास्त्र*, प्रथम भाग. काशीः भारतीय ज्ञानपीठ, 1947.

गुलाबराय. *तर्कशास्त्र*. प्रथम भाग, काशीः नागरी प्रचारणी सभा, सम्वत् 1982.

गुलाबराय. *तर्कशास्त्र*. प्रथम भाग. काशीः नागरी प्रचारणी सभा, सम्वत् 1998.

जैन, कृष्णा. *तर्कशास्त्र एक रूपरेखा*. हिन्दी अनुवाद– राजवर्मा सिन्हा. दिल्लीः डीके प्रिंटवर्ल्ड, 2013.

तिवारी, केदारनाथ. *आगमन तर्कशास्त्र*. दिल्लीः मोतीलाल बनारसीदास, 2000.

राजनारायण. *प्रतीकात्मक तर्कशास्त्र*. जयपुरः राजस्थान हिन्दी ग्रन्थ अकादमी, 1973.

शर्मा, रामनाथ. *तर्कशास्त्र*. मेरठः केदारनाथ रामनाथ, 1979.

सिंह, संकटाप्रसाद. *आधुनिक तर्कशास्त्र की भूमिका*. पटनाः बिहार हिंदी ग्रंथ अकादमी, 1971.

(**टिप्पणीः** पुरानी प्रकाशित पुस्तकों की सॉफ्टकॉपी https://archive-org/ पर प्राप्त की जा सकती है।)

इकाई 17 वैधता के औपचारिक प्रमाणः अनुमान के नियम और विस्थापन के नियम[18]

रूपरेखा

[18] प्रो. एम आर नन्दन, गो. का. फॉर वुमेन, मांडया।
अनुवाद—डॉ. कुमकुम चतुर्वेदी, मेरठ।

17.0 उद्देश्य

इस इकाई का मुख्य उद्देश्य निम्न है;

- युक्तियों के परीक्षण की कला को स्पष्ट करना। इसे दो तरीकों से किया जा सकता है: पारंपरिक तर्कशास्त्र की सीमाएं जान कर तथा साथ ही पारंपरिक तर्कशास्त्र के महत्व को प्रदर्शित करके;
- युक्तियों के शाब्दिक रूप की उनके प्रतीकात्मक रुप से तुलना करना;
- दोनों रूपों के सापेक्षिक लाभ व हानि का मूल्यांकन, यदि कोई हो, करना;
- प्रतीकात्मक प्रस्तुतीकरण को शाब्दिक रुप में और शाब्दिक रूप को में परिवर्तित करना।
- अनुमान के नियमों की अपर्याप्तता को उजागर करना।
- यह इकाई एक महत्वपूर्ण तथ्य को भी प्रदर्शित करती है कि सभी तर्क एक या दो श्रेणियों में नहीं आते। इसलिए, नियमों का एक ही समूह सफलता की गारंटी नहीं दे सकता।
- दिए गए तर्क का परीक्षण करने के लिए आवश्यक नियमों के प्रकार की पहचान करना।

17.1 परिचय

तर्कशास्त्र का प्राथमिक कार्य युक्तियों को अच्छी युक्ति और बुरी युक्ति में वर्गीकृत करना है। ऐसा युक्तियों की वैधता का परीक्षण करके किया जा सकता है। जैसा कि हम जानते है। ऐसा युक्तियों की वैधता का परीक्षण करके किया जा सकता है। जैसा कि हम जानते हैं, परम्परागत तर्कशास्त्र की सीमा में केवल कुछ सीमित प्रकार की युक्तियां ही आती हैं। तथा जो युक्तियां आधुनिक तर्कशास्त्र की सीमा में आती हैं, वे भी सभी संदर्भों में समान नहीं होती हैं। कुछ युक्तियां काफी सरल होती हैं एवं उनके परीक्षण के लिए सत्यता सारणी तकनीक ही पर्याप्त होती है।

प्रश्न है कि युक्ति की वैधता को निश्चित करने वाली यह सत्यता सारणी तकनीक क्या है? चलिए इसे समझने के लिए एक युक्ति के आकार को देखते हैं:

यदि p, तब q

p

इसलिए q

इसकी सत्यता सारणी निम्न प्रकार से निर्मित की जा सकती है सर्वप्रथम, हमें तर्कवाक्य चरों p और q के प्राथमिक कॉलम की आवश्यकता होती है; फिर हमें प्रथम आधार वाक्य, जो कि एक प्रतिपत्ति कथन है (द्वितीय आधार वाक्य और निष्कर्ष स्वयं अपने आप में प्राथमिक कॉलम है), के लिये एक कॉलम की आवश्कता होती है। चूंकि इस युक्ति में केवल दो चर (p & q) हैं इसलिये हमें सिर्फ चार पंक्तियों (जैसा कि हम पहले ही जान चुके हैं) की आवश्यकता होती है। इस प्रकार, उपरोक्त की सत्यता सारणी निम्न हैः

p	q	p=>q	
1	1	1	1
2	1	0	0
3	0	1	1
4	0	0	1

सत्यता सारणी विधि इस नियम का पालन करती है कि किसी भी वैध युक्ति में निष्कर्ष आधार वाक्यों से प्रतिपादित होता है और इसलिए सत्य आधार वाक्यों से सदैव सत्य निष्कर्ष ही निकलते हैं। उपरोक्त सत्यता सारणी में केवल प्रथम पंक्ति में आधार वाक्य सत्य है (p=>q तथा p के नीचे के मूल्यों को देखें) और वहीं पर q का मूल्य भी सत्य है। अतः हम कह सकते हैं कि इस सत्यता सारणी में कोई प्रतिस्थापन दृष्टांत (भिन्न पंक्ति) जिसका आधार वाक्य सत्य हो तथा निष्कर्ष वाक्य असत्य हो उपलब्ध नहीं है। इसलिए यह एक वैध युक्ति है। यह एक गणितीय पद्धति है। सिर्फ किसी भी युक्ति की सत्यता सारणी बनाइये और देखिए कि उसमें सत्य आधार वाक्य एवं असत्य निष्कर्ष वाक्य के दृष्टांत तो उपलब्ध नहीं है।

सामान्यतः कोई युक्ति जिसमें दो या तीन सामान्य किन्तु भिन्न तर्कवाक्य होते हैं, को तो सत्यता सारणी विधि के लिए सही माना जाता है। लेकिन यदि युक्ति में तीन से अधिक भिन्न तर्कवाक्य हों, तो सत्यता सारणी विधि पर्याप्त नहीं होती है। ऐसा सिर्फ इसकी कार्यकुशलता में कठिनाई के कारण होता है। उदाहरण के लिए, यदि तीन तर्कवाक्य हों तो हमें सत्यता सारणी में 8 पंक्तियाँ, यदि 4 हो तो 16, 5 हो तो 32, 6 हो तो 64 और आगे इसी क्रम में पंक्तियां चाहिए। ऐसी स्थितियों में हमें वैकल्पिक विधि देखनी पड़ती है। आकारिक प्रमाण विधि यहां पर तेजी से युक्ति की वैधता को निश्चित करने में हमारी मदद करती है। निम्न उदाहरण देखें,

1. A => B
2. B => C

3. C => D
4. ⌐D
5. A v E   / ∴ E
6. A => C
7. A => D
8. ⌐A
9. E

इस युक्ति में हमारे पास 5 तर्कवाक्य जैसे कि A,B,C,D,E है। इतनी सत्यता सारणी के निर्माण के लिये हमें 32 पंक्तियों की आवश्यकता होगी। परन्तु हम अनुमानों के नियमों के प्रयोग से इसकी वैधता मात्र चार पंक्तियों में ही सिद्ध कर सकते हैं (जैसा कि हमने ऊपर किया है)। यही औपचारिक प्रमाणों के उपयोग का लाभ है।

कोई युक्ति, जो इस संदर्भ में जटिल हो वह और कुछ नहीं बल्कि अनेक सरल (इस संदर्भमें सरल से हमारा अभिप्राय संक्षिप्त से है) युक्तियों का समूहन होता है। निम्न उदाहरण इस बात को स्पष्ट कर देते हैं।

1) p => q	2) q => r	3) p =>q
p	q	q => r
∴q	∴ r	∴ p => r

परम्परागत तर्कशास्त्र में भी हमारे पास संक्षिप्त तर्कमाला (sorites) के रुप में 'जटिल' प्रकार की युक्ति होती हैं (हमें यह याद रखना चाहिए कि जटिल, सरल आदि पद सापेक्षिक हैं)। संक्षिप्त तर्कमाला का एक उदाहरण नीचे दिया गया हैः

1 सभी भारतीय एशियाई है।

सभी हिन्दू भारतीय हैं। सभी कन्नड़ हिन्दू हैं।

∴सभी कन्नड़ एशियाई हैं।

इसमें तीन आधारवाक्य और एक निष्कर्ष है। अतः यह एक बहु–निगमनिक तर्क युक्ति है। वास्तव में, किसी भी संक्षिप्त तर्कमाला में कम से कम दो न्यायवाक्यात्मक तर्क होते हैं और परिणामस्वरूप इसमें दो निष्कर्ष होते हैं। इसलिए यह सामान्य न्यायवाक्य तर्क से अधिक जटिल होता है। यह बात तब स्पष्ट हो जाती है जब हम संक्षिप्त तर्कमाला को घटक न्यायवाक्यों में विखंडित करते हैं।

2(ए)

सभी भारतीय एशियाई हैं।
सभी हिन्दू भारतीय हैं। $\longrightarrow$ सभी हिन्दू एशियाई हैं।

सभी कन्नड़िया हिन्दू हैं। $\longrightarrow$ सभी कन्नड़िया हिन्दू हैं।

∴सभी कन्नड़ एशियाई हैं।

सौभाग्य से या दुर्भाग्य से, हमें मुश्किल से ही कोई ऐसा घिसापिटा तर्क मिलता है। इसलिए परीक्षण के साधनों को बेहतर बनाने की आवश्यकता है। यहाँ यह याद रखना बहुत महत्वपूर्ण है किसी भी परिस्थिति में कि पारम्परिक तर्कशास्त्र द्वारा निर्धारित किसी नियममहत्वपूर्ण है किसी भी परिस्थिति में कि पारम्परिक तर्कशास्त्र द्वारा निर्धारित किसी नियम का उल्लंघन नहीं होना चाहिए। यह आधार है, जिस पर ऊपरी संरचना अर्थात् आधुनिक तर्कशास्त्र की रचना हुई है। सुविधा के लिए, हम अपने आप को प्रतीकों तक ही सीमित रखते हैं और जब हम अभ्यास कर लेंगे तब शाब्दिक रूप पर जाएगें।

सभी युक्तियों को अनुमान के नियमों से नहीं परखा जा सकता है। अत्यधिक जटिल और विविध युक्तियां इन नियमों से सिद्ध नहीं हो पाती हैं। जिस प्रकार आधुनिक तर्कशास्त्र पारंपरिक तर्कशास्त्र का पूरक होता है, उसी प्रकार आधुनिक तर्कशास्त्र के अंदर, अनुमान के नियमों की पूर्ति करने का प्रयास किया जाता है। अतः परिणामस्वरूप हमें विस्थापन के नियम मिलते हैं। युक्ति की संरचना ऐसी हो सकती है कि इसके लिए सिर्फ विस्थापन के नियमों अथवा सिर्फ अनुमान के नियमों अथवा दोनों की आवश्यकता हो सकती है। हमारे पास विस्थापन के दस नियम हैं। नियमों के इन दोनों सम्मुचयों के बीच अन्तर यह है कि अनुमान के नियम स्वयं अनुमान होते हैं, जबकि विस्थापन के नियम अनुमान नहीं होते हैं। विस्थापन के नियम परिवर्तन या तर्कवाक्य के रूप में परिवर्तन तक ही सीमित होते हैं। उदाहरण के लिए, A या B को वैधता के औपचारिक प्रमाण विस्थापन के नियम से B या A में परिवर्तित किया जा सकता है या A ^(B v C) को (A ^ B) v(A^C) में परिवर्तित किया जा सकता है। नियमों को लागू करने के तरीकों में भी प्रतिबंध होता है। अनुमान के किसी भी नियम को पूरी पंक्ति के लिए लागू किया जाता है, जबकि विस्थापन के किसी मी नियम को पंक्ति के एक भाग के लिए ही लागू किया जा सकता है। मान लीजिए, उदाहरण के लिए, पंक्ति में अभिव्यक्ति A=> (B ^ D) है। अब, इसके अनुवर्ती भाग को सरलीकृत नहीं किया जा सकता है। कारण सरल है। मान लीजिए कि A के असत्य होने से या तो B अथवा D असत्य है। प्रतिपत्ति अब भी सत्य है। लेकिन हम यह नहीं जानते हैं कि B या D में से कौन सा सत्य है। दूसरी तरफ, विस्थापन के दसों नियमों में

से किसी में भी ऐसा प्रतिबंध लागू नहीं होता है। विस्थापन के सभी नियम तार्किक रुप से तुल्य अभिव्यक्तियाँ हैं। उदाहरण के लिए, प्रतीक '≡' / '<=>' से दर्शाये गये दोनों पक्ष पुनरुक्ति (सभी प्रतिस्थापित उदाहरण में सत्य होना) होते हैं और इसलिए उनके प्रतिस्थापन गलतियों से रहित होते हैं।

17.2 वैधता का औपचारिक प्रमाण तथा इसका अर्थ

आधुनिक तर्कशास्त्र में युक्ति को कथनों का क्रम माना जाता है। जब युक्ति के परीक्षण के लिए प्रमाण की रचना की जाती है, तो प्रमाण भी वही रूप ले लेता है, जो युक्ति का रूप होता है। इस प्रकार के प्रमाण में दी गई युक्ति की योजना और प्रमाण की योजना के बीच सवादिता होती है। प्रमाण की रचना करते समय आगे आने वाला प्रत्येक चरणपिछले कथन का निष्कर्ष होता है और पुनः भावी कथनों के लिए आधार वाक्य बन जाता है (यदि सबके लिए न भी हो तो कुछ के लिए तो होता ही है)। जो नियम छिपे निष्कर्ष को निगमित करने की प्रक्रिया को नियंत्रित करते हैं, उन्हें आधुनिक तर्कशास्त्र में 'अनुमान के नियम (Rules of Inference) कहते हैं। इनमें से अनेक नियमों की उत्पत्ति पारंपरिक तर्कशास्त्र से हुई है।

आधुनिक तर्कशास्त्र में प्रमाण की रचना करने का एक निश्चित तरीका है। अधिक विवरणात्मक विधि, जिसमें स्थान और समय दोनों अधिक लगते हैं, ने अधिक संक्षिप्त और सरल विधि के लिए राह बनाई है। किन्हीं दो दिए गए आधारवाक्यों से जो भी निष्कर्ष निकलता है, उसे बांयी तरफ लिखा जाता है, जबकि उन नियम और आधार वाक्यों को जिनके लिए इस नियम विशेष को निष्कर्ष प्राप्त करने के लिए लागू किया जाता है, उन्हें दांयी तरफ लिखा जाता है। कोई भी अनुमान का नियम संपूर्ण युक्ति पर लागू होता है। यह प्रमुख बिन्दु ध्यान देने योग्य है। आसानी के लिये आधार वाक्यों के बजाय, प्रदत्त क्रमिक संख्या को लिखा जाता है। इस प्रकार हम अपना समय बचाते हैं। हमें यह सुनिश्चित रूप से ध्यान रखना चाहिए कि निकाले गए निष्कर्ष और उनके लिए संगत आधार वाक्य तथा प्रयुक्त नियम सदैव एक दूसरे के पास–पास रखे जाते हैं। यह प्रक्रिया युक्ति को समझने के लिए प्रयास और समय की दृष्टि से सबसे सरल और सबसे बचत वाली है।

17.3 अनुमान के नियम

अब हमारा काम बहुत आसान हो गया है। आधुनिक तर्कशास्त्र में निष्कर्ष के नौ नियम माने गए हैं। यहां उन्हें जानना और उनका कहां और कैसे उपयोग किया जाए यह पता करना ही पर्याप्त है। उन्हें सिद्ध करने की आवश्यकता यहां नहीं हैं। ये सभी नीचे सूचीबद्ध है।

1) Modus Ponens (M.P.)   4) Disjunctive Syllogism (D.S.)   7)Simplification (Simp.)

पूर्ववत् अनुमान	**वैकल्पिक न्यायवाक्य**	**सरलीकरण**
$p \Rightarrow q$ p $\therefore q$	$p \vee q$ $p \wedge q$ $\neg p$ or $\neg q$ $\therefore q$ $\therefore p$	$p \vee q$ $\therefore p / q$
2) Modus Tollens (M.T.) **शेषवत अनुमान**	5) Constructive Dilemma (C.D.) **विधायक उभयतः पाश**	8)Conjunction(Conj.) **संयोजन**
$p \Rightarrow q$ $\neg q$ $\therefore \neg p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s)$ $p \vee r$ $\therefore q \vee s$	p q $\therefore p \wedge q$
3) Hypothetical Syllogism (H.S.) **हेतु–हेतुमत व्यायवाक्य**	6) Destructive Dilemma (D.D.) **वियोजक/वैकल्पिक उभयतः पाश**	9) Addition (Add.) **योग**
$p \Rightarrow q$ $q \Rightarrow r$ $\therefore p \Rightarrow r$	$(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s)$ $\neg q \vee \neg s$ $\therefore \neg p \vee \neg r$	p $\therefore p \vee q$

कोष्ठकों में दिए गए सभी अक्षर इन नियमों के संक्षिप्त नाम है। आगे हम सिर्फ संक्षिप्त नामों का ही उपयोग करेंगे।

पहले छह नियम पारंपरिक तर्कशास्त्र के मानक नियम हैं। इसलिए इन्हें आसानी से समझा जा सकता है, किन्तु अंतिम तीन नियम के लिए थोड़े स्पष्टीकरण की आवश्यकता है। सरलीकरण को देखें। चूंकि p^q हमें दिया गया है. हम मान लेते हैं कि p सत्य है और q भी सत्य है। इसलिए उनमें से किसी को भी छोड़ देने में कोई हानि नहीं है। संयोजन का मामला थोड़ा भिन्न है। p हमें दिया रहता है, इसलिए हम उसे सत्य मान लेते हैं लेते हैं; q भी हमें दिया रहता है, इसलिए हम उसे भी सत्य मान लेते हैं। चूंकि दोनों को सत्य के रुप में लिया जाता है, अतः हम आसानी से उन्हें संयोजित कर सकते हैं। योग का मामला भी थोड़ा अलग है। मान लीजिए कि आधारवाक्य में हमारे पास सिर्फ p है। क्योंकि यह आधार वाक्य है, हम इसे सत्य के रुप में ले सकते हैं। मान लीजिए कि हमें q को p में जोड़ना है। हमें यह पता नहीं है कि सत्य है या नहीं। q में p को जोड़ने में कोई नुकसान नहीं है क्योंकि यदि q असत्य है pvq फिर भी सत्य रहेगा, क्योंकि p सत्य है। हम जानते ही हैं कि एक सत्य घटक भी वियोजन को सत्य बना सकता है। लेकिन महत्वपूर्ण यह है कि संयोजन का अर्थ योग नहीं है। तर्क की भाषा में, योग का अर्थ संयोजन नहीं बल्कि वियोजन है। हमारा शेष कार्य बहुत आसान है। बस पंक्तियों

के प्रासंगिक जोड़ों के लिए प्रासंगिक नियमों को लागू भर करना है। प्रासंगिक पंक्तियों की और उनके लिए लागू नियमों की पहचान करने के लिए मात्र अभ्यास और खोजी निगाह की आवश्यकता होती है।

सभी युक्तियाँ जिनका परीक्षण किया जाना हो वैध होती है, क्योंकि ये प्रमाण सिर्फ वैधता के लिए प्रमाण होते हैं, अवैधता के लिए नहीं।

17.4 युक्तियों की वैधता का परीक्षण

चलिये हम पूर्व में प्रस्तुत युक्ति से प्रारम्भ करते हैं;

1.

1) A => B		
2) B => C		
3) C => D		
4) ⌐D		
5) A v E	/ ∴ E	
6) A => C	1, 2,	H.S.
7) A => D	6, 3,	H.S.
8) ⌐A	7, 4,	M.T.
9) E	5, 8,	D.S.

मूल युक्ति के आधार वाक्य पांचवी पंक्ति तक प्रतीकात्मक रूप में लिखे गए हैं। तिरछी रेखा के बाद निष्कर्ष लिखा गया है जिसे आकारिक प्रमाणों से सिद्ध करना है। उपनिष्कर्ष 6 (A =>C) को प्राप्त करने का तरीका दाहिनी ओर लिखा गया है, उदाहरण स्वरूप, हाइपोथेटिकल सिलोजिज्म के नियम को पहले और दूसरे आधार वाक्यों पर लागू करके हमने छठा उपनिष्कर्ष प्राप्त किया है। बाकी चरण भी इसी तरह आसानी से दाहिनी ओर लिखे नियमों के आधार पर समझे जा सकते हैं। अतः प्राथमिक वैध युक्ति के आकार को लागू करके हम मूल युक्ति के निष्कर्ष को प्राप्त कर सकते हैं और इस प्रकार यह एक वैध युक्ति सिद्ध होती है और हम इसकी वैधता को औपचारिक प्रमाणों की सहायता से स्थापित कर चुके है। चलिये अब कुछ निश्चित पूर्व में निर्मित आकारिक प्रमाणों को देखें:

2.

1. (B v N) => (K Λ L)

2. ⌐K

3. ⌐M / ∴ ⌐B Λ ⌐M

3.

1. (K => A) Λ (M => D)

2. ⌐A

3. ⌐D / ∴ ⌐K Λ ⌐M

4. ¬K v ¬L	2,	Add.
5. ¬(B v N)	1, 4,	M.T.
6. ¬B Λ¬ N	5,	De.M.
7. ¬B	6	, Simpl.
8. ¬B Λ ¬M	7,3,	Conj.

4. K=> A	1,	Simpl.
5. ¬K	4,2,	M.T.
6. M => D	1,	Simpl.
7. ¬M	6, 3,	M.T.
8. ¬K Λ ¬M	5, 7,	Conj.

4.

1. (M v N) => (P Λ Q)

2. N		/∴ P
3. M v N	2,	Add.
4. P Λ Q	1, 3,	M.P.
5. P	4,	Simpl.

5.

1. (A Λ B) => (C v D)

2. A

3. B	/ ∴C v D	
4. A Λ B	2, 3,	Conj.
5. C v D	1, 4,	M.P.

6.

1. (T => K) Λ (R => S)

2. S => D

3. D => T

4. R	/ ∴ T	
5. R => S	1,	Simp.
6. S	5, 4,	M. P.
7. D	2, 6,	M. P.
8. T	3, 7,	M.P.

7.

1. (A v B) Λ(¬D ΛE)

2. A v B =>K	/∴ K Λ(¬D ΛE)	
3. (A v B)	1,	Simp.
4. K	2, 3,	M.P.
5. ¬D ΛE	1,	Simp.
6. K Λ(¬D ΛE)	4, 5,	Conj.

8.

1. (P =>Q) Λ(R=>S)

2. ¬A=> ¬Q

3. A => ¬B

4. B	/∴ ¬P v ¬S	
5. ¬A	3,4,	M.T.
6. ¬ Q	2,5,	M.P.
7. P=>Q	1,	Simp.

9.

