इकाई 9 सतत् प्रायिकता बंटन *

इकाई की रूपरेखा

9.0 उद्देश्य

9.1 विषय प्रवेश

9.2 प्रसामान्य बंटन

9.2.1 मानक प्रसामान्य वक्र

9.2.2 द्विपद बंटन का प्रसामान्य सन्निकटन

9.3 कुछ अन्य सतत् बंटन

9.3.1 स्वतंत्रता की कोटि

9.3.2 χ^2(काई–स्कवैयर) बंटन

9.3.3 स्टूडैन्ट –'t' बंटन

9.3.4 एफ(F) बंटन

9.3.5 प्रसामान्य बंटन से संबंधित बंटन

9.4 सार संक्षेप

9.5 बोध प्रश्नों के उत्तर या संकेत

9.0 उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद, आप;

- प्रसामान्य बंटन की व्याख्या कर सकेंगे और इसके प्रयोग भी कर पाएंगे;
- स्वतंत्रता की कोटि की संकल्पना को समझ सकेंगे; और
- काई–स्कवैयर बंटन, स्टूडैन्ट–'t' बंटन और एफ (F) बंटन के बारे में कुछ मूल विचार समझ पाएंगे।

9.1 विषय प्रवेश

पिछली इकाई में हमने असतत् यादृच्छिक चर और सतत् यादृच्छिक चर के बीच अंतर को समझा था। उस इकाई में हमने, आपको प्रायिकता बंटन की संकल्पना से अवगत कराया था। और हमने पाया कि यह अनिवार्य रूप से यादृच्छिक चर और उससे संबंद्धित प्रायिकताओं के मानों से संबंधित प्रकथन है। उस इकाई में हमने दो महत्वपूर्ण असतत् प्रायिकता बंटनों अर्थात द्विपद बंटन और पाइसों बंटन का अध्ययन किया। इस इकाई में हम इसी विषय को आगे बढ़ाएगें और एक महत्वपूर्ण सतत् प्रायिकता बंटन का अध्ययन करेंगे जिसे हम प्रसामान्य बंटन (normal distribution) कहते हैं। यहां उल्लेख करना आवश्यक है कि सांख्यिकीय अनुमिति और परिकल्पना परीक्षण में प्रसामान्य बंटन की भूमिका अत्यंत महत्वपूर्ण होती है। खंड–5 में हम इसी विषय–वस्तु पर बातचीत जारी रखेंगे। हम इकाई–11 में प्रतिदर्शी बंटन के विषय में विचार करेंग जो सांख्यिकीय परिकल्पना परीक्षण के आधार है। इसलिए प्रसामान्य बंटन के साथ–साथ हम अन्य तीन सतत् प्रायिकता बंटनों के बारे में भी कुछ मूल विचारों की चर्चा से हम प्रतिदर्शी बंटन के

* डॉ० अनुप चटर्जी (सेवानिवृत) ए.आर.एस.डी. कॉलेज, दिल्ली विश्वविद्यालय।

गुणों का अधिक स्पष्ट विवेचन कर पाएंगे। इन तीन सतत् प्रायिकता बंटनों से हमारा अभिप्राय काई–स्कवैयर बंटन, स्टूडैन्ट–'टी' (t) बंटन और एफ (F) बंटन से है। इन प्रायिकता बंटनों के बारे में हम इसी इकाई में चर्चा करेंगे।

9.2 प्रसामान्य बंटन

प्रसामान्य बंटन शायद सांख्यिकी और संबंधित विषयों में सर्वाधिक व्यापक रूप से प्रयुक्त होने वाला बंटन है। इसका प्रयोग व्यक्तियों की लंबाई और भार से संबंधित पूछतांछ करने, आई क्यू (IQ) (बौद्धिक विकास) स्तर निर्धारण करने तथा मापन की त्रुटि और वर्षा आदि के विश्लेषणों में किया जाता है। इब्राहिम दि माइर (Ibrahim *de* Moivre) ने 1733 में प्रसामान्य बंटन का गणितीय समीकरण दिया था। कार्ल फ्रेडरिच गाउस ने भी अलग से समान परिमाण की पुनरावर्त मापन त्रुटियों के अध्ययन से इसके समीकरण को व्युत्पन्न किया। इसी आधार पर कभी–कभी इसे 'गॉससीय वितरण' के रूप में भी जाना जाता है। गणितीय सांख्यिकी के परवर्ती विकास को इस वितरण ने आधार प्रदान किया है।

हमने पिछली इकाई में देखा कि सतत् यादृच्छिक चर के लिए प्रायिकता द्रव्यमान फलन का प्रतिरूप, **प्रायिकता घनत्व फलन** है। प्रायिकता घनत्व फलन को हम $p(x)$ द्वारा भी सूचित करते हैं। प्रसामान्य बंटन का अनुगमन करने वाले सतत् यादृच्छिक चर का प्रायिकता घनत्व फलन है;

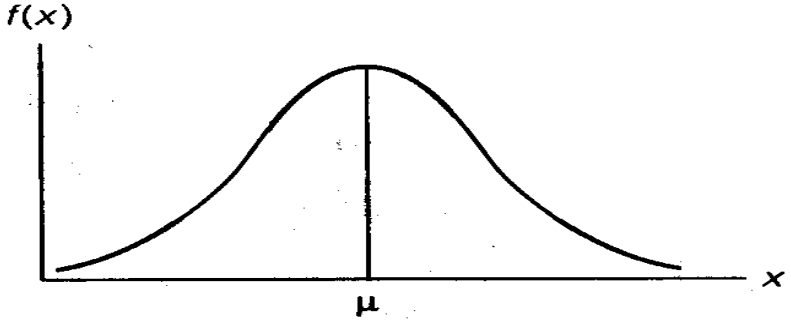
$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

where $-\infty < x < \infty$, and

$\pi = 3.17141$ (सन्निकटतः)