1. A v (B ΛC)

2. A=>P

3. ¬P	/ ∴C	
4. ¬A	2, 3,	M.T.
5. B ΛC	1, 4,	D.S.
6. C	5,	Simp.

8. ⌐P	7, 6,	M.T.
9. ⌐P v ⌐S	8,	Add.

10.

1. A Λ (B v C)		
2. A=>P		
3. Q	/ ∴PΛQ	
4. A	1,	Simp.
5. P	2, 4,	M.P.
6. P Λ Q	5, 3,	Conj.

11.

1. ⌐B		
2. ⌐D		
3. (A=>B) Λ(C=>D)		
4. K	/ ∴ C (K Λ⌐A)	
5. A=>B	3,	Simp.
6. ⌐A	5, 1,	M.T.
7. C=>D	3,	Simp.
8. ⌐C	7, 2,	M.T.

12.

1. (B≡K)=>(Z ΛD)		
2. ⌐(Z ΛD)	/∴⌐(B≡K)	
3. ⌐ (B≡K)	1,2,	M.T.

13.

1. (K ΛT)=>(A v B)		
2. (A v B)=>(P Λ⌐L)		
3. (P Λ⌐L)=>D		
4. ⌐(D)	/∴⌐(K ΛT)	
5. (KΛT)=>(P Λ⌐L)	1,2,	H.S.
6 (K ΛT)=>D	5,3,	H.S.
7. ⌐(K ΛT)	6,4,	M.T.

14.

1. (K Λ A)=>(⌐ B v C)		
2. M=>(K Λ A)		
3. M	/∴⌐B v C	
4. M=> (⌐B v C)	2,1.	H.S.
5. ⌐B v C	4,3,	M.P.

15.

1. A=>D		
2. B=>C		
3. A v B	/∴ D v C	
4. (A=>D)Λ(B=>C)	1,2,	Conj.
5. D v C	4,3,	C.D.

16.

1. A=>D

2. B=>C

17.

1. (A=>G)=>(K v ⌐D)	
2. ⌐(K v ⌐ D)	/∴⌐(A=>G)

3. ¬D v ¬C	/∴¬A v ¬B	
4. (A=>D)Λ(B=>C)	1,2,	Conj.
5. ¬Av ¬B	4, 3,	D.D.

3. ¬(A=>G)	1,2,	M.T.

18.

1. J V(K Λ L)		
2. J=>D		
3. ¬D	/∴K Λ L	
4. ¬J	2,3,	M.T.
5. (K ΛL)	1, 4	D.S.

19.

1. D v (A=>B)		
2. (A=>B)=>(C v K)		
3. ¬(C v K)	/∴D	
4. ¬(A=>B)	2,3,	M.T.
5. D	1, 4,	D.S.

20.

1. A Λ(B=>C)		
2. B	/∴C	
3. B=>C	1,	Simp.
4. C	3,2,	M.P.

21.

1. (A=>B) Λ(C=>D)		
2. A	/∴B v D	
3. A v C	2,	Add.
4. B v D	1, 3,	C.D.

22.

1. A v (B ΛC)		
2. A=>D		
3. ¬D	/∴B	
4. ¬A	2, 3,	M.T.
5. B ΛC	1, 4,	D.S.
6. B	5,	Simp.

23.

1. A=>B		
2. B=>C		
3. ¬C	/∴¬A	
4. ¬B	2, 3,	M.T.
5. ¬A	1, 4,	M.T.

24.

1. (A v B)=> C		
2. D=> ¬ C		
3. D	/∴¬(A v B)	
4. ¬C	2, 3,	M.P.
5. ¬(A v B)	1, 4,	M.T.

25.

1. (A=>C) Λ(B=>D)		
2. K=>A		
3. K	/∴C v D	
4. A	2, 3,	M.P.
5. A v B	4,	Add.

6. C v D   1, 5,   C.D.

26.

1. A v (B=>C)
2. A=>D
3. ⌐D   /∴B=>C
4. ⌐A   2, 3,   M.T.
5. B=>C   1, 4,   D.S.

27.

1.(A=>B)=>(C=>D)
2. (E=>F)=>(A=>B)
3. ⌐(C=>D)   /∴⌐ (E=>F)
4. (E=>F)=>(C=>D)   2, 1,   H.S.
5. ⌐(E=>F)   4, 3,   M.T.

28.

1. (K≡L) => (A Λ B)
2. D => (K≡L)
3. D   / ∴A
4. D => (A Λ B)   1, 2,   H.S.
5. A Λ B   4, 3,   M.P.
6. A   5,   Simp.

29.

1. A Λ B
2. (A v C)=>D   /∴(A ΛD)
3. A   1,   Simp.
4. A v C   3,   Add.
5. D   2, 4,   M.P.
6. (A ΛD)   3, 5,   Conj.

30.

1. I=>J
2. J=>K
3. L=>M
4. I v L   /∴ K v M
5. I=>K   1, 2,   H.S.
6. (I=>K)Λ(L=>M)   5,3,   Conj.
7. K v M   6, 4,   C.D.

31.

1. (E v F) Λ(G v H)
2. (E=>G) Λ(F=>H)
3. ⌐G   /∴H
4. E v F   1,   Simp.
5. G v H   1,   Simp.
6. H   5, 3,   D.S.

32.

1. N=>(O ΛN)
2. (OΛ N)=>P
3. ⌐P   /∴⌐N
4. ⌐ (OΛ N)   2, 3,   M.T.

33.

1. (W=>Y)=>Z
2. W=>Y   /∴(Z v X)
3. Z   1, 2,   M.P.
4. Z v X   3,   Add.

5. ⌐N	1, 4,	M.T.

34.

1. (A v B)=>C		
2. (C v B)=>(A=> D)		
3. A ΛD	/∴ (D v F)	
4. A	3,	Simp.
5. (A v B)	4,	Add.
6. C	1, 5,	M.P.
7. (C v B)	6,	Add.
8. A=>D	2, 7,	M.P.
9. D	8, 4,	M.P.
10. (D v F)	9,	Add.

35.

1. F=> ⌐ G		
2. ⌐F=> (H=> G)		
3. (⌐I v ⌐H) => G		
4. ⌐I	/∴H => G	
5. ⌐I v ⌐ H	4,	Add.
6. G	3, 5,	M.P.
7. ⌐F	1, 6,	M.T.
8. H=>G	2, 7,	M.P.

36.

1. (L=>M)=>(N≡O)		
2. (P=> ⌐ Q)=>(M=> ⌐ Q)		
3. [(P=> ⌐ Q)v(R≡S)} Λ(N v O)]=>{(R≡S)=>(L =>M)}		
4. (P=> ⌐ Q)v(R≡S)		
5. N v O	/∴ (M≡ ⌐ Q)v(N≡O)	
6. {(P=> ⌐ Q) v (R≡S)} Λ(N v O)	4, 5,	Conj.
7. (R≡S) => (L=>M)	3, 6,	M.P.
8. (R≡S) => (N≡O)	7, 1	H. S.
9. {(P=> ⌐ Q) => (M≡ ⌐ Q)} Λ{(R≡S) => (N≡O)}	2, 8,	Conj.
10. (M≡ ⌐ Q) v (N≡O)	9, 4,	C.D.

37.

1. (F=>G) Λ(H=>I)		
2. J=>K		
3. (F v J) Λ(H v L)	/∴G v K	
4. F=>G	1,	Simp.

38.

1. (⌐M Λ⌐N) => (O => N)		
2. N=>M		
3. ⌐M	/∴⌐O	
4. ⌐N	2, 3,	M.T.

5. (F=>G)Λ(J=>K)	4, 2,	Conj.
6. F v J	3,	Simp.
7. G v K	5, 6,	C.D.

39.

1 (K v L)=>(M v N)		
2 (M v N)=>(O ΛP)		
3 K	/∴O	
4 K v L	3,	Add.
5 M v N	1, 4,	M.P.
6 OΛP	2, 5,	M.P.
7 O	6,	Simp.

41.

1 A=>B		
2 C=>D		
3 A v C	/∴B v D	
4 (A=>B) Λ (C=>D)	1, 2,	Conj.
5 B v D	4, 3,	C.D.

43.

1. J=>K		
2. K v L		
3. (L Λ⌐J)=>(M Λ⌐J)		
4. ⌐K	/∴M	
5. L	2, 4,	D.S.
6. -J	1, 4,	M.T.
7. L Λ⌐J	5, 6,	Conj.

5. (⌐M Λ⌐N)	3, 4,	Conj.
6. O => N	1, 5,	M.P.
7. ⌐O	6, 4,	M.T.

40.

1. W => (W ΛX)		
2. (W ΛX) => (W ΛY)		
3. (W ΛY) =>Z	/∴W=>Z	
4. W=> (W ΛY)	1, 2	H.S.
5. W=> Z	4, 3,	H.S.

42.

1. (E v F)=>(G ΛH)		
2. (G v H)=>I		
3. E	/∴I	
4. E v F	3,	Add.
5. G Λ H	1, 4,	M.P.
6. G	5,	Simp.
7. G v H	6,	Add.
8. I	2, 7,	M.P.

44.

1. (D v E) => (F ΛG)		
2. D	/∴F	
3. D v E	2,	Add.
4. F Λ G	1, 3,	M.P.
5. F	4,	Simp.

8. M Λ⌐J	3, 7,	M.P.
9. M	8,	Simp.

45.

1. Q=>R		
2. R=>S		
3. ⌐S	/∴⌐Q Λ⌐R	
4. ⌐R	2, 3,	M.T.
5. ⌐Q	1, 4,	M.T.
6. ⌐Q Λ⌐R	5, 4,	Conj.

46.

1. (T=>U) Λ(V=>W)		
2. (U=>X) Λ(W=>Y)		
3. T	/∴X v Y	
4. T=>U	1,	Simp.
5. U	4, 3,	M.P.
6. U=>X	2,	Simp.
7. X	6, 5,	M.P.
8 X v Y	7,	Add.

47.

1. T => U		
2. V v ⌐U		
3. (⌐V Λ⌐W)	/∴⌐T	
4. ⌐V	3,	Simp.
5. ⌐U	2, 4,	D.S.
6. ⌐T	1, 5,	M.T.

48.

1. ⌐X =>Y		
2. Z =>X		
3. ⌐X	/∴Y Λ⌐Z	
4. ⌐Z	2, 3,	M.T.
5. Y	1, 3,	M.P.
6. Y Λ⌐Z	5, 4,	Conj.

49.

1. (A v B) => ⌐ C		
2. C v D		
3. A	/∴D	
4. A v B	3,	Add.
5. ⌐ C	1, 4,	M.P.
6. D	2, 5,	D.S.

50.

1. (H => I) Λ(J => K)		
2. K v H		
3. ⌐K	/∴I	
4. H	2, 3,	D.S.
5. H=>I	1,	Simp.
6. I	5, 4,	M.P.

51.

1. L v (M => N)

52.

1. K=>L

2. ⌐L=> (N => O)		
3. ⌐L	/∴M => O	
4. N => O	2, 3,	M.P.
5. M=> N	1, 3,	D.S.
6. M => O	5, 4,	H.S.

2. M=>N		
3. (O=>N) Λ(P=>L)		
4. (⌐N v ⌐L) Λ(⌐M v ⌐ O	/∴ (⌐O ⌐P) Λ(⌐M v ⌐ K)	
5. (M => N) Λ (K=>L)	2, 1,	Conj
6. ⌐N v ⌐L	4,	Simp.
7. ⌐M v ⌐ K	5, 6,	D.D.
8. ⌐ O v ⌐P	3, 6,	D.D.
9. (⌐O v ⌐ P) Λ (⌐M v ⌐ K)	8, 7,	Conj.

53.

1. (G=> H) => (I≡J)		
2. K v⌐ (L=> M)		
3. (G=> H) v ⌐K		
4. N=> (L=> M)		
5. ⌐ (I≡J)	/∴⌐N	
6. ⌐ (G => H)	1, 5,	M.T.
7. ⌐K	3, 6,	D.S.
8. ⌐(L=>M)	2, 7,	D.S.
9. ⌐N	4, 8,	M.T.

54.

1. (O => ⌐ P) Λ (⌐ Q => R)		
2. (S =>T) Λ (⌐U=> ⌐V)		
3. (⌐P => S) Λ (R => ⌐ U)		
4. (T v ⌐ V) => (W ΛX)		
5. O v ⌐ Q	/∴ (W ΛX)	
6. ⌐P v R	1, 5,	C.D.
7. S v ⌐ U	3, 6,	C.D.
8. T v ⌐ V	2, 7,	C.D.
9. W Λ X	4, 8,	M.P.

55.

1. E => (F Λ ⌐ G)		
2. (F v G) => H		
3. E	/∴ H	
4. F Λ ⌐ G	1, 3,	M.P.
5. F	4,	Simp.
6. F v G	5,	Add.
7. H	2, 6,	M.P.

17.5 युक्तियों (शाब्दिक) की वैधता का परीक्षण

आइए अब हम युक्ति के शाब्दिक रुप से आरंभ करते हैं और युक्तियों की वैधता का परीक्षण करने से पहले कथनों और तार्किक स्थिरांकों का प्रतीकन कर लेते हैं (समस्याओं को अंत में हल किया जाएगा)।

I) यदि राम क्लब से जुड़ जाता है तो क्लब की प्रतिष्ठा बढ़ जाएगी; और यदि कृष्ण क्लब में शामिल होता है तो क्लब की वित्तीय स्थिति अधिक सुरक्षित हो जाएगी। या तो राम अथवा कृ ष्ण क्लब से जुड़ते हैं। यदि क्लब की सामाजिक प्रतिष्धा बढ़ती है, तो कृष्ण भी उसमें शामिल हो जाएगा और यदि क्लब की वित्तीय स्थिति अधिकसुरक्षित हो जाएगी, तो गोविन्द उसमें शामिल हो जाएगा। इसलिए चाहे तो कृष्ण या फिर गोविंद उससे जुड़ेंगे।

II) यदि विष्णु को वायरलेस मिल गया तो वह हवाईजहाज में चढ़ जाएगा। और यदि वह हवाई जहाज में चढ़ गया तब उसे मीटिंग (बैठक) के लिए देर नहीं होगी। यदि टेलीग्राम पर गलत पता लिखा होगा तो विष्णु को मीटिंग के लिए देरी हो जाएगी। या तो विष्णु को वायरलेस मिल गया या टेलीग्राम पर गलत पता लिखा था। इसलिए या तो विष्णु हवाईजहाज से आएगा अथवा उसे मीटिंग के लिए देरी हो जाएगी।

III) यदि नारायण प्लॉट (भूखंड) को खरीदता है; तो कार्यालय का भवन निर्मित हो जाएगा; जबकि यदि माधव प्लॉट खरीदता है तो उसे जल्दी ही फिर से बेच दिया जाएगा। यदि केशव प्लॉट खरीदता है, तो स्टोर निर्मित हो जाएगा; और यदि स्टोर बन गया, तो लक्ष्मी उसे पट्टे (लीज) पर दे देगी। या तो नारायण अथवा केशव प्लॉट को खरीदेंगे। इसलिए या तो कार्यालय का भवन अथवा स्टोर का निर्माण होगा।

IV) यदि जगन्नाथ मीटिंग में जाता है, तो पूरी रिपोर्ट बनेगी। यदि जगन्नाथ मीटिंग में नहीं जाता है, तो विशेष चुनाव की आवश्यकता होगी। यदि पूरी रिपोर्ट बन जाती है, तो जांच शुरू हो जाएगा। यदि जगन्नाथ के मीटिंग में जाने का अर्थ यह है कि पूरी रिपोर्ट बनेगी, और तब यदि पूर्ण रिपोर्ट का निहितार्थ यह है कि जांच शुरु हो जाएगी, तो या तो जगन्नाथ मीटिंग में जाएगा और जांच शुरु होगी अथवा जगन्नाथ मीटिंग में नहीं जाएगा और कोई जांच शुरू नहीं होगी। यदि जगन्नाथ मीटिंग जाता है और जाँच भगुरू हो जाती है, तो कुछ सदस्यों पर मुकद मा चल सकता है। लेकिन यदि जगन्नाथ मीटिंग में नहीं जाता है और कोई जांच नहीं होती है तो संगठन बहुत तेजी से विघटित हो जाएगा। इसलिए या तो कुछ सदस्यों पर मुकदमा चले या संगठन तेजी से विघटित हो जाएगा।

कथनों का प्रतीकन निम्न तरीके से किया जाता है–

1. राम शामिल होता है = R

2. क्लब की समाजिक प्रतिष्ठा बढ़ेगी = S

3. कृष्ण शामिल होता है = K

4. क्लब की वित्तीय स्थिति बढ़ेगी = F

5. गोविन्द शामिल होता है = G

अब युक्ति होती हैः

1. (R=> S) Λ (K=> F)

2. R v K

3. (S=> K) Λ (F=> G)/ ∴ K v G

4. S v F 1, 2, C.D.

5. K v G 3, 4, C.D.

उपरोक्त युक्ति के उत्तर से एक बात बिल्कुल स्पष्ट है। शाब्दिक अभिव्यक्ति स्वाभाविक रुप से बहुत लंबी और श्रमसाध्य होती है, जबकि प्रतीकात्मक प्रदर्शन संक्षिप्त और स्पष्ट होता है।आगे वाले उदाहरणों का भी इसी तरीके से प्रतीकन किया जा सकता है।

2) 1. विष्णु को वायरलेस मिला = V

2. वह हवाई जहाज में बैठा = P

3. वह मीटिंग में देर से नहीं पहुँचेगा = ⌐L

4. टेलीग्राम पर अपूर्ण/गलत पता था = ⌐T

5. विष्णु को मीटिंग के लिए देरी हो जाएगी = L

अब तर्क बने :–

1. (V=> P) Λ (P => ⌐ L)

2. (⌐T=> L)

3. V v ⌐T / ∴P v L

4. V=> P 1, Simp.

5. (V=> P) Λ (⌐T=> L)		4, 2,	Conj.

6. P v L		5, 3,	C.D.

विद्यार्थियों को सलाह दी जाती है वे शेष युक्तियों के लिए वैधता के औपचारिक प्रमाणों की रचना करें ।

बोध प्रश्न I

टिप्पणी: क) अपने उत्तर के लिए नीचे दिए गए रिक्त स्थान का उपयोग कीजिए।

ख) इकाई के अंत में दिए गए उत्तरों से अपने उत्तरों का मिलान कीजिए।

1. हमने 55 युक्तियों का परीक्षण किया है। शाब्दिक युक्तियों का प्रतीकन किया है. कथनों को प्रतीकों से प्रतिस्थापित किया है। अब, आप अपने स्वयं के कथनों का प्रयोग करते हुए जितनी युक्तियों का निर्माण कर सकते हैं। कीजिए और उनका प्रतीकन करते हुए, उन्हें सिद्ध करने का प्रयास कीजिए।

....

....

....

....

....

17.6 विस्थापन के नियम

1. De Morgan's Law (De M.) **डी मोर्गन लॉ**	⌐ (p Λ q) ≡ (⌐ p v ⌐q) ⌐ (p v q) ≡ (⌐ p Λ ⌐ q)
2. Commutation Law (Com.) **क्रम विनियम नियम**	p v q ≡ q v p p Λ q ≡ q Λ p
3. Double Negation (D.N.) **द्विनिशेध**	⌐ (⌐ p) ≡ p
4. Transposition (Trans.) **स्थानांतरण**	(p => q) ≡ (⌐ q => ⌐ p)
5. Material Implication (Impl.) **शाब्दिक प्रतिपत्ति**	(p => q) ≡ ⌐ p v q

6. Material Equivalence (Equiv.) **शाब्दिक तुल्यता**	$(p \equiv q) \equiv \{(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)\}$ $(p \equiv q) \equiv \{(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)\}$
7. Exportation (Exp.) **बहिर्गमन/निर्यात**	$\{(p \wedge q) \Rightarrow r\} \equiv \{p \Rightarrow (q \Rightarrow r)\}$
8. Tautology (Taut.) **पुनरुक्ति**	$p \equiv p \vee p$ $p \equiv p \wedge p$
9. Association (Ass.) **सहचर्य**	$\{p \vee (q \vee r)\} \equiv \{(p \vee q) \vee r\}$ $\{p \wedge (q \wedge r)\} \equiv \{p \wedge q) \wedge r\}$
10. Distribution (Dist.) **वितरण**	$\{p \wedge (q \vee r)\} \equiv \{(p \wedge q) \vee (p \wedge r)\}$ $\{p \vee (q \wedge r)\} \equiv \{p \vee q) \wedge (p \vee r)\}$

(टिप्पणीः जब अभिव्यक्ति में '∧' और 'v' दोनों सम्मिलित होते हैं तब सिर्फ वितरण/वियोजन नियम लागू हो सकता है। लेकिन सहचर्य का नियम लागू नहीं हो सकता है)।

इनमें से कुछ नियम संरचनात्मक रूप से अव्यवहित अनुमान के किसी एक रूप के समान होते हैं। उदाहरण के लिए, क्रम विनिमय नियम संरचनात्मक रूप से सरल रूपांतरण है। द्विनिषेध प्रतिवृर्तन है। स्थानांतरण पारंपरिक तर्कशास्त्र के परिकल्पनात्मक तर्कवाक्य की प्रतिस्थिति है। अंततः, डीमोर्गन का नियम वियोजक और संयोजक तर्कवाक्यों के लिए लागू किया जाने वाला निशेध है।

अब हमारा कार्य सुस्पष्ट है। हम पहले उन युक्तियों का परीक्षण करेगें, जिसके लिए सिर्फ इन्हीं नियमों की आवश्यकता होती है।

17.7 युक्तियों की वैधता का परीक्षण (विस्थापन के नियम)

1. $p \wedge q$

$\therefore \neg(\neg q \vee \neg p)$

Ans:

1 $p \wedge q$	/ $\therefore \neg(\neg q \vee \neg p)$	
2 $q \wedge p$	1,	Com.
3 $\neg(\neg q \vee \neg p)$	2,	(De. M.)

2. $p \Rightarrow q$ /$\therefore \neg q \Rightarrow \neg p$

$\therefore \neg q \Rightarrow \neg p$	1,	Trans.

3. 1. $\neg p \Rightarrow q$ $/\therefore \neg q \Rightarrow p$
2. $\neg q \Rightarrow \neg(\neg p)$ 1, Trans.
3. $\neg q \Rightarrow p$ 2, D.N.

हम प्रतिज्ञप्तियों (तर्कवाक्यों) के लिए प्रतिज्ञप्ति रुप की बजाय प्रतीकों का उपयोग करेंगें।

4. 1. $\{I \Rightarrow (J \Rightarrow K)\} \Lambda (J \Rightarrow \neg I)$ $/\therefore \{(I \Lambda J) \Rightarrow K\} \Lambda (J \Rightarrow \neg I)\}$
2. $\{(I \Lambda J) \Rightarrow K\} \Lambda (J \Rightarrow \neg I)$ 1, Exp.

5. 1. $(R \Lambda S) \Rightarrow (\neg R \vee \neg S)$ $/\therefore (\neg R \vee \neg S) \Rightarrow (R \Lambda S)$
2. $(\neg R \vee \neg S) \Rightarrow (R \Lambda S)$ 1, De.M.

6. 1. $(T \vee \neg U) \Lambda \{(W \Lambda \neg V) \Rightarrow \neg T\}$ $/\therefore (T \vee \neg U) \Lambda \{(W \Rightarrow (\neg V \Rightarrow \neg T)\}$
2. $(T \vee \neg U) \Lambda \{(W \Rightarrow (\neg V \Rightarrow \neg T)\}$ 1, Exp.

7. 1. $(X \vee Y) \Lambda (\neg X \vee Z)$ $/\therefore (X \vee Y \Lambda \neg X) \vee \{(X \vee Y) \Lambda Z\}$
2. $(X \vee Y \Lambda \neg X) \vee \{(X \vee Y) \Lambda Z\}$ 1, Dist.

8. 1. $Z \Rightarrow (A \Rightarrow B)$ $/\therefore Z \Rightarrow \neg\{\neg(A \Rightarrow B)\}$
2. $Z \Rightarrow \neg\{\neg(A \Rightarrow B)\}$ 1, D.N.

9. 1. $(\neg F \vee G) \Lambda (F \Rightarrow G)$ $/\therefore F \Rightarrow G$
2. $(F \Rightarrow G) \Lambda (F \Rightarrow G)$ 1, Impl.
3. $F \Rightarrow G$ 2, Taut.

17.8 अनुमान और विस्थापन के नियम

अब हम ऐसे विभिन्न प्रकार के तर्कों पर विचार करेगें, जिनमें दोनों प्रकार के नियम लागू किए जा सके। यद्यपि, प्रतीकात्मक तर्कशास्त्र में औपचारिक प्रमाण की रचना एक रुचिकर भाग है, फिर भी तार्किक प्रक्रिया को ध्यान में रखते हुए कुछ सहायक बिन्दु अवश्य दिये जा रहे हैं। (1) युक्ति के सामान्य रूप पर ध्यान दें और प्रयुक्त कथनों की जटिलता से दिग्भ्रमित न हों। निम्न उदाहरण को देखें:

$$(A \vee D) \Rightarrow [(C \vee D) \Rightarrow (C \Rightarrow D)]$$
$$\neg [(C \vee D) \Rightarrow (C \Rightarrow D)]$$
$$\therefore \neg (A \vee D)$$

यद्यपि यह शाब्दिक और प्रतीकात्मक रूप से अधिक जटिल युक्ति है, गहन निरीक्षण हमें यह बताएगा कि यह एक निषेधक हेतु–फलानुमान (M.T.) है। 2. सरलीकरण हमें प्रकथनों को छोड़ने

में मदद करेगा; हेत्वाश्रित न्याय (H.S.) हमें मध्य पद का त्याग करने और नवीन अनुवर्ती से जोड़ने में मदद करता है। विधायक हेत्वाफलानुमान (M.P.) अनुवर्ती को मुक्त या अलग करता है। 3. वितरण हमें संयोग को वियोजन में परिवर्तित करने में मदद करता है और इसके विपरीत में भी। द्विनिषेध स्वयं निषेध का निषेध है। 4. यदि प्राप्त किया जाने वाला निष्कर्ष वियोजन है, तो यह तीन प्रकारों से निगमित किया जा सकता, उदाहरण के लिए, C.D. या D.D. के प्रयोग द्वारा, प्रकथन को निगमित कर व योग का प्रयोग कर, और अपादान को प्राप्त कर और तब वियोजन की ओर जा कर। 5. यदि निष्कर्ष सौपाधिक प्रकथन है तो यह H.S. से प्राप्त किया जा सकता है या वियोजन को निगमित कर तब वस्तुगत अपादान का प्रयोग करके प्राप्त किया जा सकता है। अच्छे सोच–विचार कर प्रयुक्त नियम तथा में सफलता का उपयुक्त साधन है।

10.

1.	$(O \Rightarrow \neg P) \land (P \Rightarrow Q)$		
2.	$Q \Rightarrow O$		
3.	$\neg R \Rightarrow P$	$/\therefore R$	
4.	$\neg Q \lor O$	2,	Impl.
5.	$O \lor \neg Q$	4,	Com.
6.	$(O \Rightarrow \neg P) \land (\neg Q \Rightarrow \neg P)$	1,	Trans.
7.	$\neg P \lor \neg P$	6, 5,	C.D.
8.	$\neg P$	7,	Taut.
9.	$\neg\neg R$	3, 8,	M.T.
10.	R	9,	D.N.

11.

1.	$X \Rightarrow (Y \Rightarrow Z)$		
2.	$X \Rightarrow (A \Rightarrow B)$		
3.	$X \land (Y \lor A)$		
4.	$\neg Z$	$/\therefore B$	
5.	$(X \land Y) \Rightarrow Z$	1,	Exp.
6.	$(X \land A) \Rightarrow B$	2,	Exp.
7.	$(X \land Y) \lor (X \land A)$	3,	Dist.
8.	$\{(X \land Y) \Rightarrow Z\} \land \{(X \land A) \Rightarrow B\}$	5, 6,	Conj.
9.	$Z \lor B$	8, 7,	C.D.
10.	B	9, 4,	D.S.

12.

1.	$C \Rightarrow (D \Rightarrow \neg C)$		
2.	$C \equiv D$	$/\therefore \neg C \lor \neg D$	
3.	$C \Rightarrow (\neg\neg C \Rightarrow \neg D)$	1,	Trans.
4.	$C \Rightarrow (C \Rightarrow \neg D)$	3,	D.N.
5.	$(C \land C) \Rightarrow \neg D$	4,	Exp.
6.	$C \Rightarrow \neg D$	5,	Taut.
7.	$\neg C \lor \neg D$	6,	Impl.

13.

1.	$E \land (F \lor G)$	
2.	$(E \land G) \Rightarrow \neg (H \lor I)$	
3.	$\neg (\neg H \lor \neg I) \Rightarrow \neg (E \land F)$	$/\therefore H \equiv I$

4. (E Λ G) => (⌐H Λ ⌐I)	2,	De.M.
5. ⌐ (H Λ I) => ⌐ (E Λ F)	3,	De.M.
6. (E Λ F) => (H Λ I)	5,	Trans.
7. {(E Λ F) => (H Λ I)} Λ {(E Λ G) => (⌐H Λ ⌐I)}	6, 4,	Conj.
8. (E Λ F) v (E Λ G)	1,	Dist.
9. (H Λ I) v (⌐H Λ ⌐I)	7,8,	C.D.
10. H ≡ I	9,	Equiv.

14.

1. J v (⌐K v J)		
2. K v (⌐J v K)	/∴ J ≡ K	
3. (⌐K v J) v J	1,	Com.
4. ⌐k v (J v J)	3,	Ass.
5. ⌐K v J	4,	Taut.
6. K => J	5,	Impl.
7. (⌐J v K) v K	2,	Com.
8. ⌐J v (K v K)	7,	Ass.
9. ⌐J v K	8,	Taut.
10. J => K	9,	Impl.
11. (J => K) Λ (K => J)	10, 6,	Conj.
12. J ≡ K	11,	Equi.

15.

1. (E Λ F) Λ G		
2. (F ≡ G) => (H v I)	/∴ I v H	
3. E Λ (F Λ G)	1,	Ass.
4. (F Λ G) Λ E	3,	Com.
5. (F Λ G)	4,	Simp.
6. (F Λ G) v (⌐ F Λ ⌐ G)	5,	Add.
7. F ≡ G	6,	Equiv.
8. H v I	2, 7,	M.P.
9. I v H	8,	Com.

16.

1. (M => N) Λ (⌐ O v P)		
2. M v ⌐ O	/∴ N v P	
3. N v P	1, 2,	C.D.

17.

1. (L v M) v (N Λ O)		
2. (⌐ L Λ O) Λ ⌐ (⌐ L Λ M)	/∴ ⌐L Λ N	
3. ⌐ L Λ [O Λ ⌐ (⌐ L Λ M)]	2,	Ass.
4. ⌐ L	3,	Simp.
5. L v {(M v (N Λ O)}	1,	Ass.
6. M v (N Λ O)	5, 4,	D.S.
7. ⌐ (⌐ L Λ M)	2,	Simpl.
8. Lv ⌐ M	7,	De. M.
9. ⌐ M	8, 4,	D.S.
10. N Λ O	6, 9,	D.S.
11. N	10,	Simpl.

	12. ⌐ L Λ N	4, 11,	Conj.

18.	1. E => (F => G)	/∴ F => (E => G)	
	2. (E Λ F) => G	1,	Exp.
	3. (F Λ E) => G	2,	Com.
	4. F => (E => G)	3,	Exp.

19.	1. H => (I Λ J)	/∴ H=>I	
	2. ⌐ H v (I Λ J)	1,	Impl.
	3. (⌐ H v I) Λ (⌐ H v J)	2,	Dist.
	4. ⌐ H v I	3,	Simp.
	5. H => I	4,	Impl.

20.	1. N => O	/∴ (N Λ P) => O	
	2. ⌐ N v O	1,	Impl.
	3. ⌐ P v ⌐ N v O	2,	Add.
	4. ⌐ (P Λ N) v O	3,	De.M.
	5. (P Λ N) => O	4,	Impl.
	6. (N Λ P) => O	5,	Com.

21.	1. (Q v R) => S	/∴ Q => S	
	2. ⌐ (Q v R) v S	1,	Impl.
	3. (⌐ Q Λ ⌐R) v S	2,	De.M.
	4. (⌐Q v S) Λ (⌐ R v S)	3,	Dist.
	5. ⌐Q v S	4,	Simp.
	6. Q => S	5,	Impl.

22.	1. T => ⌐ (U => V)	/∴ T => U	
	2. T => ⌐ {⌐ (U Λ ⌐V)}	1,	D.N.
	3. ⌐T v (U Λ ⌐V)	2,	Impl.
	4. (⌐T v U) Λ (⌐T v ⌐V)	3,	Dist.
	5. ⌐T v U	4,	Simp.
	6. T => U	5,	Impl.

23.	1. W => (X v ⌐Y)	/∴ W => (Y => X)	
	2. W => (⌐Y v X)	1,	Com.
	3. W => (Y => X)	2,	Impl.

24.	1. H => (I v J)		
	2. ⌐I	/∴ H => J	
	3. ⌐H v (I v J)	1,	Impl.
	4. ⌐H v (J v I)	3,	Com.
	5. (⌐H v J) v I	4,	Ass.
	6. ⌐H v J	5, 2,	D.S.
	7. H=> J	6,	Impl.

25.	1. (K v L) => ⌐ (M Λ N)		
	2. (⌐M v ⌐N) => (O ≡ P)		
	3. (O ≡ P) => (Q Λ R)	/∴ (L v K) => (R Λ Q)	
	4. (L v K) => ⌐ (M Λ N)	1,	Com.
	5. (L v K) => (⌐M v ⌐N)	4,	De.M.
	6. L v K) => (O ≡ P)	5, 2,	H.S.
	7. (L v K) => (Q Λ R)	6, 3,	H.S.
	8. (L v K) => (R Λ Q)	7,	Com.

26.	1. (D Λ E) => F		
	2. (D => F) => G	/∴ E=>G	
	3. (E Λ D) => F	1,	Com.
	4. E => (D => F)	3,	Exp.
	5. E => G	4, 2,	H.S.

27.	1. (H v I) => {J Λ (K Λ L)}		
	2. I	/∴ J Λ K	
	3. I v H	2,	Add.
	4. H v I	3,	Com.
	5. J Λ (K Λ L)	1, 4,	M.P.
	6. (J Λ K) Λ L	5,	Ass.
	7. J Λ K	6,	Simp.

28.	1. (M v N) => (O Λ P)		
	2. ⌐O /∴ ⌐M		
	3. ⌐O v ⌐P	2,	Add.
	4. ⌐ (O Λ P)	3,	De.M.
	5. ⌐ (M v N)	1, 4,	M.T.
	6. ⌐M Λ ⌐N	5,	De.M.
	7. ⌐M	6,	Simp.

29.	1. T Λ (U v V)			
	2. T => {U => (W Λ X)}			
	3. (T Λ V) => ⌐ (W v X)	/∴ W ≡ X		
	4. (T Λ U) => (W Λ X)		2,	Exp.
	5. (T Λ V) => (⌐W Λ ⌐X)		3,	De.M.
	6. {(T Λ U) => (W Λ X)} Λ {(T ΛV) => (⌐W Λ ⌐X)}		4, 5,	Conj.
	7. (TΛU) v (TΛV)		1,	Dist.
	8. (W Λ X) v (⌐WΛ⌐X)		6, 7,	C.D.
	9. W ≡ X		8,	Taut.

30.	1. Y => Z		
	2. Z => {Y => (R Λ S)}		
	3. ⌐ (R Λ S)	/∴ ⌐Y	
	4. Y => {Y => (R Λ S)}	1, 2,	H.S.

5. $(Y \wedge Y) \Rightarrow (R \wedge S)$	4,	Exp.
6. $Y \Rightarrow (R \wedge S)$	5,	Taut.
7. $\neg Y$	6, 3,	M.T.

31.
1. $A \vee B$
2. $C \vee D$ $\quad /\therefore \{(A \vee B) \wedge C\} \vee \{(A \vee B) \wedge D\}$
3. $(A \vee B) \wedge (C \vee D)$ $\quad$ 1, 2, Conj.
4. $\{(A \vee B) \wedge C\} \vee \{(A \vee B) \wedge D\}$ $\quad$ 3, Dist.

32.
1. $(I \vee \neg\neg J) \wedge K$
2. $\{\neg L \Rightarrow \neg (K \wedge J)\} \wedge \{K \Rightarrow (I \Rightarrow \neg M)\}$ $\quad /\therefore \neg (M \wedge \neg L)$

3. $\{(K \wedge J) \Rightarrow L\} \wedge \{K \Rightarrow (I \Rightarrow \neg M)\}$	2,	Trans.
4. $\{(K \wedge J) \Rightarrow L\} \wedge \{(K \wedge I) \Rightarrow \neg M\}$	3,	Exp.
5. $(I \vee J) \wedge K$	1,	D.N.
6. $K \wedge (I \vee J)$	5,	Com.
7. $(K \wedge I) \vee (K \wedge J)$	6,	Dist.
8. $(K \wedge J) \vee (K \wedge I)$	7,	Com.
9. $L \vee \neg M$	4, 8,	C.D.
10. $\neg M \vee L$	9,	Com.
11. $\neg (M \wedge \neg L)$	10,	De. M.

17.9 शाब्दिक रुप में युक्तियों का परीक्षण

1. हम युक्तियों की वैधता का परीक्षण करने के लिए आगे बढ़ने से पहले युक्ति के शाब्दिक रुप और कथन के प्रतीकन तथा तार्किक स्थिरांकों से शुरुआत करते हैं (समस्याओं को अंत में हल किया जाएगा)।1 नली में ऑक्सीजन या तो तंतु के साथ मिलकर ऑक्साइड बनाती है अथवा वह पूरी तरह से लुप्त हो जाती है। नली में ऑक्सीजन पूरी तरह से लुप्त नहीं हो सकती है, इसलिए नली में ऑक्सीजन ने तंतु के साथ मिलकर ऑक्साइड बनाया है।

2. यदि कोई राजनैतिक नेत्री को यह लगता है कि उसकी पिछली राय गलत थीं और वह अपने रवैये को नहीं बदलती है तो वह धोखा करने की दोषी है। और यदि वह अपने तरीके को बदलती है, तो उस पर असंगतता का आरोप लगाया जा सकता है। वह या तो अपना तरीका बदलेगी या नहीं बदलेगी। इसलिए या तो वह धोखा करने का दोषी होगी अथवा उस पर असंगतता का दोष लगाया जा सकता है।

3. यह सही नहीं है कि वह या तो भूल गई अथवा वह पूरा नहीं कर सकती थी। वह भूली नहीं थी, अतः वह पूरा कर सकती थी।

4. उसके अनेक मित्र तभी हो सकते हैं, यदि वह प्रत्येक का सम्मान करती हो। यदि वह प्रत्येक का सम्मान करती है, तो वह यह उम्मीद नहीं कर सकती है कि वे सभी एक ही तरीके से

व्यवहार करें। उसके अनेक मित्र हैं। इसलिए वह उन सबसे एक ही तरीके से व्यवहार करने की उम्मीद नहीं करती है।

5. यदि पीड़ित की जेब में पैसे हैं, तो डकैती अपराध का उद्देश्य नहीं था। लेकिन अपराध का उद्देश्य डकैती अथवा बदला लेना था। चूंकि पीड़ित की जेब में पैसे थे। इसलिए बदला लेना ही अपराध का उद्देश्य था।

8. नेपोलियन की भर्त्सना की जानी चाहिए, यदि उसने वह सत्ता हड़पी थी, जो आधिकारिक रुप से उसकी नहीं थी। या तो नेपोलियन न्यायसंगत राजा था अथवा उसने सत्ता हड़पी थी, जो न्यायिक रुप से उसकी नहीं थी। नेपोलियन न्यायसंगत राजा नहीं था। इसलिए नेपोलियन की भर्त्सना की जानी चाहिए।

7. यदि हम विल्किन्स के खाते पर और क्रेडिट (ऋण) दे दें; तो अपनी अगली परियोजना में हमारी बोली/ठेके को स्वीकार करना उनका नैतिक दायित्व होगा। हम अपने आंकलनों (आंकड़ों) को तैयार करने में अधिक लाभ वाले आंकड़े दे सकते हैं, यदि उन पर अपनी अगली परियोजना में हमारी बोली स्वीकार करने का नैतिक दायित्व हो। अपने आंकलन/आंकड़ों को तैयार करने में अधिक लाभ वाले आंकड़े देने से हमारी सामान्य वित्तीय स्थिति काफी बेहतर हो जाएगी। अतः विल्किन्स के खाते पर और अधिक क्रेडिट देने से हमारी सामान्य वित्तीय स्थिति में काफी सुधार हो जाएगा।

8. यदि रोमन नागरिकता ने नागरिक स्वतंत्रता की गारंटी दी होती, तो रोमन नागरिकों को धार्मिक स्वतंत्रता मिली होती। यदि रोमन नागरिकों को धार्मिक स्वतंत्रता मिली होती, तो मूल ईसाईयों का उत्पीड़न न हुआ होता। लेकिन मूल ईसाईयों का उत्पीड़न हुआ था। अतः रोमन नागरिकता नागरिक स्वतंत्रता की गारंटी नहीं करती थी।

9. जलज की यदि अब भी दिलचस्पी होगी तो वह संदेश मिलने पर आ जाएगी। यद्यपि वह नहीं आई लेकिन फिर भी उसकी दिलचस्पी है। इसलिए उसे संदेश नहीं मिला है।

10. यदि टेलर (गणक) अथवा कैशियर ने अलार्म बटन दबाया होता, तो तिजोरी स्वतः बंद हो जाती और तीन मिनट के अंदर ही पुलिस आ जाती। यदि पुलिस तीन मिनट में आ जाती तो, चोर की गाड़ी को पकड़ लिया जाता। लेकिन चोर की गाड़ी को नहीं पकड़ा जा सका। इसलिए टेलर ने अलार्म बटन नहीं दबाया था।

11. यदि लोग सदैव अपने कर्तव्य बोध से नियंत्रित हो, तो वे अनेक सुखों का मजा नहीं ले पाएंगे; और यदि वे सदैव अपने सुखों की इच्छा से नियंत्रित होंगे, तो वे अपने कर्तव्य में अक्सर लापरवाही कर देंगे। व्यक्ति या तो सदैव अपने कर्तव्य बोध द्वारा नियंत्रित होते हैं या तो सुखों की इच्छा से। यदि लोग सदैव अपने कर्तव्य बोध से नियंत्रित होंगे, तो वे अक्सर अपने कर्तव्यों

को नजरअंदाज नहीं करेंगे; और यदि वे सदैव अपने सुखों की इच्छा से नियंत्रित होंगे, तो वे अनेक सुखों का आनंद उठाना नहीं भूलेगें। इसलिए यदि लोग अनेक सुखों का आनन्द उठाना भूल जायेंगे, तो वे प्रायः अपने कर्तव्यों को नजरअंदाज नहीं करेंगे। और, यदि प्रायः वे अपने कर्तव्यों को नजरअंदाज नहीं करेंगे तो उन्हें अनेक सुखों का आनन्द उठाना भूल जाना पड़ेगा।

12. यद्यपि विश्व की जनसंख्या बढ़ रही है, लेकिन कृषि उत्पादन घट रहा है और निर्माण स्थिर बना है। यदि कृषि उत्पादन कम होता है और विश्व की जनसंख्या बढ़ती है, तो या तो नए खाद्य स्त्रोत उपलब्ध हो जाएगें अन्यथा विश्व में खाद्य संसाधनों का आमूल पुर्नवितरण होगा, जब तक कि मानव की पोषण आवश्यकताएं घट नहीं जातीं। कोई नया खाद्य स्त्रोत उपलब्ध नहीं होगा, फिर भी न तो परिवार नियोजन को प्रोत्साहित किया जाएगा और ना ही मानव की पोषण आवश्यकताएं कम होंगी। इसलिए विश्व में खाद्य स्त्रोतों का आमूल पुर्नवितरण होगा।

उत्तर: घटकों का निम्न तरीके से प्रतीकन किया जाता हैः

1- 1. तंतु के साथ मिलकर C

2. अन्यथा यह नष्ट हो जाएगी V

3. नष्ट नहीं हुई है ⌐V

कथन / युक्ति

1. C v V
2. ⌐V /∴ C 1, D. S.

2. 1) एक राजनेतिक नेत्री अपना तरीका नहीं बदलती हैः ⌐C

2) वह धोखा करने की दोषी हैः D

3) वह अपना तरीका बदलती है : C

4) वह पूरा करने योग्य नहीं थीः I

कथन / युक्ति

1. (⌐ C => D) Λ (C => I)
2. C v ⌐ C /∴ D v I
3. ⌐ C v C 2, Com.
4. D v I 1,3, C.D.

3. 1) ऐसा नहीं हैः ¬

2) वह भूल गईः F

3) वह भूली नहींः ¬ F

4) वह पूरा करने में सक्षम नहीं थीः ¬A

कथन/युक्ति

1. ¬ (F v ¬A)
2. ¬ F / A
3. ¬ F Λ A 1,De.M.
4. A 3,Simpl.

4. 1) उसके अनेक मित्र हैंः ¬R

2) वह प्रत्येक का सम्मान करती हैंः F

3) वह सबसे समान व्यवहार की आशा नहीं कर सकतीः ¬ E

कथन/युक्ति

1. ¬R => ¬ F		
2. R => ¬ E		
3. F	/∴ ¬ E	
4. R	1, 3,	M.T.
5. ¬ E	2, 4,	M.P.

5. 1) पीड़ित के पास पैसे हैंः M

2) चोरी उद्देश्य नहीं थाः ¬R

3) चोरी या बदला लेना : R v V

कथन/तर्क

1. M => ¬R		
2. R v V		
3. M	/∴ V	
4. ¬ R	1, 3,	M.P.
5. V	2, 4,	D.S.

6. 1) उसने सत्ता हड़प ली जा नहीं थीः U

2) नेपोलियन की भर्त्सना की जानी चाहिए : C

3) नेपोलियन आधिकारिक रूप सेः L

कथन / युक्ति

1. U => C		
2. L v U		
3. ¬ L	/∴ C	
4. U	2, 3,	D.S.
5. C	1, 4,	M.P.

7. 1) हम क्रेडिट (ऋण) को आगे बढ़ा सकते हैंः C

2) उनका नैतिक दायित्व होगाः M

3) हम अपने आंकड़ेः F

4) अतः सुधार हो जाएगाः I

कथन / युक्ति

1. C => M		
2. M => F		
3. F => I	/∴ C => I	
4. C => F	1, 2,	H.S.
5. ∴C => I	4, 3,	H.S.

बोध प्रश्न II

टिप्पणीः क) अपने उत्तर के लिए नीचे दिए गए रिक्त स्थान का उपयोग कीजिए।

ख) इकाई के अंत में दिए गए उत्तरों से अपने उत्तरों का मिलान कीजिए।

अनेक समस्याओं में से हमने सात का समाधान कर दिया हैं। विद्यार्थियों का सलाह दी जाती है कि वे शेष को हल करें। यह जटिल संरचना वाली युक्तियों का सत्यापन करना सीखने का बहुत अच्छा तरीका है।

....

....

....

....

....

17.10 सारांश

आधुनिक तर्कशास्त्र पारंपरिक तर्कशास्त्र का ही विस्तार है। यद्यपि इसके सत्यापन में गुणात्मक अन्तर है। अन्तर, साक्ष्य की यर्थाथता और स्पष्टता में है। निष्कर्ष के नी नियमो में अनेक पारंपरिक तर्कशास्त्र के नियम जैसे मोडस पोनेन्स सम्मिलित है। अनुमान के नियममें अनेक पारंपरिक तर्कशास्त्र के नियम जैसे मोडस पोनेन्स सम्मिलित हैं। अनुमान के नियम संपूर्ण पंक्ति पर प्रयुक्त होते हैं। किसी युक्ति को सिद्ध करने में सदैव समस्त नॉ नियमों की आवश्यकता नहीं होती है, बल्कि सिर्फ कुछ नियमों की ही आवश्यकता होती है। एक पंक्ति को एक से अधिक बार तथा इसी प्रकार किसी भी नियम को एक से अधिक बार भी प्रयोग किया जा सकता है।

जिस प्रकार पारंपरिक तर्कशास्त्र के नियम वैधता का परीक्षण करने के लिए अपर्याप्त हैं. उसी प्रकार अनुमान के नियम भी अपर्याप्त हैं। इसलिए विस्थापन के नियमों की सहायता से अनेक नियम और बनाए गए हैं। जहाँ अनुमान के नियम पूरी पंक्ति पर लागू होते हैं वहीं विस्थापन के नियम पूरी पंक्ति या पंक्ति के एक भाग पर लागू होते हैं। विभिन्न प्रकार के युक्तियों का सत्यापन इन नियमों के द्वारा किया जा सकता है।

17.11 कुंजी शब्द

मोडस पोनेन्स (M.P.) और मोडेस टोलेन्स (M.T.): मोडस पोनेन्स एक वैध, सरल युक्ति प्रकार है, जिसे कभी–कभी पूर्ववर्ती की पुष्टि अथवा निर्लिप्तता का नियम भी कहा जाता है। यह निकट रुप से अन्य वैध युक्ति 'मोडस टोलेन्स या 'अनुवर्ती' के खडन से सबन्धित है।

वैधता: कोई युक्ति तभी तर्कसंगत या वैध होता है, यदि और सिर्फ यदि उसके आधार वाक्य उसके निष्कर्ष की सत्यता को पुष्ट करते हैं। आधारवाक्यों की पुष्टि और निष्कर्ष का खंडन करना स्व–व्याघाती होता है। वैध युक्ति की संगत स्थिति इस बात को बताती है कि तार्किक

सत्य और उसके संगत स्थिति का खंडन व्याघातक है। निष्कर्ष उसके आधारवाक्यों का तार्किक परिणाम है।

युक्ति अथवा तर्क: युक्ति अनुमान का एक रूप है। यह तर्कवाक्यों का ढांचा है, जिसमें आधार वाक्य और निष्कर्ष होते हैं।

17.12 अन्य सहायक अध्ययन–सामग्री एवं सन्दर्भ

बेसन, ए.एच. एवं ओ' कोनोर, डी.जे., इंट्रोडक्शन टु सिम्बोलिक लॉजिक, कलकत्ता, ऑक्सफोर्ड युनिवर्सिटी प्रैस, 1976.

कोपी, आई.एम., सिम्बोलिक लॉजिक, फोर्थ ऐडिसन, न्यू दिल्ली, कोलियर मैकमिलन इन्टरनेशनल, 1973.

कोपी, आई.एम., इन्ट्रोडक्शन टु लॉजिक, नाइन्थ ऐडिसन, न्यू दिल्ली, प्रेन्टिस हॉल ऑफ इन्डिया, 1995.

जोसेफ, एच. डबलू बी. एन इन्दुडक्शन टु लॉजिक, ऑक्सफोर्ड, 1906.

लुइस, सी.आई. एवं लोंगफोर्ड, सी.एच., सिम्बोलिक लॉजिक, न्यूयोर्क, डोवर पब्लिकेशन, इक, 1959.

17.13 बोध प्रश्नों के उत्तर

बोध प्रश्न I

संकेतः प्रत्येक घटक का प्रतीकन पहली संज्ञा (जातिवाचक या व्यक्तिवाचक) अथवा क्रिया के पहले अक्षर का उपयोग करते हुए करें।

3. नारायण प्लॉट खरीदता	N
कार्यालय का भवन	O
माधव प्लॉट खरीदता है	M
यह बिक जाएगा	S
केशव खरीदता.....	K
दुकान........	C

लक्ष्मी....... L

आइए हम इसके अनुसार घटकों का प्रतिकन करें:

1. N => O

2. M => S

3. K => C

4. C=> L

5. N v K / ∴ O v C

6. (N=>O) Λ (K => C) 1, 3, Conj.

7. ∴ O V C 6, 5, C.D.

अब हम प्रतीकन की विधि को जान गए हैं। इसलिए हम सीधे ही घटकों का प्रतीकन कर सकते हैं।

4. जगन्नाथ मीटिंग में गया J

पूरी रिपोर्ट..... C

विशेष चुनाव............ S

जांच शुरु होगी....... I

कुछ सदस्यों पर मुकदमा चलेगा M

संगठन विघटित हो जाएगा D

अब हम घटकों का इसके अनुसार प्रतीकन करते हैं

1. J => C
2. ¬J => S
3. C => I
4. { (J => C) Λ (C => I) } => (J Λ I) v (¬J Λ ¬I)
5. (J Λ I) => M
6. (¬J Λ ¬I) => D /∴ M v D
7. (J => C) Λ (C => I) 1, 3, Conj.
8. (J Λ I) v (¬J Λ ¬I) 4, 7, M. P.
9. {(J Λ I) => M } Λ {(¬J Λ ¬I) => D} 5, 6, Conj.

10. ∴ M v D 9, 8, C.D.

बोध प्रश्न II

आप यह नोट कर सकते हैं कि प्रत्येक प्रतीक उसके तर्कवाक्यों के घटक के पहले या दूसरे शब्द का पहला अक्षर है।

8.
1) R => F
2) F => ⌐ C
3) C /∴ ⌐ R
4) ⌐ F 2, 3, M.T.
5) ⌐ R 1, 4, M.T.

9. इस युक्ति विशेष में सुविधा के लिए वाक्य के, उसका अर्थ बदले बिना, पुर्नगठन की आवश्यकता है। इसे इस प्रकार किया जा सकता है। यदि जलज आएगी और उसकी दिलचस्पी होगी तो उसे संदेश मिल गया होगा। वह नहीं आई, और उसकी दिलचस्पी थी। इसलिए उसे संदेश नहीं मिला है।

अब प्रतीकन करना आसान है।

1) (J Λ I) => S
2) ⌐ S Λ I /∴ ⌐ J
3) J => (I =>S) 1, Exp.
4) J => (⌐ I v S) 3, Impl.
5) J => ⌐ (I Λ ⌐ S) 4, De.M.
6) I Λ ⌐S 2, Com.
7) ⌐J 5, 6, M.T.

10.
1) (T v C) => (V Λ P)
2) P => R
3) ⌐ R /∴ ⌐ T
4) ⌐ P 2, 3, M.T.
5) ⌐ P v ⌐V 4, Add.
6) ⌐V v ⌐ P 5, Com.
7) ⌐ (T v C) 1, 6, M.T
8) ⌐ T Λ ⌐ C 7, De. M.
9) ⌐T 8, Simp.

11.
1) (D => F) Λ (P => N)
2) D v P)

3) D => ⌐ N) Λ (P => ⌐ F)	/ ∴ (F => ⌐ N) Λ (⌐ N => F)	
4) F v N	1, 2,	C.D.
5) ⌐ N v ⌐ F	3, 2,	C. D.
6) ⌐ F => N	4,	Impl.
7) N => ⌐ F	5,	Impl.
8) (⌐ F => N) Λ (N => ⌐ F)	6, 7,	Conj.
9) (⌐ N => F) Λ (F => ⌐N)	8,	Trans.
10) (F => ⌐ N) Λ (⌐ N => F)	9,	Com.

12. इस युक्ति में भी कुछ वाक्यों की पुर्नरचना करनी होगी। जो निम्न प्रकार से हैः

विश्व जनसंख्या बढ़ रही है और कृषि उत्पादन कम हो रहा है तथा निर्माण स्थिर है। जब प्रतीकन करें तो यह बन जाता है; w और A और M

अगला वाक्य 'अन्यथा मानव पोषण आवश्यकताएं कम हो जाएंगी पोषण आवश्यकताएं कम नहीं होगी' हो जाएगा। और फिर कथन 'ना तो परिवार नियोजन को बढ़ावा दिया जाएगा और न ही मानव की पोषण आवश्यकताएं कम होंगी' का अर्थ वही है कि मानव जनसंख्या बढ़ रही है और मनुष्य की पोषण आवश्यकताएं कम नहीं होगीं। अब अगला चरण स्पष्ट है। पूरी युक्ति का निम्न तरीके से प्रतीकन किया जा सकता है।

1) W Λ (A Λ M)		
2) (A Λ W) => (N v R) Λ H		
3) ⌐ N		
4) W		
5) ⌐ H	/∴ R	
6) (W Λ A) Λ M	1,	Ass.
7) W Λ A	6,	Simp.
8) (A Λ W)	7,	Com.
9) (N v R) Λ H	2, 8,	M.P.
10) N v R	9,	Simp.
11) R	10, 3,	D.S.

इकाई 18 सोपाधिक प्रमाण और अप्रत्यक्ष प्रमाण[19]

रूपरेखा

18.0 उद्देश्य

इस इकाई में हमने युक्तियों की वैधता का परीक्षण करने की नई तकनीकें प्रस्तुत की हैं। तर्क के अनुरूप ही तर्क–सिद्धि की भी बहुत सी तकनीकें होती हैं। इस इकाई का मुख्य उद्देश्य आपको यह समझाना है कि तर्क–सिद्धि की कोई एक तकनीक सभी प्रकार की तर्कशास्त्रीय समस्याओं को हल नहीं कर सकती है।

वास्तव में आपके लिए सिर्फ वैधता का सत्यापन करने की कला सीखना ही पर्याप्त नहीं है, इसलिए इस इकाई का एक उद्देश्य आपको अवैधता का परीक्षण करने की कला सिखाना भी है। अच्छी युक्ति की पर्याप्त जानकारी के लिए आपको यह भी ज्ञात होना चाहिए कि कोई युक्ति कब

[19] प्रो. एम आर नन्दन, गो. का. फॉर वुमेन, मांडया।
अनुवाद–डॉ. कुमकुम चतुर्वेदी, मेरठ।

असंगत कहलाती है एवं उसे असंगत बनाने वाला तत्व कौन सा है। इसलिए, इस इकाई में आपको तर्क शास्त्र के अध्ययन के इस पहलू से भी परिचित करवाया गया है।

18.1 परिचय

सोपाधिक प्रमाण (Conditional Proof (C.P.)) की विधि प्रकारिक रूप में अनुमान या विस्थापन के नियमों से भिन्न है। कुछ विशेष प्रकार की युक्तियों को पिछली इकाईयों में बताए गए किसी भी नियम के द्वारा सत्यापित नहीं किया जा सकता है। वे नियम केवल असोपाधिक निष्कर्षों वाली ययुक्तियों पर ही लागू होते हैं। अतः ऐसी युक्तियां जिनका सोपाधिक निष्कर्ष हो, उन नियमों के दायरे में नहीं आती हैं। सोपाधिक तर्कवाक्य का सबसे परिचित उदाहरण प्रतिपत्ति तर्कवाक्य है। चूंकि प्रतिपत्ति तर्कवाक्यों के तुल्य वियोजक और निषेध के रूप होते हैं, इसलिए उन्हें भी सोपाधिक तर्कवाक्य माना जाना चाहिए। पुनः, सोपाधिक तर्कवाक्य सोपाधिक प्रमाण की कोई ऐसी विशिष्ट प्रणाली नहीं है, जो उन्नीस नियमों से पूर्ण रूप से अलग है। सिर्फ, नियमों की संख्या बढ़कर बीस हो जाती है। इनमें से एक नियम का उपयोग अनिवार्य रुप से निष्कर्ष के सोपाधिक होने पर वैधता के सत्यापन के लिए किया जाता है। यह नियम, सोपाधिक प्रमाण, इस संदर्भ में विशेष है कि इसका अन्यत्र कहीं भी उपयोग नहीं किया जाता है। अतः इस नियम को सोपाधिक प्रमाण के नियम के रुप में जाना जाता है।

18.2 सोपाधिक प्रमाण (CONDITIONAL PROOF (C.P))

किसी भी निगमनिक युक्ति, वैध अथवा अवैध, को सोपाधिक तर्कवाक्य के रुप में प्रदर्शित किया जा सकता है। यह जानना और भी अधिक महत्वपूर्ण है कि मूल युक्ति तभी वैध होती है जब संगत सोपाधिक वक्तव्य 'पुनरुक्ति' (tautology) की शर्त को पूरा करता है। अन्यथा तर्क अवैध होता है। इस उदाहरण पर विचार करें:

1

सभी A, B है

सभी B, C हैं. सभी A, C हैं

इसकी संगत सोपाधिक प्रकार निम्न हैं:

'यदि सभी A, B हैं और सभी A, C हैं, तब सभी A, C होंगे

(1)

हम पहले आधार वाक्य का P_1 के और दूसरे का P_2 के रुप में प्रतीकन करते हैं। निष्कर्ष का प्रतीकन C के रूप में किया जाता है। अब (1) बन जाता है।

$(P_1 \Lambda P_2) => C$ (2)

(2) को इसलिए पुनरुक्ति कहा जाएगा, क्योंकि इसका संगत तर्कवाक्य रुप पुनरुक्ति है। कोई तर्कवाक्य रुप पुनरुक्ति तब कहा जाता है, जब इसके सभी प्रतिस्थापन सत्य होते हैं। हम तर्कवाक्य रूप के लिये कितने भी प्रतिस्थापन ले कर आए, वे सभी सत्य होने चाहिएँ। दूसरे शब्दों में, यदि उद्धरणों की संख्या ली जाए, जिसके प्रतिस्थापन प्रतिज्ञप्ति रूप हो, तब इन सभी 'n' उद्धरणों में तर्कवाक्य रूप सत्य होना चाहिएँ। यदि सी.पी. (C.P.) के द्वारा यह प्रदर्शित करना हो कि युक्ति वैध है तो उसे दो शर्तों को अनिवार्य रूप से पूरा करना चाहिएँ,

1) निष्कर्ष सोपाधिक तर्कवाक्य होना चाहिए। चाहिए।

2) सोपाधिक तर्कवाक्य को आधार वाक्यों के संयोजन से मूल वैध युक्तियों के क्रमिक प्रयोग द्वारा निगमित किया जाना चाहिए। और इन युक्तियों को अनुमान के प्रासंगिक नियमों को पूरा करना चाहिए। अर्थात् C.P. में सभी आधारवाक्यों को इन नियमों द्वारा समर्थित होना चाहिए। अतिरिक्त आधार वाक्य, जो C.P. की विशेषता है, सदैव निष्कर्ष का पूर्ववर्ती होता है और प्रमाण की रचना आधार वाक्य के रूप में निष्कर्ष के पूववर्ती से ही आरंभ होती है। यह आधार वाक्य स्वयं ही C. P. कहलाता है। तर्क का एक उदाहरण C.P. युक्त नीचे दिया गया हैः

(3) $P=>(A=>B)$

जब P आधार वाक्यों के संयोजन के लिए उपयोग किया जाता है तो प्रतिस्थापन का एक नियम अर्थात् निर्यात के नियम (Exportation Rule) C.P. के अनुसार हम (3) को इस प्रकार लिख सकते हैं

(4) $(P \wedge A) =>B$

यह स्पष्ट है कि (4) का निष्कर्ष (3) के निष्कर्ष का अग्रवर्ती है। चूंकि हमने अनुमानित आधार वाक्य से शुरुआत की थी, अतः प्रमाण C.P. कहलाता है। इससे अन्तर स्पष्ट हो जाता है। अन्य सभी आधारवाक्यों को सत्य माना जाता है।

1 पूर्वानुमान का वस्तुतः कोई विशेष महत्त्व नहीं होता है। यदि अनुमानित आधार वाक्य असत्य भी हो, तो भी तर्कसंगत निष्कर्ष निकालना संभव है। यदि ठ को वैध रुप से $P \wedge A$ से प्राप्त

किया जा सकता है, तो न सिर्फ (A) तर्कसंगत है बल्कि उसके संगत मूल युक्ति (3) भी वैध होनी चाहिए, क्योंकि (3) और (4) तार्किक रुप से इस प्रकार की युक्ति के तुल्य हैं।

1. 1. (A v B)=> (CΛ D)

2). (D v E) => F / ∴ A=>F

हम A का अनुमान लगाने से शुरुआत करेंगे।

3). A /∴ F C. P.

C.P. में सदैव पहली पंक्ति की संरचना इसी प्रकार से होनी चाहिए। पंक्ति 3 में काट (/), ∴ और C.P. यह दर्शाते हैं कि सोपाधिक प्रमाण की विधि का उपयोग किया गया है।

4). A v B 3, Add.

5). C Λ D 1, 4, M.P.

6). D 5, Simp.

7). D v E 6, Add.

8). ∴ F 2, 7, M.P.

यदि निष्कर्ष में सिर्फ एक उपाधि है, तो C.P. का उपयोग एक बार किया जाएगा। यदि निष्कर्ष दो उपाधियाँ हों, तो C.P. का उपयोग दो बार किया जाएगा। ऐसे मामलों में अपनायी जाने वाली प्रक्रिया निम्न हैः

2. 1). A=> (B=> C)

2). B=> (C=> D) /∴ A => (B =>D)

3). A /∴ B => D (C.P.)

4). B /∴ D (C.P.)

5). B => C 1, 4, M.P.

6). C 5, 4, M.P.

7). C => D 2, 4, M.P.

8). ∴ D 7, 6, M.P.

18.3 अप्रत्यक्ष प्रमाण (INDIRECT PROOF (I.P.))

इस विधि को असंगति प्रदर्शन (reduction absurdum) भी कहते हैं। यह ज्यामितीय प्रमेयों के प्रमाण की रचना में बहुत प्रचलित एक विधि है। इस विधि की पहचान एक विशेष गुण से होती है। किसी कथन को सिद्ध करने के लिए, उसके व्याघात को सत्य माना जाता है, जिससे निष्कर्ष को तार्किक रुप से प्राप्त किया जाता है। यह निष्कर्ष हमारे अनुमान का व्याघाती होता है। यदि A, B का व्याघात करता है, तो या तो A असत्य होगा अथवा B असत्य होगा। A असत्य नहीं हो सकता, क्योंकि इसे तार्किक रुप से उससे निगमित किया गया है जिसे सत्य माना गया है। इसलिए असत्य होगा, जिसका अर्थ है कि B सत्य है। इसी तरीके से कभी–कभी ज्यामिति की प्रमेय अथवा तर्कशास्त्र की युक्ति को सिद्ध किया जाता है।

इस विधि का प्रत्यक्ष लाभ है। कभी–कभी प्रमाणों की लंबाई बहुत अधिक होती है। तर्कशास्त्र में यह महत्वपूर्ण है कि हम कम से कम संख्या में चरणों को अपनाए। दूसरी आवश्यकता प्रमाण विधि की स्पष्टता की है। इन दोनों विशेषताओं का होना अत्यंत उपयोगी है। ऐसी परिस्थितियों में, यह विधि सबसे उपयोगी है। इस विधि के उपयोग में शुरुआत, जिसे सिद्ध करना होता है, उसके व्याघात से की जाती है। यहां इस बात का ध्यान रखना चाहिए कि जिसे सिद्ध किया जाना है, उसके व्याघात को दाएं हाथ की ओर पूर्वानुमान के ठीक बाद में I.P. लिखकर इंगित किया जाता है। C.P. में भी हम पूर्वानुमान से शुरुआत करते हैं। अन्तर यह है कि बाद वाले में अर्थात् C.P. में जो अनुमान लगाया जाता है वह युक्ति का ही भाग होता है, जबकि पहले वाले अर्थात् I.P. में ऐसा नहीं होता है। इस युक्ति पर विचार करें।

3.

1. A => (BΛC)
2. (B v D) => E
3. D v A / ∴ E
4. ⌐ E I.P.
5. ⌐B Λ ⌐ D 2, 4, M.T.
6. ⌐D 5, Simp.
7. A 3, 6, D.S.

8. BΛC	1, 7,	M.P.
9. B	8,	Simp.
10. B v D	9,	Add.
11. E	2, 10,	M.P.
12. E Λ ⌐ E	11, 4,	Conj

10 वें चरण से आगे के चरण, एक भिन्न प्रकार से, कुछ इस प्रकार भी लिखे जा सकते हैं

13. ⌐ B	5,	Simp.
14. B Λ ⌐ B	9, 13,	Conj.

भले ही हमें E ^ ⌐ E अथवा B ^ ⌐ B प्राप्त हो, परिणाम समान रहता है। दोनों स्थितियों में युक्ति में दो चरण होते हैं, जिनके संयोजन से व्याघात होता है। प्रत्येक व्याघाती युक्ति में एक संयोजक अवश्य असत्य होना चाहिए ताकि दूसरा सत्य हो सके।

18.4 सोपाधिक प्रमाण का प्रबलीकृत नियम

सोपाधिक प्रमाण विधि में, निष्कर्ष अपने पूर्ववर्ती पर निर्भर करते हैं। एक अन्य विधि और सोपाधिक प्रमाण और अप्रत्यक्ष प्रमाण है जो सोपाधिक प्रमाण का प्रबलीकृत नियम कहलाती है। इस विधि में, प्रमाण की रचना आवश्यक रुप से निष्कर्ष की पूर्ववर्ती नहीं होती है। इस विधि को समझने के लिए इस की संरचना का कुछ स्पष्टीकरण आवश्यक है। पूर्वानुमान को आरंभ में बनाया जाता है। पूर्वानुमान की सत्यता को जानने की आवश्यकता नहीं होती है, क्योंकि पूर्वानुमान के असत्य होते हुए भी निष्कर्ष सत्य हो सकता है। यही नहीं पूर्वानुमान किसी भी आधार वाक्य या निष्कर्ष का कोई भी घटक हो सकता है। यह विधि इसलिए प्रबलीकृत नियम कहलाती है क्योंकि हमें पूर्वानुमान करने की अधिक स्वंतंत्रता होती है अथवा हम अधिक संख्या में पूर्वानुमान कर सकते हैं। यह हमारे परीक्षण साधनों के पटल को सशक्त बनाता है। इस लिए इस विधि को C.P. का प्रबलीकृत नियम कहते हैं। इस विधि की एक अन्य विशेषता पूर्वानुमान की सीमा है। अंतिम चरण सदैव पूर्वानुमान की सीमाओं से परे होता है। यदि किसी युक्ति में दो या दो से अधिक पूर्वानुमान हों, तो प्रत्येक चरण के लिए एक पृथक अंतिम चरण होगा। इस अंतिम चरण को उस विशेष पूर्वानुमान का निष्कर्ष माना जा सकता है। यह दर्शाता है कि अंतिम चरण को पूर्वानुमान से पिछले चरणों के संयोजन में इस तरीके से निगमित किया गया है कि अनुमान के नियम ऐसे संयोजन की अनुमति दे। निष्कर्ष पर पहुंचने से पहले पूर्वानुमान का कार्य समाप्त हो जाता है। आगे इसकी कोई भूमिका नहीं रह जाती है। तब, स्वतः ही, पूर्वानुमान को मुक्त मान लिया जाता है। जब C.P. के प्रबलीकृत नियम का पूर्वानुमान की पंक्ति के साथ उपयोग किया जाता है, तब C.P. की तरह पूर्वानुमान शब्द का उल्लेख नहीं किया जाता है। यहां मुड़े तीर का सिरा

'पूर्वानुमान' को इंगित करता है। C.P. के प्रबलीकृत नियम में निष्कर्ष सदैव एक सोपाधिक कथन होता है, जिसमें स्वयं क्रमवार ढंग से कथन होते हैं।

इस प्रकार सोपाधिक के उपयोग के विस्तार की सीमा निर्धारित हो जाती है। इसके उपयोग के विस्तार का पता लगाने के लिए थोड़ी भिन्न विधि का उपयोग किया जाता है। पूर्वानुमान क्या किया गया है, उसे दर्शाने के लिए तीर का प्रयोग किया जाता है और उसी तीर की सहायता से उसके विस्तार को भी व्यक्त किया जाता है। C.P. का उपयोग तीरों से घिरे स्थान तक सीमित होता है। सभी चरण, जो इस तीर के बाहर होते हैं, वे भी उपाधि से मुक्त होते हैं। जहां तीर का अग्र सिरा पूर्वानुमान को बनाता है, वहीं उसका अंतिम सिरा पंक्तियों को पृथक करता है। चूंकि निष्कर्ष अपने पूर्ववर्ती पर निर्भर नहीं करता है, अतः उसे सिर्फ पहले आधारवाक्य पर ही निर्भर होना पड़ता है। इस अर्थ में यह एक प्रबलीकृत उपाधि है। इस मामले में C.P. का उल्लेख करने की कोई आवश्यकता नही हैं, क्योंकि तीर पूर्वानुमान की पहचान करने में हमारी सहायता करता है। इस उदाहरण पर विचार करें:

1. (A v B) =>{(C v D) => E} /∴ A=> [(C Λ D) => E]	
2. A	
3. A v B	2, Add.
4. (C v D) => E	1, 3, M.P.
5. (CΛD)	
6. C	5, Simp.
7. C v D	6, Add.
8. E	4, 7, M.P.
9. (C v D) => E	5, 8, C.P.
10. A => [CΛD) => E]	2, 9, C.P.

दाएं हाथ की ओर बताए गए नियम यह स्पष्ट कर देते हैं कि 3 से 9 तक सभी पंक्तियां A पर या तो प्रत्यक्ष रूप से अथवा उन मुड़े हुये तीरों के द्वारा निर्भर करती है। पंक्ति 9 और 10 में प्रतिपत्ति, उन्हें C.P. बना देती है।

C.P. का उसके प्रबलीकृत प्रकार में एक लाभ यह है कि इसका एक विस्तारित अनुप्रयोग है। इसका उपयोग उन मामलों में किया जा सकता है, जहाँ निष्कर्ष सोपाधिक होते हैं लेकिन ऐसे लगते नहीं हैं।

18.5 अवैधता को सिद्ध करना

वैधता के विपरीत, अवैधता किसी नियम से नियंत्रित नहीं होती है। निसंदेह, त्रुटि को नियंत्रित करने वाला कोई नियम नहीं होता है। दूसरी तरफ, सिर्फ नियम का अतिक्रमण किसी युक्ति को अवैध बना देता है। अतः अवैधता को सिद्ध करने का तरीका भिन्न है। अनुमान का नियम कहता है कि सत्य आधारवाक्य और असत्य निष्कर्ष मिलकर युक्ति को अवैध बनाते हैं। इसलिए अवैधता का निर्धारण करने के लिए हमें सत्यामानों का निर्धारण इस प्रकार करना चाहिए कि आधार वाक्य सत्य होते हुए भी निष्कर्ष असत्य हो जाए। यदि हम ऐसा करने में सफल हो जाते हैं तो युक्ति अवैध सिद्ध हो जाती है। यह विधि इतनी सरल है कि सत्यापन मात्र एक पंक्ति में पूरा हो सकता है, जैसा कि सत्यता–सारणी के मामले में होता है। आइए हम कुछ उदाहरणों को देखते हैं।

1. E=> (F v G)

2. G => (H Λ I)

3. ⌐ H /∴E => I

1	1	0	0	0	1
E	F	G	H	I	⌐H

इस विधि को अपनाते समय निष्कर्ष में '0' को निर्धारित करना चाहिए, जिससे आधारवाक्य सत्य हो जाएं। यदि यह संयोजन प्राप्त नहीं किया जा सकता हो, तो युक्ति तर्कसंगत है अर्थात् निष्कर्ष को 0 बना देने के बाद भी यदि आधारवाक्यों को सत्य न बनाया जा सके, तो युक्ति वैध होती है। सत्यापन करने के लिए निष्कर्ष के घटकों और आधारवाक्यों के घटकों को ठीक से युग्मित करना चाहिए। चलिए, एक उदाहरण को देखते हैं;

1. J => (K => L)

2. K=> (⌐ L=> M)

3. (L v M) => N /∴ J => N

1	0	1	0	0	0
J	K	L	⌐L	M	N

यहां निष्कर्ष '0' है जबकि आधारवाक्यों का संयोजन 1 है। अतः युक्ति वैध है।

18.6 अभ्यास

I यहां कुछ तर्क दिए गए हैं, जिनका सत्यापन C.P. विधि से किया गया है।

1.

1. P Λ (Q => R)	/∴ (P => Q) => (P => R)		
2. P => Q	/∴ P => R		C.P.
3. P	/∴ R		C.P.
4. (P=> Q) => R		1,	Exp.
5. ∴R		4, 2,	M.P.

2.

1. P => (Q => R) /∴ Q => (P => R)		
2. Q	/∴ P => R	C.P.
3. P	/∴ R	C.P.
4. Q => R	1, 3,	M.P.
5. ∴ R	4, 2,	M.P.

3.

1. A=> B	/ ∴ (B => C) => (A => C)		
2. B => C	/∴ A => C		C.P.
3. A	/∴ C		C.P.
4. B		1, 3,	M.P.
5. ∴ C	2, 4,		M.P.

4.

1. (A => B) Λ (A => C)	/∴ A => (B v C)	
2. A	/∴ B v C	C.P.

3. A=> B	1,	Simp.
4. B	3, 2,	M.P.
5. A=> C	1,	Simp.
6. C	5, 2,	M.P.
7. ∴ B v C	4,	Add.

5.

1. (A=> B) Λ (A=> C)	/A=> (BΛC)	
2. A	/∴ B Λ C	C.P.
3. A => B	1,	Simp.
4. B	3, 2,	M.P.
5. A => C	1,	Simp.
6. C	5, 2,	M.P.
7. ∴B Λ C	4, 6,	Conj.

6.

1. (A => B)	/∴ (AΛC) => (BΛC)	
2. A Λ C	/∴ B Λ C	C.P.
3. A	2,	Simp.
4. B	1, 3,	M.P.
5. C	2,	Simp.
6. ∴ B Λ C	4, 5,	Conj.

7.

1. B => C	/∴ (A v B) => (C v A)	
2. A v B	/∴ C v A	C.P.
3. ⌐ A=> B	2,	Impl.
4. ⌐ A=> C	3, 1,	H.S.

5. A v C 4, Impl.

6. ∴ C v A 5, Com.

8.

1. (A v B) => C /∴ [(C v D => E] => (A => E)

2. (C v D) => E /∴ A => E C.P.

3. A /∴ E C.P.

4. A v B 3, Add.

5. C 1, 4, M.P.

6. C v D 5, Add.

7. ∴ E 2, 6, M.P.

II यहां कुछ ऐसे तर्क दिए जा रहे हैं, जिन्हें अप्रत्यक्ष विधि से सिद्ध किया जा सकता है:

1.

1. Av (B ΛC)

2. A => C /∴ C

3. ⌐ C I.P.

4. ⌐A 2, 3, M.T.

5. B Λ C 1, 4, D.S.

6. C 5, Simp.

7. C Λ ⌐ C 6, 3, Conj.

7वें चरण में व्याघात प्रदर्शित होता है, इसलिए ⌐ C असत्य है जिसका अर्थ है कि C सत्य है।

2.

1. (D v E) => (F => G)

2. (⌐ G v H) => (DΛF) /∴ G

3. ⌐ G		I.P.
4. ⌐ G v H	3,	Add.
5. D Λ F	2, 4,	M.P.
6. D	5,	Simp.
7. D v E	6,	Add.
8. F=> G	1, 7,	M.P.
9. ⌐ F	8, 3,	M.T.
10.F	5,	Simp.
11. F Λ ⌐ F	10, 9,	Conj.

11 वां चरण व्याघात है। इसलिए ⌐G असत्य है अर्थात् G सत्य है।

3.

1. (H => I)Λ(J => K)

2. (I v K) => L

3. ⌐ L /∴ ⌐ (H v J)

4. H v J		I.P.
5. I v K	1, 4,	C.D.
6. L	2, 5,	M.P.
7. L Λ ⌐ L	6, 3,	Conj.

7वें चरण में व्याघात शामिल है। इसलिए HvJ असत्य है जिसका अर्थ है ⌐(HvJ) सत्य है।

4.

1. (M v N) => (OΛP)

2. (O v Q) => (⌐ R Λ S)

3. (R v T) => (M Λ N)	/∴ ⌐ R	
4. R		I.P.
5. R v T	4,	Add.
6. M Λ N	3, 5,	M.P.
7. O Λ P	1, 6,	M.P.
8. O	7,	Simp.
9. O v Q	8,	Add.
10. (⌐ R Λ S)	2, 9,	M.P.
11. ⌐ R	10,	Simp.
12. R Λ ⌐ R	4, 11,	Conj.

12वें चरण में व्याघात शामिल है इसलिए R असत्य है; जिसका अर्थ है ⌐ R सत्य है।

5.

1. (V => ⌐ W) Λ (X =>Y)		
2. (⌐W => Z) Λ (Y => ⌐ A)		
3. (Z=> ⌐ B) Λ (⌐ A=> C)		
4. V Λ X	/ ∴ ⌐ B Λ C	
5. ⌐ (⌐ B Λ C)		I.P.
6. B v ⌐ C	5,	De.M.
7. ⌐ Z v A	3, 6,	D.D.
8. W v ⌐ Y	2, 7,	D.D.
9. ⌐V v ⌐X	1, 8,	D.D.
10. (V Λ X) Λ (⌐ V v ⌐ X)	4, 9,	Conj.

हम इन युक्तियों की वैधता को औपचारिक प्रमाण से भी सिद्ध कर सकते हैं। उदाहरण के लिए तीसरी युक्ति पर विचार करें;

6.

1. (H => I) Λ (J => K)

2. (I v K) => L

3. ⌐L / ∴ ⌐ (H Λ J)

4. ⌐I Λ ⌐ K 2, 3, M.T.

5. ⌐ I 4, Simp.

6. ⌐ I v ⌐ K 5, Add.

7. ⌐ H v ⌐ J 1, 7, D.D.

8. ∴ ⌐ (H Λ J) 8, De.M.

जब तीसरी युक्ति I.P. को विधि से हल किया गया, तो इसमें 7वां चरण शामिल था, जबकि औपचारिक प्रमाण के लिए 9 चरणों की आवश्यकता होती है। इसलिए पहले वाला छोटा और अधिक पसंद किया जाता है।

अब पांचवी युक्ति पर विचार करें;

7.

1. (V => ⌐ W) Λ (X =>Y)

2. (⌐W => Z) Λ (Y => ⌐A)

3. (Z => ⌐ B) Λ (⌐A => C)

4. V Λ X /∴ ⌐ B Λ C

5. V=> ⌐ W 1, Simp.

6. V 4, Simp.

7. ⌐ W 5, 6, M.P.

8. X => Y 1, Simp.

9. X 4, Simp.

10. Y 8, 9, M.P.

11. ⌐ W => Z 2, Simp.

12. Z	11, 7,	M.P.
13. $Y \Rightarrow \neg A$	2,	Simp.
14. $\neg A$	13, 10,	M.P.
15. $Z \Rightarrow \neg B$	3,	Simp.
16. $\neg B$	15, 12,	M.P.
17. $\neg A \Rightarrow C$	3,	Simp.
18. C	17, 14,	M.P.
19. $\therefore \neg B \wedge C$	16, 18,	Conj.

जब पांचवी युक्ति I.P. विधि से हल की गयी थी, तो इसमें 10 चरण थे, जबकि औपचारिक प्रमाण के लिए 19 चरण आवश्यक हैं, इसलिए पहले वाला छोटा और अधिक पसंद किया जाता है।

III असंगति प्रदर्शन (अप्रत्यक्ष प्रमाण) की विधि का उपयोग करते हुए निम्नलिखित पुनरुक्तियां सिद्ध होती हैं।

1.

1. $(A \Rightarrow B) \vee (\neg A \Rightarrow B)$		
2. $\neg \{(A \Rightarrow B) \vee (\neg A \Rightarrow B)\}$	1,	I. P.
3. $\neg (A \Rightarrow B) \wedge \neg (\neg A \Rightarrow B)$	2,	De. M.
4. $\neg (A \Rightarrow B)$	3,	Sim.
5. $A \wedge \neg B$	4,	De. M.
6. $\neg (\neg A \Rightarrow B)$	2,	Simp.
7. $\neg (A \vee B)$	6,	Impl.
8. A	5,	Simp.
9. $\neg A \wedge \neg B$	7,	De. M.
10. $\neg A$	9,	Simpl.
11. $A \wedge \neg A$	8, 10,	Conj.

ग्यारहवें चरण में व्याघात शामिल है जिसका अर्थ है कि दूसरे चरण अर्थात पूर्वानुमान में त्रुटि हैं। इसलिए दी गई अभिव्यक्ति पुनरुक्ति है।

2.

1. $(A \Rightarrow B) \vee (B \Rightarrow A)$		
2. $\neg \{(A \Rightarrow B) \vee (B \Rightarrow A)\}$	1,	I. P.
3. $\neg (A \Rightarrow B) \wedge \neg (B \Rightarrow A)$	2,	De. M.
4. $\neg (A \Rightarrow B)$	3,	Simp.
5. $\neg(\neg A \vee B)$	4,	Impl.
6. $\neg (B \Rightarrow A)$	3,	Simp.
7. $\neg(\neg B \vee A)$	6,	Impl.
8. $A \wedge \neg B$	5,	De.M.
9. A	8,	Simp.
10. $B \wedge \neg A$	7,	De.M.
11. $\neg A$	10,	Simp.
12. $A \wedge \neg A$	9,11,	Cong.

इस युक्ति के लिये भी व्याख्या वैसी ही है जैसी पिछली के लिये की गई है।

3.

1. $(A \Rightarrow B) \vee (B \Rightarrow C)$		
2. $\neg \{(A \Rightarrow B) \vee (B \Rightarrow C)\}$	1,	I. P.
3. $\neg (A \Rightarrow B) \wedge \neg (B \Rightarrow C)$	2,	De. M.
4. $\neg (\neg A \vee B) \wedge \neg (\neg B \vee C)$	3,	Impl.
5. $(A \wedge \neg B) \wedge (B \wedge \neg C)$	4,	De.M.
6. $A \wedge \neg B$	5,	Simp.

7. $\neg$ B	6,	Simp.
8. B $\wedge \neg$ C	5,	Simp.
9. B	8,	Simp.
10. B $\wedge \neg$ B	9,7,	Conj.

चूंकि दसवें चरण में विरोधाभास शामिल है। अतः दूसरे चरण में त्रुटि है। इसलिए हमारा पूर्वानुमान गलत है जिसका अर्थ है कि पहला चरण पुनरुक्ति है।

4.

1. A v (A => B)		
2. $\neg$ {A v (A => B)}	1,	I. P.
3. $\neg$ A $\wedge \neg$ (A => B)	2,	De. M.
4. $\neg$ A $\wedge \neg$ ($\neg$ A v B)	3,	Impl.
5. $\neg$ A $\wedge$ (A $\wedge \neg$ B)	4,	De. M.
6. ($\neg$ A $\wedge$ A) $\wedge \neg$ B	5,	Ass.
7. $\neg$ A $\wedge$ A	6,	Simp

इस युक्ति में अंतिम चरण में व्याघात है। अतः पूर्वानुमान असत्य है। इसलिए 1 पुनरुक्ति है।

5.

1. P $\equiv \neg \neg$ P		
2. $\neg$ (P $\equiv \neg \neg$ P)	1,	I. P.
3. $\neg$ {(P => $\neg \neg$ P) $\wedge$ ($\neg \neg$ P => P)}	2,	Equiv.
4. $\neg$ {(P => P) $\wedge$ (P => P) }	3,	D.N.
5. $\neg$ {($\neg$ P v P) v ($\neg$ P v P)}	4,	Impl.
6. (P$\wedge \neg$ P) $\wedge$ (P$\wedge \neg$ P)	5,	De.M.

इस युक्ति में अंतिम चरण में व्याघात है, इसलिए पूर्वानुमान असत्य है। अतः 1 पुनरुक्ति है।

6.

1. $\neg \{(A \Rightarrow \neg A) \wedge (\neg A \Rightarrow A)\}$		
2. $\neg [\neg \{(A \Rightarrow \neg A) \wedge (\neg A \Rightarrow A)\}]$	1,	I. P.
3. $\{(A \Rightarrow \neg A) \wedge (\neg A \Rightarrow A)\}$	2,	D. N.
4. $(\neg A \vee \neg A) \wedge (A \vee A)$	3,	Impl.
5. $\neg A \vee \neg A \equiv \neg A$		By Taut.
6. $A \vee A \equiv A$		By Taut.
7. $A \wedge \neg A$	6,5,	Conj.

इस युक्ति के अंतिम चरण में व्याघात है। इसलिए पूर्वानुमान असत्य है। अतः यह पुनरुक्ति है।

7. The next argument is very different.

1. $\neg \{(A \Rightarrow \neg A) \vee (\neg A \Rightarrow A)\}$		
2. $(A \Rightarrow \neg A) \vee (\neg A \Rightarrow A)$	1,	I. P.
3. $(\neg A \vee \neg A) \vee (A \vee A)$	2,	Impl.
4. $\neg A \vee A$		By Taut.

यह नोट करना महत्वपूर्ण है कि चौथा व्याघात नहीं है। बल्कि यह स्वयं पुनरुक्ति है। इसका अर्थ है कि पंक्ति संख्या 1 स्वयं व्याघात है।

IV सत्यता सारणी तकनीक और असंगति प्रदर्शन एक संयुक्त उद्यम :

हम किसी युक्ति की वैधता को असंगति प्रदर्शन की विधि के द्वारा सारणी तकनीक से समाकलित करके भी सिद्ध कर सकते हैं। हमें इन दोनों के संयोजन का उपयोग करने से पहले कुछ पूर्वानुमान करने पड़ते हैं। ये पूर्वानुमान निम्न हैं:

1. सभी आधार वाक्य अनिवार्य रूप से सत्य होने चाहिए; उस अवस्था में जब सभी आधारवाक्य अनिवार्य रुप से सत्य हो तथा आधार वाक्य सत्य–फलन रुप से संयुक्त प्रकार के हों: तब घटकों के सत्य मूल्य ऐसे होने चाहिए जिससे कि संयुक्त तर्कवाक्य अनिवार्य रुप से सत्य हो।

2. निष्कर्ष को अनिवार्य रूप से असत्य मान कर आगे बढ़ना चाहिए; उस अवस्था में जब निष्कर्ष अनिवार्य रूप से असत्य हो तथा निष्कर्ष सत्य फलन रूप से संयुक्त हो, तब घटकों के सत्यता मूल्य ऐसे होने चाहिए कि निष्कर्ष अनिवार्य रूप से असत्य हो।

3. इन पूर्वानुमानों के अनुसार सत्यता मूल्यों को निर्धारित करते समय, यदि हम पाते हैं कि किसी घटक का मूल्य 1 और 0 दोनों है, तो इसका अर्थ है कि यह व्याघात उत्पन्न करता है। इसलिए, यह पूर्वानुमान कि युक्ति अवैध है, असत्य है। अतः इसे वैध होना चाहिए। महत्वपूर्ण यह है कि जब घटक का कोई सत्यता मूल्य निर्धारित कर दिया जाता है, तो वह पूरी युक्ति में उस घटक का स्थायी मूल्य हो जाता है। आइए हम इस युक्ति पर विचार करते हैं।

1.

1. P1(A => B) => (C Λ⌐ D)

2. P2 (D => E) => F / ∴ ⌐ A => F

हम मान लें कि (⌐ A => F) = 0
अर्थात् यह सही नहीं है कि (⌐ A => F) यह तभी संभव है जब ⌐ A=1 और F=0.

3. P2 में रखें F= 0

4. P2=1 (सत्य) सिर्फ और सिर्फ तभी हो सकता है जब कि

(D => E) => F

0 1 0

5. (D => E) = 0 if (D => E)

1 0 0

6. ⌐ D = 0 ∵ D = 1

7. (C Λ⌐ D) = 0 ∵ ⌐ D = 0, चूंकि नियम है कि यदि कोई भी एक संयोजन असत्य है, तो पूरा संयोजन असत्य हो जाता है।

8. अब यदि (CΛ⌐ D)=0 अनुवर्ती) तो, P1 का मूल्य 1 तभी हो सकता है, यदि और सिर्फ यदि पूर्ववर्ती (A => B)=0 हो अर्थात् अनुवर्ती असत्य है तो प्रतिपत्ति सत्य होती है।

9. A = 0 ∵ ⌐ A = 1 (व्याघात के नियम के अनुसार, जब A= 0, ⌐ A=1)

10. $A => B$ का मूल्य अनिवार्य रुप से 1 है भले ही B का सत्यता मूल्य कुछ भी हो क्योंकि $A = 0$

11. 8 और 10 व्याघातक हैं।

12. (1) असत्य है अर्थात् $\neg(\neg A => F) = 0$

13. $\therefore \neg A => F$

जब P1, P2 और निष्कर्ष उचित रुप से जुड़े रहते हैं, तो यह पुनरुक्ति बन जाती है। ऐसी अभिव्यक्ति प्राप्त करने के लिए प्रतिपत्ति को निष्कर्ष को आधारवाक्य से जोडना चाहिए जो स्वयं संयोजन से जुड़े रहते हैं।

चूंकि असंगति प्रदर्शन की विधि की मांग है कि निष्कर्ष दी गई युक्ति के वैध होने पर असत्य माना जाना चाहिए। अतः संयुक्त तर्कवाक्य की सत्यता स्थितियों को ईमानदारी से अपनाना चाहिए। इसलिए यदि निष्कर्ष वियोजक हो तो वियोजन के दोनों घटकों का मूल्य 0 होना चाहिए। दूसरी तरफ, यदि दिया गया निष्कर्ष संयोजन है, तो सिर्फ एक घटक का मूल्य 0 होना ही पर्याप्त होता है। तीसरे, यदि निष्कर्ष संयोजन का निशेध हो. तब संयोजक की स्वयं सत्यता मूल्य 1 होनी चाहिए। जिसका अर्थ है कि निष्कर्ष के संघटकों की सत्यता मूल्य 1 ही होनी चाहिए।

आइए हम ऐसे तर्क पर विचार करते हैं, जिसमें निष्कर्ष संयोजन है।

2

P1 $(B \vee \neg A) => (\neg C \wedge D)$

P2 $(D \vee E) => \neg F \,/\, \therefore (A \wedge \neg F)$

1. मान लीजिए कि $(A \wedge \neg F) = 0$

2. ऐसे तीन उद्धरणों में से जिनमें संयोजन असत्य है, हम एक पर विचार करते हैं। निहित सिद्धांत यह है कि यदि हमारे अभिकलन से स्तत: खंडन होता है, तो शेष दो उद्धरणों पर विचार किए बिना हम निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि 1 असत्य है।

3. निष्कर्ष असत्य होता है जब $A = 0$ और $\neg F = 0$

4. P2 सत्य है, यदि और सिर्फ यदि $D \vee E$ असत्य है।

5. $D \vee E = 0$ यदि और सिर्फ यदि $D = 0$ और $E = 0$

6. यदि $D = 0$ तब $(\neg C \wedge D) = 0$ भले ही $\neg C$ सत्यता मूल्य कुछ भी हो।

7. P1 सत्य है, यदि और सिर्फ यदि $(B \vee \neg A) = 0$ (6 से)

8. $\therefore \neg A = 0$ (7 से)

9. 3 और 8 व्याघात के नियम का उल्लघंन करते हैं, क्योंकि A और $\neg A$ एक साथ असत्य नहीं हो सकते हैं।

10. $\therefore A \wedge \neg F$

यद्यपि, यदि हम दूसरे उद्धरण पर विचार करें जिसमें $A = 1$ और $\neg F = 0$ हैं, तो हमें भिन्न परिणाम प्राप्त होता है।

1. $A = 1$ और $\neg F = 0$

2. $P2 = 1$ यदि और सिर्फ यदि $D \vee E = 0$

3. $D \vee E = 0$ यदि और सिर्फ यदि $D = 0$ and $E = 0$

4. If $D = 0$ है, तब $(\neg C \wedge D) = 0$ भले ही $\neg C$ का सत्यता मूल्य कुछ भी हो।

5. $P1 = 1$ यदि और सिर्फ यदि $(B \vee \neg A) = 0$ (from 4)

6. अब $\neg A$ को 0 अवश्य होना चाहिए।

7. $A = 1$ यदि $\neg A = 0$

8. 7 और 1 संगत है $\because$ जब $A =1$, तो $\neg A$ को 0 होना ही चाहिए।

9. $\therefore$ A और $\neg F = 0$

चूंकि एक उद्धरण में पूर्वानुमान गलत है और दूसरे में सही है। यह युक्ति न तो पुनरुक्ति है और न ही व्याघातक है। जब कम से कम एक उद्धरण में युक्ति सत्य और कम से कम एक उद्धरण में असत्य हो तो इस प्रकार की युक्ति आपातिक कहलाती है। इस निष्कर्ष पर पहुंचने के लिए हमें तीसरी परिस्थिति के परिणाम पर विचार करने की आवश्यकता नहीं होती है। इसलिए, यह अवैध है और इस प्रकार की युक्ति के स्तर की पुष्टि करने के लिए कम से कम दो उद्धरणों की

आवश्यकता होती हैं। (विद्यार्थियों को सलाह दी जाती है कि वे तीसरे उद्धरण, जिसमें निष्कर्ष को असत्य माना जाता है, पर विचार करते हुए समस्या को हल करें)

यह स्पष्ट है कि असंगति प्रदर्शन की विधि को जब संयोजक वाले निष्कर्ष के लिए लागू किया जाता है तो पुष्टि की रचना लंबी हो जाती है, इसलिए इसे युक्ति–सिद्धि में अंतिम विकल्प के रूप से स्वीकार किया जाता है। दूसरे, यह विधि इस बात को सिद्ध करती है कि सत्यता सारणी विधि मूल विधि है, क्योंकि यह आसानी से दिखाया जा सकता है कि अंततः कोई भी विधि सीधे सत्यता सारणी विधि से ही सहायता लेती है। ध्यान रहे कि निष्कर्ष और प्रतिस्थापन के नियमों की प्रामाणिकता सत्यता सारणी विधि से ही सिद्ध होती है।

C.D. के नियम पर विचार करें; जो इस प्रकार है **{(p => q) Λ (r => s) Λ (p v r)} => (q v s)**

यह दिखाने के लिए कि यह पुनरुक्ति है, हम सत्यता सारणी बनाएंगें।

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
SL NO.	**p**	**q**	**r**	**s**	**{(p => q)**	Λ	(r => s)	Λ	(p v r)}	=>	(q v s)
1.	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
2.	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**
3.	**1**	**1**	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**
4.	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**
5.	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
6.	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
7.	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**

8.	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**
9.	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**
10.	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**
11.	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**
12.	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
13.	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**
14.	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**
15.	**1**	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
16.	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**

सत्यता सारणी विधि में प्रतिपत्ति, जो अग्रवर्ती घटक के पहले आती है, मुख्य कॉलम कहलाती है। इस सारणी में 11 वां कॉलम मुख्य कॉलम है। हम देखते हैं कि इस कॉलम में, सभी 16 उदाहरणों में सत्यता मूल्य 1 है। इसलिए यह नियम पुनरुक्ति है।

असंगति प्रदर्शन विधि एक दूसरे मुख्य बिंदु को अधिक स्पष्ट करती है। यदि कोई युक्ति पुनरुक्ति है, तो यह तार्किक रूप से असंभव है कि सत्यता मूल्यों को इस तरीके से (स्वतः व्याघातक के बिना) निर्धारित किया जा सके कि आधारवाक्यों के संयोजन का मूल्य 1 हो और निष्कर्ष का ० हो। यह दर्शाता है कि सत्यता मूल्यों, जो युक्ति की रचना करते हैं, को कथनों के घटकों के लिए यादृच्छिक तरीके से नहीं निर्धारित किया जा सकता है।

बोध प्रश्न 1

टिप्पणी: क) अपने उत्तर के लिए नीचे दिए गए रिक्त स्थान का उपयोग कीजिए।

ख) इकाई के अंत में दिए गए उत्तरों से अपने उत्तरों का मिलान कीजिए।

1. अप्रत्यक्ष प्रमाण के क्या लाभ हैं? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए।

....

....

....

....

....

2. सोपाधिक प्रमाण के नियम और प्रबलीकृत नियम के बीच अंतर को संक्षेप में समझाएं।

....

....

....

....

....

3. असंगति प्रदर्शन (Reduction ad absurdum) से सत्यता सारणी विधि के संयोजन की क्या विशेषता है?

....

....

....

....

....

18.7 सारांश

जब निष्कर्ष सोपाधिक होता है, तो औपचारिक विधि सहायक नहीं होती है। सोपाधिक कथन तीन प्रकार के होते हैं। C.P. के नियम दो प्रकार के होते हैं। अप्रत्यक्ष प्रमाण गणित में नया नहीं है। यहां हम विपरीत दिशा में तर्क करते हैं। प्रबलीकृत नियम निष्कर्ष को पूर्वानुमान से पुनरुक्ति बना देते हैं।

18.8 कुंजी शब्द

पुनरुक्ति : यह एक तार्किक रूप से संयुक्त कथनों की ऐसी श्रृंखला है, जो सभी उद्धरणों में सत्य होती है।

व्याघात : यह तर्कवाक्यों का एक ऐसा रूप है जो सभी उद्धरणों में असत्य होता है, अथवा जिसके सत्यता सारणी में प्रतिस्थापित सभी उद्धरण असत्य होते हैं।

आपातिक : आपातिक कथन की सत्यता सारणी में दोनों प्रकार के, सत्य व असत्य, प्रतिस्थापित उद्धरण होते हैं।

18.9 अन्य सहायक अध्ययन—सामग्री एवं सन्दर्भ

एलैक्जेन्डर, पी., एन इन्ट्रोडक्शन टु लॉजिक एंड द क्रिटिसिस्म ऑफ आर्गुमेन्ट्स, लंदन, अनविन युनिवर्सिटी, 1969.

बैसन, ए.एच. एवं ओ कोनोर, डी.जे., इन्ट्रोडक्शन टु सिम्बोलिक लॉजिक, कलकत्ता, ऑक्सफोर्ड युनिवर्सिटी प्रैस, 1976.

कोपी, आई.एम., इन्ट्रोडक्शन टु लॉजिक, न्यू दिल्ली, प्रेन्टिस हॉल इंडिया, नाइन्थ ऐडिसन, 1995.

जोसेफ, एच.डब्लू.बी., एन इन्ट्रोडक्शन टु लॉजिक, ऑक्सफोर्ड, 1906.

लुइस, सी.आई. एवं लॉगफोर्ड, सी.एच., सिम्बोलिक लॉजिक, न्यूयोर्क, डोवर पब्लिकेशन, 1959.

18.10 बोध प्रश्नों के उत्तर

बोध प्रश्न 1

1. जब तर्कवाक्यों की संख्या अधिक होती है तो प्रमाण की औपचारिक विधि अनुपयोगी हो जाती है। ऐसी स्थिति में I.P. छोटा रास्ता प्रदान करती है, जिसमें कभी—कभी एक पंक्ति में ही प्रमाण प्राप्त हो जाता है।

2. जब C.P. के नियम को अपनाया जाता है, तो सदैव निष्कर्ष के पूर्ववर्ती को कल्पित किया जाता है। जबकि, जब C.P. के प्रबलीकृत नियम का उपयोग किया जाता है, तो यह प्रतिबंध हट हो जाता है। दूसरे, जब निष्कर्ष के पूर्ववर्ती को कल्पित किया जाता है तो सदैव उसे दांयी ओर उसके साथ में C.P. लिखकर सिद्ध किया जाता है। दूसरी ओर, प्रबलीकृत नियम में मुड़े

तीर का उपयोग किया जाता है, जिसका विस्तारित भाग पूर्वानुमान की सीमाओं को इंगित करता है। तीर C.P. लिखने का विकल्प है।

3. जब सत्यता सारणी विधि का उपयोग किया जाता है, तो हम आधारवाक्यों से निष्कर्ष की ओर बढ़ते हैं। यद्यपि, जब यह युक्ति की वैद्यता सिद्ध करने के लिये I.P. के साथ जुड़ा होता है, तो निष्कर्ष को '0' मूल्य दिया जाता है और हम यह दिखाने के लिए आगे बढ़ते हैं कि यह स्वतः व्याघात करता है।

इकाई 19 परिमाणन[20]

रूपरेखा

19.0 उद्देश्य

इस इकाई में हम आपको निम्न से परिचित कराएंगे।

- युक्तियों की वैधता का सत्यापन करने वाले नियमों के ऐसे नए सेट से, जिसमें सामान्य और एकल तर्कवाक्य दोनों होते हैं,

---

[20] प्रो. एम आर नन्दन, गो. का. फॉर वुमेन, मांडया।
अनुवाद–डॉ. कुमकुम चतुर्वेदी, मेरठ।

- युक्तियों की वैधता का सत्यापन करने में प्रयुक्त सभी नियमों से,
- प्रतीकात्मक तर्कशास्त्र की पृष्ठभूमि में अरस्तू के न्याय वाक्य के सिद्धान्त को समझने से और;
- इस नए वर्ग के नियमों को लागू करना सीखने से।

19.1 परिचय

व्यापक रूप से दो प्रकार की युक्तियां होती हैं युक्ति जिनमें ऐसे कथन होतें है जो सत्य फलनी और संयुक्त होते हैं और युक्ति जो न तो सत्य फलनी और न ही संयुक्त होती है। यह इकाई दूसरे प्रकार की युक्तियों पर प्रकाश डालती है। तर्कशास्त्र, जो इस विषय से संबंध रखता है, उसे विधेय तर्कशास्त्र या परिमाणन तर्कशास्त्र कहते हैं। यह निगमनात्मक तर्कशास्त्र की ऐसी पद्धति है, जो पदों के विश्लेशण के साथ–साथ कथनों के विश्लेशण को भी, परिमाणन की तार्किक विशेषताओं का उपयोग करके, सम्मिलित करता है। सामान्यतः इस प्रकार की युक्ति में दो प्रकार के कथन होते हैं, जो सामान्य और एकल कहलाते हैं। पांरपिक तर्कशास्त्र द्वारा स्वीकृत सभी तर्कवाक्य इन दोनों श्रेणियों में आते हैं। सर्वव्यापी और अंशव्यापी तर्कवाक्य दोनों सामान्य कहलाते हैं, क्योंकि इन दोनों प्रकारों में कर्ता सामान्य पद है जैसे मनुष्य, घोड़ा, पौधा आदि। जबकि, एकल तर्कवाक्य में, कर्ता निश्चित व्यक्ति के संदर्भ में होता है। यह वैयक्तिक कर्ता मनुष्य जैसे तेंदुलकर अथवा कोई वस्तु जैसे सूर्य से सबसे दूर स्थित ग्रह हो सकता है। सत्य–फलनी कथनों और सामान्य या एकल तर्कवाक्यों के बीच मुख्य अन्तर यह है कि अब तक बताई गई कोई भी तकनीक, यदि युक्ति में सामान्य या एकल कथन हों तो हमारे लिये उपयोगी सिद्ध नहीं होती है। चूंकि इस प्रकार के कथनों में परिमाणिक उक्तियां होती हैं, इसलिए परिमाणन एक अन्य तकनीक है, जिसका उपयोग हमारे इस लक्ष्य में किया जाता है।

पारंपरिक तर्कशास्त्र अथवा निरपेक्ष तर्कवाक्यों का विश्लेशण परिमाणक तर्कशास्त्र के लिए आरंभिक बिदु है। तर्कवाक्य की मात्रा और उद्देश्य विधेय संबन्ध आधार बनाते हैं। जहां तर्कवाक्य का उद्देश्य रूप किसी व्यक्ति के लिए होता है, वहीं विधेय उन गुणों के लिए होता है जो व्यक्ति में हो सकते या नहीं भी हो सकते हैं। इन व्यक्तियो और गुणों को क्रमशः अंग्रजी के छोटे अक्षरों और बड़े अक्षरों से प्रदर्शित किया जाता है। छोटे अक्षरों के साथ एक प्रतिबंध है। व्यक्तियों को प्रदर्शित करने के लिए सिर्फ 'a' से 'w' तक के अक्षरों का ही उपयोग किया जाता है। ये वैयक्तिक अचर है। सामान्यतः अभ्यास में पद के पहले अक्षर से व्यक्ति को प्रदर्शित करते हैं। इसलिए तेंदुलकर, धोनी आदि शब्द को t, d, आदि के रूप में प्रदर्शित किया जाता है। जबकि उनके गुणों जैसे क्रिकेटर, तैराक, राजनेता आदि को C, S, P, आदि से प्रदर्शित किया जाता है। यद्यपि, जब 'राजनेता प्रतिज्ञप्ति अथवा तर्कवाक्य का उद्देश्य बन जाता है, तो इसे 'p' से प्रदर्शित करते हैं। तर्कशास्त्र में, जातिवाचक संज्ञा उद्देश्य अथवा विधेय हो सकती है। तेंदुलकर

एक क्रिकेटर है गुण के रूप में जातिवाचक संज्ञा को उपयोग किए जाने का एक उदाहरण है। प्रतीकात्मक रूप से यह 'Cr' हो जाता है। यह अब प्रतीकित कथन है। हम पहले गुण के प्रतीक चिन्ह को लिखते हैं। उसके बाद उद्देश्य का प्रतीक चिन्ह लिखते हैं। ऐसे कथन सत्य या असत्य हो सकते हैं। जब 'x' का उपयोग वैयक्तिक अचर के लिये किया जाता है तो तर्कवाक्य, तर्कवाक्य–फलन बन जाता है जो न तो सत्य और न ही असत्य होता है। 'y' का उपयोग ऐच्छिक रूप से चुने गए व्यक्ति के लिए किया जाता है।

उदाहरण के लिए, 'Bx' का अर्थ है, x बहादुर है तथा यह एक तर्कवाक्य फलन है। तर्कवाक्य–फलन से तर्कवाक्य प्राप्त करने की प्रक्रिया दृष्टांतिकरण' कहलाती है। अतः हम कह सकते हैं कि चन्दन बहादुर है– यह एक तर्कवाक्य है, जिसे हमने तर्कवाक्य–फलन से प्राप्त किया है। अतः, तर्कवाक्य फलन एक या एक से अधिक विशेष चरों वाली अभिव्यक्ति है। यदि इसके सभी विशेष चरों को विशेष नियतांकों (जैसे चन्दन) से प्रतिस्थापित कर दिया जाए तो हमें प्रतीकित कथन प्राप्त होते हैं। अब, यहाँ 'y' प्रतीक का एक विशेष महत्त्व है। यह ऐच्छिक रूप से चुने गए किसी एक व्यक्ति या वस्तु को सूचित करता है। परिमाणन में, निषेध का भी यही प्रतीक है।

19.2 परिमाणन का अर्थ

परिमाणन/प्रमात्रीकरण का एक महत्वपूर्ण पहलू दृष्टातों का प्रतिस्थापन है। प्रतिस्थापन दो तरीकों से किया जाता है। एकल तर्कवाक्य में 'a' से लेकर 'w' तक किसी व्यक्ति के नियतांक का x में विस्थापन किया जा सकता है। यह व्यक्तिक चर कहलाता है। यह प्रक्रिया, जैसाकि हम देख चुके है, दृष्टांतिकरण कहलाती है। दूसरी विधि सामान्यीकरण की है। इस प्रकार की परिमाणन की प्रक्रिया तब होती है, जब दिया गया तर्कवाक्य सामान्य प्रकार का होता है। सामान्य तर्कवाक्य दो प्रकार के होते हैं सर्वव्यापी और अंशव्यापी। अतः हमारे पास इन दोनों को प्रदर्शित करने के लिए दो परिमाणक परिमाणन (Quantifires) होते हैं। परिमाणक वे प्रतीक होते हैं, जो परिमाणक अभिव्यक्तियों, जैसे कि, प्रत्येक व्यक्ति/प्रत्येक वस्तु/सभी या कोई/कुछ भी, को प्रदर्शित करते हैं। इस प्रकार, सामान्य या सत्तात्मक परिमाणक होते हैं। प्रतीक रूप में वे क्रमशः निम्नवत् हैः '(x)' और '(∃x)'.

चूंकि इनमें से प्रत्येक अभिव्यक्ति सकारात्मक या नकारात्मक हो सकती है, अतः हमारे पास चार प्रकार के तर्कवाक्य होते हैं, जिन्हें निम्न तरीके से प्रदर्शित किया जाता हैः

1. सभी भारतीय नश्वर हैं (x) Mx

2. कोई भारतीय नश्वर नहीं है (x) ~ Mx

3. कुछ भारतीय नश्वर हैं $(\exists x)\ Mx$

4. कुछ भारतीय नश्वर नहीं हैं $(\exists x) \neg Mx$

दांए हाथ की तरफ उपयोग किए गए प्रतीकों को कुछ स्पष्टीकरण की आवश्यकता है। प्रतीक (x) अनेक तरीकों से विस्तारित होता है। इसे 'x के सभी मूल्यों के लिए' अथवा किसी 'दिए गए विशेष x के लिए' या महज 'प्रत्येक x के लिए' आदि पढ़ा जा सकता है। यहां, 'x' व्यक्तिक नियतांक 'भारतीय' के लिए और 'M' नश्वर (Mortal) के लिए प्रयुक्त किया गया है। इसलिए $\neg$ M x होगा, 'x नश्वर नहीं है'। प्रतीक $(\exists x)$ इस प्रकार पढ़ा जाएगाः 'कम से कम एक x ऐसा है जो कि .... (x) सर्वव्यापी परिमाणक कहलाता है और $(\exists x)$ अस्तित्वपरक परिमाणक (existential quantifier) कहलाता है। यदि हम x को I (भारतीय) अथवा P (पाकिस्तानी) से प्रतिस्थापित कर दें, तो हमें वह तर्कवाक्य मिलता है, जो सत्य अथवा असत्य हो सकता है।

जिस प्रकार x का उपयोग उद्देश्य को निर्दिष्ट करने के लिये वैयक्तिक चर के रूप में किया जाता है, उसी प्रकार दो ग्रीक अक्षरों, 'Φ' (Phi) और 'Ψ' (Psi) का उपयोग विधेय को प्रदर्शित करने के लिए किया जाता है। इसलिए इन्हें विधेय चर कहा जा सकता है। इन चरों का उपयोग करते हुए A, E, I और O तर्कवाक्यों को निम्न प्रकार से निर्दिष्ट किया जा सकता हैः

1. सभी भारतीय नश्वर हैं (A) $(x)\ \Phi x$

2. कोई भारतीय नश्वर नहीं है (E) $(x) \neg \Phi x$

3. कुछ भारतीय नश्वर हैं (I) $(\exists x)\ \Phi x$

4. कुछ भारतीय नश्वर नहीं हैं (O) $(\exists x) \neg \Phi x$

वर्ग सदस्यता संबन्ध का उपयोग करने पर सामान्य तर्कवाक्यों को निम्न प्रकार से प्रदर्शित किया जाता हैः

1. $(x)\ \Phi x \equiv (x)\{x \in \Phi \Rightarrow x \in \Psi\}$ जहां $\in$ को 'का घटक' पढ़ा जाएगा।

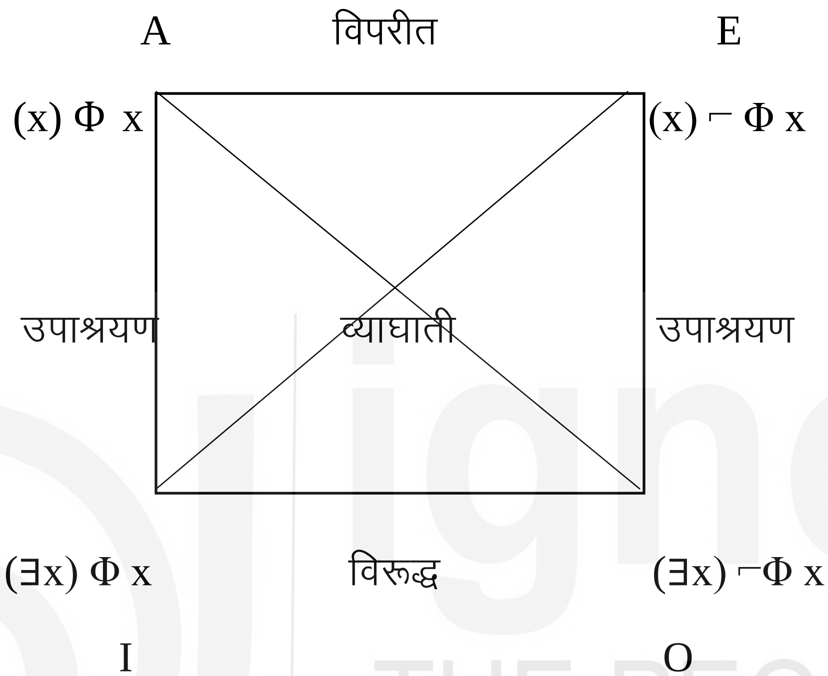
2. $(x) \neg \Phi x \equiv (x)\{x \in \Phi \Rightarrow x \in \Psi\}$ जहां $\in$ को 'का घटक नहीं है' पढ़ा जाएगा।

3. $(\exists x)\ \Phi x \equiv (\exists x)\{x \in \Phi \wedge x \in \Psi\}$

4. $(\exists x) \neg \Phi x \equiv (\exists x)\{x \in \Phi \wedge x \in \Psi\}$

19.3 परिमाणकों वाले तार्किक संबन्ध

हमारे अध्ययन की शुरूआत पांरपरिक वर्ग से होती है, जिसके लिए किसी स्पष्टीकरण की आवश्यकता नहीं है। हम जानते हैं कि परिमाणक द्वारा A, E, I और O को कैसे प्रदर्शित करते हैं। आइए, अब हम A, E, I और O को पारम्परिक वर्ग में इन परिमाणकों द्वारा प्रतिस्थापित करते हैं;



इस पृष्ठभूमि के साथ, हम तार्किक संबन्धों जैसे तुल्यता और खंड़न को निम्न प्रकार से प्रदर्शित कर सकते हैं:

1. तुल्यता:

1) $(x)\ \Phi x \equiv \{\neg (\exists x) \neg \Phi x\}$

2) $(x) \neg \Phi x \equiv \{\neg (\exists x)\ \Phi x\}$

3) $(\exists x)\ \Phi x \equiv \{\neg (x) \neg \Phi x\}$

4) $(\exists x) \neg \Phi x \equiv \{\neg (x)\ \Phi x\}$

2. व्याघात :

1) $(x)\ \Phi x \quad (\exists x) \neg \Phi x$

2) $(x) \neg \Phi x \quad (\exists x)\ \Phi x$

3) $(\exists x)\ \Phi\ x \quad (x) \neg \Phi\ x$

4) $(\exists x) \neg \Phi\ x \quad (x)\ \Phi\ x$

जब हम विधेय चर का उपयोग करते हैं तो तर्कवाक्यात्क प्रकारों को निम्न तरीके से व्यक्त किया जाता हैः

1) $(x)\ \Phi\ x \equiv (x)\{\Phi x \Rightarrow \Psi x\}$

2) $(x) \neg \Phi\ x \equiv (x)\{\Phi\ x \Rightarrow \neg \Psi x\}$

3) $(\exists x)\ \Phi\ x \equiv (\exists x)\{\Phi x\ \Lambda\ \Psi x\}$

4) $(\exists x) \neg \Phi\ x \equiv (\exists x)\{\Phi x\ \Lambda \neg \Psi x\}$

जब हम A, E, I और O को नए सेट से प्रदर्शित करते हैं तो उनकी तुल्य प्रकारें भी परिवर्तित हो जाती हैं।

1) $(x)\{\Phi x \Rightarrow \Psi x\} \equiv \neg(\exists x)\{\Phi x\ \Lambda \neg \Psi x\}$

2) $(x)\{\Phi x \Rightarrow \neg \Psi x\} \equiv \neg(\exists x)\{\Phi x\ \Lambda \Psi x\}$

3) $(\exists x)\{\Phi x\ \Lambda \Psi x\} \equiv \neg\ (x)\{\Phi x \Rightarrow \neg \Psi x\}$

4) $(\exists x)\{\Phi x\ \Lambda \neg \Psi x\} \equiv \neg\ (x)\{\Phi x \Rightarrow \Psi x\}$

यदि दांए हाथ की ओर के परिमाणकों के पीछे के निषेधों को हटा दिया जाये तो स्वतः ही वे कृमिक तर्कवाक्यों के व्याघातक बन जाते हैं।

विधेय जैसे नश्वर को सामान्य विधेय कहते है, क्योंकि तर्कवाक्यात्मक–फलन, जिसका उपयोग किया जाता है, के कुछ सत्य और कुछ असत्य प्रतिस्थापन दृष्टांत होते हैं। चरों के सभी प्रतिस्थापन 'प्रतिस्थापित दृष्टांत कहलाते हैं। जब ऐसे विधेयों का निषेध किया जाता है तो ऐसे सूत्र या कथन प्रकार 'सामान्य रूप सूत्र' कहलाते हैं।

19.4 परिमाणन के नियम

अब और प्रतिस्थापन के नियम के साथ ही चार अन्य नियम भी जुड़ गए हैं। वे नियम हैं; सर्वव्यापी दृष्टांतिकरण (Universal Instantiation (UI)), सर्वव्यापी सामान्यीकरण (Universal Generalization (UG)), अस्तित्वपरक दृष्टांत (Existential Instantiation (EI)), और अस्तित्वपरक सामान्यीकरण (Existential Generalization (EG))। इन नियमों की सहायता से

किसी ऐसी युक्ति में अनुमान के नियमों और प्रतिस्थापन के नियमों का सत्यापन किया जा सकता है, जिसमें सामान्य या एकल प्रतिज्ञप्ति अथवा दोनों होती हैं। इससे पहले कि हम इन नियमों का उपयोग युक्तियों की वैधता का सत्यापन करने के लिए करें, यह आवश्यक है कि हम जाने कि इन नियमों का क्या अर्थ है।

1) सर्वव्यापी दृष्टांतिकरण (UI): इस नियम के अनुसार तर्कवाक्य फलन के किसी प्रतिस्थापन दृष्टांत की वैधता को सर्वव्यापी तर्कवाक्य से निगमित किया जा सकता है। तर्कवाक्य फलन में सदैव चर 'x' होता है। इसलिए कोई उदाहरण जो x के लिए प्रतिस्थापन हो, उसे 'a' से 'w' तक नियत रहना चाहिए। ये अक्षर–उद्देश्य के पारंपरिक अर्थ को प्रदर्शित करते हैं और आधुनिक अर्थ में 'आकारिक दृष्टांत' कहलाते हैं। ऐसे तर्कवाक्य को रुपांतरित करने के लिए 'x' को एक अन्य ग्रीक अक्षर 'ν' *(nu)* से प्रतिस्थापित किया जाता है, जब फलन सर्वव्यापी परिमाणक हो तो 'ν' सर्वव्यापी दृष्टांत बन जाता है।

$\underline{(x)\ \Phi x}$
$\therefore \Phi \nu$ (जहां 'ν' वैयक्तिक प्रतीक है)

2) सर्वव्यापी सामान्यीकरण (UG): यह नियम x के विस्थापन के लिए ऐच्छिक चयन के बाद सामान्यीकरण की ओर बढ़ने में सहायता करता है। UG में 'ऐच्छिक चयन' बहुत महत्वपूर्ण है, क्योंकि, जैसा कि नाम से स्पष्ट है, सामान्यीकरण सदैव विशेष उदाहरण से आगे बढ़ता है और इसमें विकल्प निहित होता है। इस अर्थ में चयन ऐच्छिक होता है। अक्षर 'y' ऐच्छिक विकल्प का प्रतीक है। यह प्रक्रिया सामान्यीकरण कहलाती है, क्योंकि निष्कर्ष सर्वव्यापी तर्कवाक्य होता है। यदि हम न्याय वाक्य के पारंपरिक नियमों को याद करें, सर्वव्यापी निष्कर्ष सर्वव्यापी आधार वाक्य से निकलते हैं। इसलिए यह प्रक्रिया वैयक्तिक से होकर सर्वव्यापी तक होती है। जब 'y' 'x' को प्रतिस्थापित करता है, तो सामान्यीकरण होता है। जब सर्वव्यापी परिमाणक तर्कवाक्य का वर्णन करता है तो यह सम्भव हो जाता है;

$\underline{\Phi\ y}$
$\therefore (x)(\Phi x)$ (जहाँ y किसी एच्छिक रूप से चुने हुए व्यक्ति या वस्तु को निरूपित करता है)

3) अस्तित्वपरक दृष्टांतिकरण (E.I.): यह नियम तब लागू होता है, जब तर्कवाक्य में अस्तित्वपरक परिमाणक होता है और a से w तक किसी भी प्रतीक का उपयोग व्यक्तिगत चर x के प्रतिस्थापक के रुप में होता है। हम अस्तित्वपरक परिमाणन से किसी प्रतिस्थापक दृष्टांत के सत्य का अनुमान लगाते हैं। हालांकि, इस नियम में एक शर्त है। नियतांक जैसे 'a' जिसका उपयोग हम x के प्रतिस्थापन के लिए करते हैं, को इस परिप्रेक्ष्य में पहले कहीं प्रयुक्त नहीं किया गया होना

चाहिए। इसका अर्थ यह भी है कि यदि प्रतिस्थापन का दृष्टांत एक ही हो तो उसी युक्ति में EI का उपयोग दो बार नहीं होना चाहिए।

$\underline{\Phi\, \nu}$

$\therefore (\exists x)\, \Phi x$ (जहां 'v' वैयक्तिक प्रतीक है)

4) अस्तित्वपरक सामान्यीकरण (EG): यह नियम कहता है कि प्रतिज्ञप्तितात्मक फलन के किसी सत्य प्रतिस्थापन दृष्टांत से उस फलन के अस्तित्वपरक परिमाणन को वैध रुप से निगमित किया जा सकता है। दूसरे शब्दों में, कोई वैयक्तिक नियतांक, जो पहले के चरणों में पाया गया है, निष्कर्ष में x से प्रतिस्थापित किया जा सकता है।

$\underline{(\exists x)\, \Phi x}$

$\therefore \Phi\, \nu$ (जहां ν से अन्य ऐसा व्यक्तिक नियतांक है, जो इस परिप्रेक्ष्य में पहले उपयोग में नहीं आया)

अब यह जानना आवश्यक है कि EI के उपयोग सीमित क्यों होते हैं। मान लीजिए कि 'a' एक नियतांक है, जिसका निश्चित अस्तित्व है एवं यह अज्ञात है कि कोई अन्य नियतांक भी है। पिछले चरण में 'a' को 'b' माना गया है। यह तथ्य कि 'a' 'b' है यह निष्कर्ष निकालने के लिए पर्याप्त नहीं है कि किसी अन्य चरण में a c है, जबकि आध् पारवाक्य में इसका किसी प्रकार का कोई संदर्भ नहीं पाया जाता है। चूंकि तार्किक नियतांक 'a' का उपयोग अस्तित्वपरक रीति से किया गया है, अतः यह आवश्यक है कि EI का उपयोग प्रमाण के पहले चरण में ही किया जाए। यदि यह किसी अन्य स्थान पर होगा तो यह गलत होगा।

19.5 न्यायवाक्य की वैधता का सत्यापन

यह जानना काफी दिलचस्प है कि परिमाणन के नियम निगमनिक तर्क को नए परिप्रेक्ष्य में प्रस्तुत करते हैं। यह प्रक्रिया पदों के वितरण के नियम को छोड़ने में हमारी सहायता करती है। पदों के वितरण के नियम न सिर्फ प्रस्तुतीकरण में दुरुह है, बल्कि इसमें समय भी बहुत लगता है। परिमाणन के नियमों का उपयोग अनिगमनिक युक्तियों के सत्यापन के लिए भी किया जा सकता है, लेकिन शर्त यह है कि ऐसी युक्तियों में सिर्फ सामान्य और एकल प्रतिज्ञप्तियां ही हों। इन नियमों को समझाने के लिए हम निम्नलिखित तर्कों का उपयोग करते हैं।

1. सभी भारतीय एशियाई हैं।

2. तेंदुलकर एक भारतीय है।

3. ∴ तेंदुलकर एक एशियाई है।

इसका निम्न तरीके से प्रतीकन किया जाता है:

$$(x)\ (Ix \Rightarrow Ax)$$

$$It$$

$$\therefore At$$

औपचारिक प्रमाण की रचना निम्न तरीके से होती है:

1). (x)(Ix => Az)

2). It / ∴ At

3). It => At 1, U.I.

4). At 3, 2, M.P.

इस युक्ति विशेष में सिर्फ एक आधार वाक्य सामान्य है। यद्यपि, युक्ति में सिर्फ सामान्य तर्कवाक्य भी हो सकता है, ऐसी स्थिति में थोड़ा भिन्न प्रक्रिया को अपनाना होगा।

इस युक्ति पर विचार करें:

2. 1. सभी राजनेता वोटर हैं।

2. सभी मंत्री राजनेता हैं।

3. ∴ सभी मंत्री वोटर हैं।

प्रतीकन करने पर यह हो जाता है:

1) (x)(Px => Vx)

2) (x)(Mx => Px) / ∴ (x)(Mx => Vx)

औपचारिक प्रमाण निम्न है:

1) (x)(Px=>Vx)

2) (x)(Mx=>Px) /∴ (x){Mx=>Vx}

3) Pa => Va 1, U.I.

4) Ma => Pa 2, U.I.

5) Ma => Va 4, 3, H.S.

6) ∴ (x)(Mx => Vx) 5, U.G.

जब कोई वैयक्तिक चर (x) किसी नियतांक द्वारा उद्धत होता है तो परिमाणक की सीमा समाप्त हो जाती है। क्योंकि हम व्यक्ति या व्यक्तियों का परिमाणन नहीं करते हैं। अब 6वें चरण पर आते हुए यह कहा जा सकता है कि यदि किसी दी गई संरचना के लिए एक प्रतिस्थापन दृ ष्टांत सत्य है, तो उस संरचना के लिए सभी प्रतिस्थापन दृष्टांत सत्य है (6वीं पंक्ति प्रमाण का भाग नहीं है)। फलन के सर्वव्यापी परिमाणन सत्य है, यदि और सिर्फ यदि प्रतिस्थापन उद्धरण सत्य है।

तीसरें और चौथे चरणों में हमने सर्वव्यापी दृष्टांतों को लागू किया है क्योंकि दोनों आधारवाक्य सर्वव्यापी हैं और हमने चरों के लिए नियतांकों को प्रतिस्थापित कर दिया है।

U.G. को निम्न तरीके से लागू किया जा सकता है। इसके लिए सभी चरणों में हम x को y से प्रतिस्थापित करके छठवीं पक्ति को प्रमाण पद्धति में जोड़ देते हैं। फिर हम UG का अनुप्रयोग करते हैं।

1) (x){Px => Vx}

2) (x){Mx => Px} /∴ (x){Mx => Vx}

3) Py => Vy 1, U.I.

4) My => Py 2, U.I.

5) My => Vy 3, 4, H.S.

6) ∴ (x){Mx => Vx} 5, U.G.

ये दोनों उदाहरण स्पष्ट करते हैं कि युक्तियों की वैधता का सत्यापन करते समय UI का उपयोग अनिवार्य रुप से किया जाना चाहिए, जबकि EI का उपयोग अनिवार्य नहीं भी हो सकता है। यह स्थिति निगमनिक तर्क के नियमों के पारंपरिक गठन के समान है तथा संकेत करती है कि किसी विशेष तर्कवाक्य के बिना भी वैध युक्ति की रचना करना संभव है। लेकिन सर्वव्यापी प्रतिज्ञप्तियों के बिना यह संभव नहीं है।

अब उसयुक्ति पर विचार करें जिसमें विशेष तर्कवाक्य होते हैं। चूंकिएक तर्कवाक्य विशेष है, अतःयह आवश्यक है कि निष्कर्ष भी विशेष होना चाहिए ।

3. 1. सभी राजनेता वोटर हैं।

2. कुछ मंत्री राजनेता हैं।

3. ∴ कुछ मंत्री वोटर हैं।

अब तक आप प्रतीकन की विधि से परिचित हो ही गए होंगे। अतः

1) $(x)\{Px => Vx\}$

2) $(\exists x\{Mx \Lambda Px\}$ /∴ $(\exists x\{Mx \Lambda Vx\}$

3) $Ma \Lambda Pa$	2,	E.I.
4) $Pa => Va$	1,	U.I.
5) $Pa \Lambda Ma$	3,	Com.
6) Pa	5,	Simp.
7) Ma	5,	Simp.
8) Va	4, 6,	M.P.
9) $Ma \Lambda Va$	7, 8,	Conj.
10) ∴ $(\exists x) (Mx \Lambda Vx)$	9,	I.G.

आइए, अब हम देखते हैं कि EI के प्रतिबंध को क्यों मानना चाहिए। इसके लिए एक भ्रामक युक्ति पर विचार करें।

1. कुछ जंतु शाकभक्षी होते हैं।

2. कुछ जंतु मनुष्य हैं।

3. ∴कुछ मनुष्य शाकभक्षी हैं।

प्रतीकन करने पर युक्ति बन जाती है:

1) $(\exists x)\{Ax \Lambda Hx\}$

2) $(\exists x)\{Ax \Lambda Mx\}$ /∴ $(\exists x)(Mx \Lambda Hx)$

3) Aa Λ Ha 1, E.I.

4) Aa Λ Ma 2, E.I. (Error)

चौथा चरण त्रुटिपूर्ण है। दूसरा आधार वाक्य हमें बताता है कि कोई एक वस्तु ऐसी है जो जंतु और शाकभक्षी दोनों है। यह हमें यह निष्कर्ष निकालने के अनुमति नहीं देता है कि वह वस्तु मनुष्य है। इसलिए EI का दूसरा उपयोग, त्रुटि की ओर ले जाता है।

19.6 गुणन सामान्य तर्कवाक्य (MULTIPLY GENERAL PROPOSITION)

सामान्य तर्कवाक्य दो प्रकार के होते हैं; एकल सामान्य और गुणन सामान्य। जब सामान्य तर्कवाक्य में सिर्फ एक परिमाणक होता है, तो यह एकल सामान्य कहलाता है। अभी तक हमने सिर्फ पहले प्रकार के तर्कवाक्यों पर विचार किया है। यदि सामान्य तर्कवाक्य में दो या दो से अधिक परिमाणक होते हैं तो ऐसा तर्कवाक्य गुणन सामान्य तर्कवाक्य कहलाता है। उदाहरण के लिए इस तर्कवाक्य पर विचार करें;

'यदि सभी भारतीय क्रिकेट खेलते हैं तो कम से कम कुछ एशियाई ऐसे हैं जो क्रिकेट खेलते हैं।

इसका प्रतीकन निम्न प्रकार से होगाः

1. सभी भारतीय क्रिकेट खेलते हैंः (x){Ix => Px}

2. कम से कम कुछ एशियाई ऐसे हैं जो क्रिकेट खेलते हैं हैः (∃x){Ax Λ Px}

अब पूरे वाक्य का प्रतीकन निम्न प्रकार से होगाः

{(x)(x => Px)} => {(∃x)(Ax Λ Px)}

दिए गए कथन की जटिलता के आधार परिमाणक कितनी भी बार पाए जा सकते हैं।

19.7 सोपाधिक प्रमाण (C.P.) का प्रबलीकृत नियम और परिमाणन

पिछली इकाई में, हमने सीखा था कि पूर्वानुमान सोपाधिक प्रमाण से भिन्न होता है और यह कि 'पूर्वानुमान में निष्कर्ष शामिल नहीं होता है। निष्कर्ष पूरी तरह से आधारवाक्य पर निर्भर करता है। नीचे दिए गए कुछ उदाहरणों से यह स्पष्ट हो जाएगा कि इन तकनीकों के उपयोग द्वारा किसी युक्ति का सत्यापन कैसे किया जा सकता है।

1. 1) (x)[Cx => Dx]

2) (x)[Ex => ⌐ Dx]

∴ (x)[Ex => ⌐ Cx]

युक्ति को निम्न मानक रूप में लिखा जाता हैः

1) (x)[Cx => Dx]

2) (x)[Ex => ⌐ Dx] /∴ (x)[Ex => ⌐ Cx]

→3) Ey

4) Cy => Dy 1, U.I.

5) Ey => ⌐ Dy 2, U.I.

6) ⌐Dy 5, 3, M.P.

7) ⌐Cy 4, 6, M.T.

8) Ey => ⌐ Cy 3, 7, C.P.

9) (x)[Ex => ⌐ Cx] 9, U.G.

उदाहरण (1) से दो पहलू स्पष्ट हो जाते हैं। जब C.P. का उपयोग किया जाता है तो पूर्वानुमान की सीमा खत्म हो जाती है। अतः अगला कदम पूर्वानुमान पर निर्भर नहीं करता है। दूसरे, चूंकि हम पूर्वानुमान कर रहे हैं, अतः 'x' के स्थान पर सिर्फ 'y', एक ऐच्छिक रुप में चुने गए प्रतीक का उपयोग किया जा सकता है। यह स्पष्टीकरण तब सही रहता है जब CP के प्रबलीकृत नियम का उपयोग किया जाता है।

2. 1) (x)[Nx => Ox]

2) (x)[Px => ⌐ Ox] /∴ (x) {(Nx Λ ⌐Px) => Ox}

→ 3) Ny

4) Ny => Oy 1, U.I.

5) Py => ⌐ Oy 2, U.I.

6) Oy 4, 3, M.P.

7) ⌐ Py 5, 6, M.T.

8) $Ny \wedge \neg Py$ 3, 7, Conj.

9) $(Ny \wedge \neg Px) \Rightarrow Oy$ 8, 6, C.P.

10) $(x)\{(Nx \wedge \neg Px) \Rightarrow Ox\}$ 9, U.G

19.8 अवैधता को सिद्ध करना

युक्तियों के अच्छे और बुरे में वर्गीकरण का निहित सिद्धान्त यह है कि सत्य आधार वाक्यों से असत्य निष्कर्ष नहीं प्राप्त होता है। सत्य आधार वाक्यों के साथ असत्य निष्कर्ष की पहचान करने का सबसे आसान तरीका कथनों के घटकों को सत्यता मूल्य प्रदान करने की विधि है। जब सत्यता मूल्यों की विधि परिमाणक के साथ युक्तियों तक विस्तारित की जाती है तो एक आवश्यकता को पूरा करना आवश्यक होता है। हमें अ–रिक्त मॉडल (nonempty model) पर विचार करना पड़ता है जो अ–रिक्त सम्मुचय (nonempty set) के समान होता है। यह मॉडल हमारी परिचर्चा का मुख्य बिंदु है। परिमाणकों को सम्मिलित करने वाली कोई युक्ति तभी वैध होती है, यदि और सिर्फ यदि प्रत्येक अ–रिक्त सेट के लिए एक तार्किक रूप से तुल्य और वैध सत्य फलनी युक्ति होती है। इसी प्रकार, परिमाणन

कोई युक्ति अवैध तब होती है, जब कोई अ–रिक्त मॉडल ऐसा हो जिसके लिए तार्किक रूप से तुल्य और अवैध सत्यफलनी युक्ति होती है। निष्कर्षतः परिमाणकों युक्त युक्ति सिर्फ और सिर्फ तभी वैध होती है, जब उसका सत्यफलनी प्रकार वैध होता है और यह तभी अवैध होता है यदि और सिर्फ यदि इसका सत्य फलनी प्रकार अवैध होता है। चूंकि सत्यफलन प्रकार का सहारा लिया गया है, अतः यह जानना आवश्यक है कि परिमाणकों युक्त कथनों को किस प्रकार सत्य फलनी संयुक्त कथनों में अपघटित किया जा सकता है। जो सत्यता–स्थितियां संयुक्त तर्कवाक्यों के सत्यता मूल्य का निर्धारण करती हैं, वहीं परिमाणकों युक्त संगत तर्कवाक्यों की सत्यता–स्थितियों का भी निर्धारण करती हैं।

इस अनुभाग के आरंभ में हमने उल्लेख किया था कि परिमाणकों युक्त युक्ति तभी वैध होती है, यदि 'कम से कम' उसका एक दृष्टांत अवश्य सत्य हो। इसका अर्थ यही है कि अ–रिक्त मॉडल में कितनी भी संख्या में व्यक्ति (दृष्टांत) हो सकते हैं। मान लीजिए कि पुरुषों के मॉडल में सिर्फ 3 पुरुष जैसे a, b और c हैं। ऐसे में तर्कवाक्य 'A' को निम्नलिखित तरीके से प्रदर्शित किया जा सकता है।

1. $(x)\,(\Phi x) \equiv (\Phi a \wedge \Phi b \wedge \Phi c)$

बांया पक्ष तभी सत्य है यदि और सिर्फ यदि Φa सत्य है, Φb सत्य है, Φc सत्य है। यदि उनमें से कोई भी असत्य है, तब बांया पक्ष असत्य है। इसी प्रकार, तर्कवाक्य E निम्न हो जाता है।

2. $(x)(\neg \Phi x) \equiv (\neg \Phi a \wedge \neg \Phi b \wedge \neg \Phi c)$

यदि a, b और c पुरुषों के मॉडल में अकेले पुरुष हैं तो पिछली बार की तरह ही इस मामले में भी बांए हाथ वाला पद तभी सत्य है, यदि और सिर्फ यदि तीनों में से प्रत्येक घटक सत्य है। यदि इनमें से कोई भी असत्य है तो बांए हाथ वाला पद भी असत्य होगा।

जहाँ सर्वव्यापी परिमाणकों वाले तर्कवाक्य संयोजन पद्धति में रुपांतरित हो जाते हैं, वही अंशव्यापी परिमाणकों वाले वियोजन पद्धति में बदल जाते हैं। यदि हम इस मॉडल को अपनाए, तब

3. $(\exists x)(\Phi x) \equiv (\Phi a \vee \Phi b \vee \Phi c)$

4. $(\exists x)(\neg \Phi x) \equiv (\neg \Phi a \vee \neg \Phi b \vee \neg \Phi c)$

इन चारों समीकरणों से, यह स्पष्ट है कि परिमाणों युक्त तर्कवाक्यों का सत्यता स्तर संयुक्त तर्कवाक्य की सत्यता स्थिति से निर्धारित होता है। उदाहरण के लिए (1) पर विचार करें। यदि दांए हाथ की ओर का एक घटक भी असत्य है तो बांए हाथ वाला भी असत्य हो जाएगा। ऐसा इसलिए है, क्योंकि यदि कोई घटक असत्य हो तो संयोजन असत्य होता है और वियोजक में जब एक घटक असत्य होता है तो भी वियोजक सत्य हो जाता है। अर्थात् बायापक्ष सत्य हो जाता है। इस प्रकार का संबंध सर्वव्यापी और अंशव्यापी परिमाणकों की परिभाषा के पूरी तरह अनुरुप है।

मान लीजिए कि किसी वर्ग के सिर्फ एक व्यक्ति या वस्तु (दृष्टांत) का अस्तित्व है। तो इस से दो उपसिद्धांत निकलते हैं, जो निम्न प्रकार से हैं:

1. $(x)(\Phi x) \equiv \Phi a \equiv (\exists x)(\Phi x)$

चूंकि x के लिए सिर्फ एक सत्य प्रतिस्थापन दृष्टांत है जैसे a तो हम Φa से $(x)(\Phi x)$ को नहीं प्राप्त कर सकते हैं। क्योंकि जब सिर्फ एक दृष्टांत होता है, तो सर्वव्यापी और अंशव्यापी परिमाणकों के बीच कोई भी तार्किक अन्तर नहीं किया जा सकता है।

तार्किक रुप से, सिर्फ एक दृष्टांत युक्त मॉडल और दो या दो से अधिक दृष्टांत युक्त दूसरे मॉडल के बीच गुणात्मक अन्तर होता है (सुविधा के लिए हम पहले मॉडल को एकरूपीय (Monodic) और दूसरे को बहुरूपीय (Polyadic) मॉडल कहेंगे। यदि दो दृष्टांत हैं, तो मॉडल द्विरूपी (Diadic) कहलाएगा और तीन है, तो त्रिरूपीय (triadic) इत्यादि। इनके बीच इसलिए गुणात्मक अन्तर है, क्योंकि एकरूपीय मॉडल में अवैध युक्ति वैध सत्य फलन युक्ति के अनुरुप हो सकती है, जबकि वही युक्ति किसी अन्य मॉडल में अवैध सत्यता फलन युक्ति के अनुरूप भी हो सकती है। आइए, हम एक ऐसी युक्ति पर विचार करते हैं जो पारंपरिक दृष्टि से अवैध है।

1) सभी राजनेता वकील हैं।

सभी जज वकील हैं।

∴सभी जज राजनेता हैं।

1. (x) [Px => Lx]

2. (x) [Jx => Lx]   / ∴ (x) Jx => Px

चूंकि सिर्फ एक प्रतिस्थापित दृष्टांत है, अतः यह युक्ति तार्किक रुप से निम्न के तुल्य हैः

3. p1:[Pa => La]

4. p2:[Ja => La]   / ∴ Ja => Pa

एकरूपी मॉडल में $(x)\ (\Phi x) \equiv \Phi a \equiv (\exists x)\ (\Phi x)$

∴युक्ति तार्किक रुप से निम्न के तुल्य है।

5. $Pa \Lambda La$

6. $Ja \Lambda La$ / ∴ $Ja \Lambda Pa$

यदि हम निष्कर्ष के किसी एक घटक का मूल्य। निर्धारित करते हैं तो न सिर्फ निष्कर्ष असत्य हो सकता है बल्कि एक आधार वाक्य भी असत्य हो जाता है।

जबकि, परिभाषा के अनुसार, वैध संयोजन में सभी आधारवाक्यों को सत्य होना ही चाहिए। सत्य आधारवाक्य से असत्य निष्कर्ष प्राप्त करना तार्किक रुप से असंभव है। इसलिए युक्ति वैध है।

यद्यपि, द्विरूप प्रकार में यही युक्ति अवैध हो जाती है। इससे पहले कि हम द्विरूप मॉडल में एक युक्ति के लिये उदाहरण पर विचार करें, आइए हम निम्न मॉडल की रचना पर विचार करें;

$[(x)\ (\Phi x)] \equiv [\Phi a\ \Lambda\ \Phi b]$

$[(x) \neg (\Phi x)] \equiv [\neg \Phi a\ \Lambda \neg \Phi b]$

$(\exists x)\ (\Phi x) \equiv [\Phi a \text{ v } \Phi b]$

$(\exists x) \neg (\Phi x) \equiv [\neg \Phi a \text{ v } \neg \Phi b]$

जहां a और b दो तत्व है जो द्विरूपी मॉडल के सदस्य हैं

2) आइए अब हम पिछली युक्ति का प्रतीकन करें।

1. p1: (x) [Px => Lx]

2. p2: (x) [Jx => Lx] / ∴ (x) Jx => Px

चूंकि हम द्विरूपी मॉडल पर विचार कर रहे हैं. अतः प्रतीकात्मक प्रस्तुति तार्किक रूप से निम्न के तुल्य हैं:

3. (Pa => La) Λ (Pb => Lb)

4. (Ja => La) Λ (Jb => Lb) / ∴ (Ja => Pa) Λ (Jb => Pb)

Pa को 0 और शेष को 1 मूल्य दीजिए। अब, परिणाम को निम्न प्रकार से अभिकलित किया जा सकता है

5. (Pa => La) Λ (Pb => Lb)

0 1 1 1 1 1 1

6. (Ja => La) Λ (Jb => Lb) / ∴ (Ja => Pa) Λ (Jb => Pb)

1 1 1 1 1 1 1 1 0 0 0 1 1 1

5 और 6 में जों सत्यता मूल्य बक्से के अंदर हैं, उनका संयोजन सत्य आधारवाक्य देता है, जबकि निष्कर्ष असत्य होता है। अतः युक्ति अवैध है। इस परिणाम को 3 या 3 से अधिक सदस्य वाले अन्य बहुरूपी मॉडलों को सम्मिलित करके सामान्यीकृत किया जा सकता है। जो द्विरूपी मॉडल के लिए सही है, वह किसी अन्य बहुरूपी मॉडल के लिए भी सही है। इस विधि से परिचित होने के लिए, आइए हम कुछ समस्याओं को हल करते हैं।

3. (x) (Dx => $\neg$ Ex)

(x) (Ex => Fx) / $\therefore$(x) (Fx => $\neg$ Dx)

हम इस युक्ति को द्विरूप मॉडल तक ही सीमित रखते हैं। यदि यह युक्ति अवैध है, तो यह सभी बहुरूपी मॉडल के लिए अवैध होगी। 3 युक्ति का तार्किक रुप से तुल्य प्रकार निम्न है।

1. (Da => $\neg$ Ea) $\wedge$ (Db => $\neg$ Eb)

2. (Ea => Fa) $\wedge$ (Eb => Fb) / $\therefore$(Fa => $\neg$ Da) $\wedge$ (Fb => $\neg$ Db)

$\neg$ Da को 0 मूल्य दें। व्याघात के नियम के अनुसार Da = 1 इसी प्रकार $\neg$ Db को 0 मूल्य दें। इसलिए Db = 1को 1 मूल्य दें। $\neg$ Ea को 1 मूल्य दें। Eb, 0 हो जाता है। Fa और Fb को 1 मूल्य दें। परिणाम को निम्न तरीके से अभिकलित किया जा सकता है;

3. (Da => $\neg$ Ea) $\wedge$ (Db => $\neg$ Eb)

1 1 1 1 1 1 1

4. (Ea => Fa) $\wedge$ (Eb => Fb) / $\therefore$ (Fa => $\neg$ Da) $\wedge$ (Fb => $\neg$ Db)

0 1 1 1 0 1 1 1 0 0 0 1 0 0

इस युक्ति में भी सत्यता मूल्यों का संयोजन है, जिन्हें 5 और 6 में बक्से में बंद करने पर सत्य आधार वाक्य मिलते हैं, जबकि निष्कर्ष असत्य होता है। अतः युक्ति अवैध है। इस परिणाम को तीन या अधिक सदस्यों वाले अन्य बहुरूपी मॉडलों को सम्मिलित करके सामान्यीकृत किया जा सकता। जो द्विरूप मॉडल के लिए सही है, वह यहां बहुरूप मॉडल के लिए भी सही है।

4.

1. ($\exists$x) (Jx $\wedge$ Kx)

2. ($\exists$x) (Kx $\wedge$ Lx) / $\therefore$($\exists$x) (Lx $\wedge$ Jx)

हम द्विरूप मॉडल में भी इस युक्ति पर विचार करेंगे। यह तार्किक रुप से निम्न के तुल्य हैः

3.(Ja $\wedge$ Ka) v (Jb $\wedge$ Kb)

4. (Ka $\wedge$ La) v (Kb $\wedge$ Lb) /$\therefore$(La $\wedge$ Ja) v (Lb $\wedge$ Jb)

इस युक्ति और पिछले वाली युक्ति में अन्तर यह है कि जहां इस युक्ति में आधार वाक्य और निष्कर्ष वियोजक हैं, वही पिछली युक्ति में संयोजक कथन थे। यह अन्तर परिमाणकों के कारण है। सर्वव्यापी परिमाणकों के मामले में संयोजन एक संयोजक हैं, जबकि अंशव्यापी परिमाणकों में वियोजन संयोजक हैं।

सत्यता मूल्यों का निर्धारण निम्न तरीके से करें La और Jb को 0 और शेष को 1 मूल्य दें। परिणाम का अभिफलन निम्न तरीके से किया जाता हैः

5. (Ja Λ Ka) v (Jb Λ Kb)

    1 1 1 1 0 0 1

6. (Ka Λ La) v (Kb Λ Lb) /∴ (La Λ Ja) v (Lb Λ Jb)

    1 0 0 1 1 1 1   0 0 1 0 1 0 0

इस युक्ति में भी सत्यता मूल्यों का संयोजन, जिन्हें 5 और 6 में बक्से में रखा गया है, सत्य आधार वाक्य देते हैं, जबकि निष्कर्ष असत्य है। अतः यह युक्ति अवैध है। इस परिणाम को तीन या तीन से अधिक सदस्यों वाले अन्य बहुरूपीय मॉडल को सम्मिलित करके सामान्यीकृत किया जा सकता है। जो द्विरूप मॉडल के लिए सही है, है, वह यहां पर अन्य बहुरूप मॉडल के लिए भी किया जा सकता है।

19.9 अनिगमनिक तर्क / गैर–न्यायवाक्य तर्क

सभी युक्तियाँ निगमनिक नहीं हो सकती हैं, भले ही उनमें दो आधार वाक्य और एक निष्कर्ष हों। संबधात्मक युक्ति इसका एक अच्छा उदाहरण है।

1. बंगलुरु चैन्नई के पश्चिम में है।

2. मैंगलोर बंगलुरु के पश्चिम में है।

3. मैगलोर चैन्नई के पश्चिम में है।

अरस्तू की पद्धति, युक्तियों के इस वर्ग को निगमनित युक्ति नहीं मानती है, जबकि प्रतीकात्मक प्रस्तुतीकरण के द्वारा इसे वैध दिखाया जा सकता है। लेकिन इससे कथनों के अर्थ का विरूपण हो जाता है। यदि हम अर्थ को बचाए रखना चाहते हैं, तो प्रश्नानुसार वैधता या अवैधता को प्रदर्शित करना असंभव हो जाता है।

संबन्धात्मक युक्तियों के अतिरिक्त, युक्तियों का एक अन्य वर्ग और भी है जिसमें तीन से अधिक पद और तर्कवाक्य होते हैं। इस युक्ति पर विचार करें।

पुरुष (1) मूर्ख (2) और बेईमान (3) दोनों होते हैं।

कुछ पुरुष चिड़चिड़े होते हैं (4)।

∴ कुछ बेईमान पुरुष (3) चिड़चिडे होते हैं (4)।

यहाँ पदों को संख्या प्रदान कर दी जाती है, जिससे कोई भ्रम न हो। यद्यपि वक्तव्य भ्रामक हैं। यदि हम संयोजक तर्कवाक्य को एक तर्कवाक्य माने तो इस युक्ति में तीन तर्कवाक्य हैं। यदि पिछले कथन को स्वीकार किया जाए, तो यह युक्ति न्यायवाक्य नहीं हो सकती, क्योंकि इसमें चार पद हैं। इसलिए, इस प्रकार की युक्ति को अनिगमनिक युक्ति कहा जाता है। इस प्रकार के तर्क का सत्यापन करने के लिए हमें किसी अतिरिक्त नियम की आवश्यकता नहीं होती है। इस वर्ग की युक्ति का उचित प्रतीकन महत्वपूर्ण है। प्रतीकन निम्न प्रकार से होता है:

1. $(x)\ [Mx \Rightarrow (Sx\ \Lambda\ Dx)]$

2. $(\exists x)\ [Mx\ \Lambda\ Ix]\ \ / \therefore (\exists x)\ (Ix\ \Lambda\ Sx)$. Its formal proof:

3. $[Ma\ \Lambda\ Ia]$	2,	E. I.
4. $Ma \Rightarrow (Sa\ \Lambda\ Da)$	1,	U. I.
5. Ma	3,	Simp.
6. $(Sa\ \Lambda\ Da)$	4, 5,	M. P.
7. Sa	6,	Simp.
8. Ia	3,	Simp.
9. $Ia\ \Lambda\ Sa$	8, 7,	Conj.
10. $(\exists x)\ (Ix\ \Lambda\ Sx)$	9,	E.G.

पहले आधार वाक्य को संयोजक

यहाँ प्रथम चरण हमारा ध्यान आकर्षित करता है। यदि तर्कवाक्य मान लिया गया है, तो (1) का निम्न प्रकार से प्रतीकन किया जाएगा।

11. $Sm\ \Lambda\ Dm$

यह सर्वविदित तथ्य है कि संयोजन का कोई तुल्य प्रकार नहीं होता है। अतः 1, 11 के तुल्य नहीं है।

एक दूसरे कथन पर विचार करें जिसका गठन काफी भिन्न है। 'अमेरिकन और जर्मन विज्ञान में अग्रणी हैं। इस कथन का वास्तव में अर्थ यह है कि अमेरिकन या जर्मन कोई भी विज्ञान में अग्रणी हो सकते हैं। इसका यह अर्थ नहीं है कि अमेरिकन और जर्मन दोनों विज्ञान में अग्रणी हैं। अतः जब इस कथन को तार्किक भाषा में रूपांतरित किया जाता है, तो यह विशिष्ट वियोजक (अथवा) तर्कवाक्य बन जाता है। यह एक प्रकार का संयोजक तर्कवाक्य भी नहीं है; जैसे कि 'अमेरिकन विज्ञान में अग्रणी हैं और जर्मन विज्ञान में अग्रणी हैं'।

ऐसा इसलिए है, क्योंकि इस प्रकार के संयोजक तर्कवाक्य का अर्थ ठीक ऐसा है जैसे यह कहना कि अमेरिकन और जर्मन दोनों विज्ञान में अग्रणी हैं; स्पष्ट रूप से यह एक बेतुका कथन है। इस युक्ति पर विचार करें:

अमेरिकन और जर्मन वैज्ञानिक हैं।

कुछ श्वेत पुरुष अमेरिकन हैं।

इसलिए, कुछ श्वेत पुरुष वैज्ञानिक हैं।

इस युक्ति का प्रतीकन निम्न तरीके से होगा :

1. (x) [(Ax v Gx) => Sx]		
2. (∃x) [Wx Λ Ax]	/ ∴ (∃x)[Wx Λ Sx]	
3. Wa Λ Aa	2,	E.I.
4.Aa	3,	Simp.
5. (Aa v Ga)	4,	Add.
6. (Aa v Ga) => Sa	2,	U.I.
7. Sa	6, 5,	M.P.
8.Wa	3,	Simp.
9. Wa Λ Sa	8, 7,	Conj.
10. (∃x)[Wx Λ Sx]	9,	E.G.

एक विशेष अर्थ में, अनिगमनिक युक्तियां पारंपरिक निगमनिक युक्तियां से अधिक महत्वपूर्ण होती है। कारण स्पष्ट है; कि किसी भी वाद–विवाद में, भले ही वह विज्ञान या राजनीति पर आधारित हो, निगमनिक युक्ति का उपयोग कम ही किया जाता है। इसलिए अनिगमनिक युक्तियों से परिचित होने की अधिक आवश्यकता है।

बोध प्रश्न I

टिप्पणी: क) अपने उत्तर के लिए नीचे दिए गए रिक्त स्थान का उपयोग कीजिए।

ख) इकाई के अंत में दिए गए उत्तरों से अपने उत्तरों का मिलान कीजिए।

1) वैधता के औपचारिक प्रमाणों की रचना कीजिए:

1. 1) (x)[Qx => Rx]

2) (∃x)[Qx v Rx]

∴ (∃x) Rx

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

2. 1) (x)[Sx => (Tx =>Ux)]

2) (x)[Ux=>(Vx ΛWx)]

∴ (x) [Sx => (Tx => Vx Λ Wx)]

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

3. 1) (x)[Dx => ⌐ Ex]

2) (x)[Fx => Ex]

∴ (x) [Fx => ⌐ Dx]

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

4. 1) (∃x) [Jx Λ Kx]

2) (x) [Jx => Lx]

∴ (∃x) [Lx Λ Kx]

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

19.10 सारांश

परिमाणन, सत्यापन के तार्किक साधनों में वृद्धि करने वाले नियमों का एक अन्य समूह है। यह उन युक्तियों पर लागू होता है, जिनमें सामान्य और एकल तर्कवाक्य होते हैं। परिमाणन के नियमों का उपयोग अनुमान और प्रतिस्थापन के नियमों के साथ किया जाता है।

19.11 कुंजी शब्द

द्विरूपीय (Dyadic) : द्विरूपीय वह होता है, जिसमें वस्तुओं के दो सेट । और ठ होते हैं।

बहुरूपीय (Polyadic) : बहुरूपीय का अर्थ है, अनेक घटकों युक्त।

19.12 अन्य सहायक अध्ययन–सामग्री एवं सन्दर्भ

बैसन. ए.एच. एवं ओ. कोनोर डी.जे., *इन्ट्रोडक्शन टु सिम्बोलिक लॉजिक*, कलकत्ता, ऑक्सफोर्ड युनिवर्सिटी प्रैस, 1976.

कोपी, आई.एम., *इन्ट्रोडक्शन टु लॉजिक*, न्यू दिल्ली, प्रेन्टिस हॉल इंडिया, नाइंथ ऐडिसन 1995.

ह्यूगीस, जी.ई. एवं लॉनडे, डी.जी.. *द एलीमेन्ट्स ऑफ फॉर्मल लॉजिक*, बोम्बे, बी.आई. पब्लिकेशन्स, 1966.

जोसेफ, एच.डब्ल.बी., *एन इन्ट्रोडक्शन टु लॉजिक*, ऑक्सफोर्ड, 1906.

कालिश, डोनल्ड ऐट अल. *लॉजिक टैक्नीक्स ऑफ फॉर्मल रीजनिंग*, न्यूयोर्क, हारकोर्ट बेस जोवेनोविच पब्लिशर्स, 1980.

लुइस. सी.जे. एवं लोंगफोर्ड, सी.एच., *सिम्बोलिक लॉजिक*, न्यूयोर्क, डोवर पब्लिकेशन इंक, 1959.

सुपे, पेट्रिक, *इंट्रोडक्शन टु लॉजिक*, न्यू दिल्ली, वेन नोस्ट्रेन्ड/रेनहोल्ड ऐफिलियेटिड ईस्ट–बेस्ट प्रैस, 1969.

19.13 बोध प्रश्नों के उत्तर

1

1) (x) [Qx => Rx]

2) (∃x) [Qx v Rx] /∴ (∃x) (Rx)

3) Qa v Ra 2, E.I.

4) Qa => Ra 1, U.I.

5) Ra 4, 3, M.P.

6) (∃x) Rx 5, E.G.

2

1) (x) [Sx => (Tx => Ux)]

2) (x) [Ux => (Vx Λ Wx)] /∴ (x) [Sx => {Tx => (Vx Λ Wx)}]

3) Sa => (Ta => Ua) 1, U.I.

4) Ua => (Va Λ Wa) 2, U.I.

5) (Sa Λ Ta) => Ua 3, Exp.

6) (Sa Λ Ta) => (Va Λ Wa) 5, 4, H.S.

7) Sa => (Ta => (Va Λ Wa)) 6, Exp.

8) ∴ (x) [Sx => {Tx => (Vx Λ Wx)}]   7,   U.G.

3

1) (x) [Dx => ⌐ Ex]

2) (x) [Fx => Ex]   /∴ (x) [Fx => ⌐ Dx]

3) Da => ⌐ Ea   1,   U.I.

4) Fa => Ea   2,   U.I.

5) Ea => ⌐ Da   3,   Trans.

6) Fa => ⌐ Da   4, 5,   H.S.

7) ∴ (x) [Fx => ⌐ Dx]   6,   U.G.

4

1) (∃x) [Jx Λ Kx]

2) (x) [Jx => Lx]   /∴ (∃x) [Lx Λ Kx]

3) Ja Λ Ka   1,   E.I.

4) Ja => La   2,   U.I.

5)Ja   3,   Simp.

6)Ka   3,   Simp.

7) La   4, 5,   M.P.

8) La Λ Ka   7, 6,   Conj.

9) (∃x) [Lx Λ Kx]   8,   E.G.