$e = 2.71828$ (सन्निकटतः)

यह स्पष्ट है कि प्रसामान्य घनत्व फलन पूरी तरह प्राचल μ और σ से निर्धारित किया जाता है। इसका अर्थ है कि यदि μ और σ के मान दिए हैं तो हम x के विभिन्न मानों के लिए p(x) के मानों की प्राप्ति करके प्रसामान्य वक्र का पता लगा सकते हैं। हम यह भी दिखा सकते हैं कि μ और σ क्रमशः प्रसामान्य बंटन के माध्य और मानक विचलन हैं। जब यादृच्छिक चर x माध्य μ और मानक विचलन σ वाले प्रसामान्य बंटन का अनुगमन करता है। तो संकेतिक रूप में इसे $X \sim N(\mu, \sigma)$ लिखते हैं और इसे पढ़ते हैं कि 'X' माध्य μ और मानक विचलन σ वाले प्रसामान्य बंटन का अनुगामी है।



चित्र 9.1: प्रसामान्य वक्र

जैसा कि चित्र 9.1 में दर्शाया गया है, प्रसामान्य वक्र सममित घंटाकार वक्र है।

प्रसामान्य बंटन की महत्वपूर्ण विशेषताएं इस प्रकार हैं:

1) प्रसामान्य वक्र का परिसर $-\infty$ से $+\infty$ के बीच का है। इसका अर्थ है कि प्रसामान्य यादृच्छिक चर (X) के मान $-\infty$ से $+\infty$ के बीच के हैं।

2) वक्र अपने माध्य के लिए सममित है अर्थात $\bar{x} = \mu$. इसका अर्थ है कि $x = \mu + a$ और $x = \mu - a$ के संवात में, p(x) के मान समान रहते हैं (किसी भी मनमाने चयनित $'a'$ के लिए)।

3. बंटन की माध्यिका (median) और बहुलक (mode) माध्य के साथ संपाती (coin cide) है। अतः माध्य = माध्यिका = बहुलक = μ

4. प्रसामान्य वक्र का अधिकतम भाग $x = \mu$ पर उभरता है। अतः p(x) अधिकतम है जब $x = \mu$

5. प्रसामान्य वक्र के मोड़ बिंदु (points of inflexion), $x = \mu + \sigma$ और $x = \mu - \sigma$ पर उभरते हैं। नतिपरिर्वतन बिंदु पर, प्रसामान्य वक्र अपना वक्राकार बदल लेता है।

निम्नलिखित क्षेत्र–गुणधर्म प्रसामान्य बंटन पर मान्य रहते हैं। नीचे चित्र 9.2 में हमने माध्य $\mu = 50$ और मानक विचलन $\sigma = 4$ वाला प्रसामान्य वक्र खींचा है;

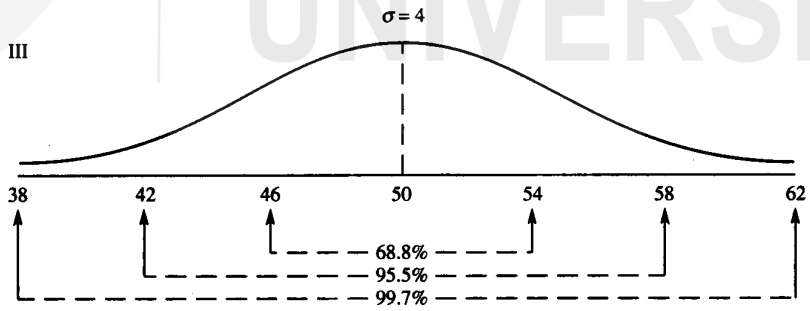
क) प्रसामान्य वक्र के नीचे 68.8% क्षेत्रफल $\mu - \sigma$ और $\mu + \sigma$ कोटियों के बीच निहित है। अतः चित्र 9.2 में जब xका परिसर 46 और 54 के बीच है तो 68.8% क्षेत्र ढ़का हुआ है।

ख) प्रसामान्य वक्र के नीचे 95.5% क्षेत्रफल $\mu - 2\sigma$ और $\mu + 2\sigma$ कोटियों के बीच निहित है। अतः जब $42 \leq x \leq 58$, तब चित्र 9.2 में 95.5% क्षेत्र ढका हुआ है।

ग) प्रसामान्य वक्र के नीचे 99.7% क्षेत्रफल (अर्थात बंटन का लगभग पूरा क्षेत्र)

$\mu - 3\sigma$ और $\mu + 3\sigma$ कोटियों के बीच निहित है।

यदि हमारे पास μ और σ के अलग अलग मान हैं तो चित्र 9.2 में उल्लिखित x की रेंज बदल जायेगी।



चित्र 9.2 : प्रसामान्य वक्र के नीचे क्षेत्रफल

9.2.1 मानक प्रसामान्य वक्र

हमने पिछले इकाई में देखा कि किसी भी सतत् प्रायिकता बंटन या प्रायिकता घनत्व फलन के लिए वक्र इस प्रकार होना चाहिए कि $x = x_1$ और $x = x_2$ के साथ की दो कोटियों से बद्ध वक्र के नीचे क्षेत्रफल इस प्रकार की प्रायिकता देगा कि यादृच्छिक चर का मान $x = x_1$ और $x = x_2$ के बीच का होगा। अतः प्रसामान्य वक्र के लिए।

$$P(x_1 \le X \le x_2) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

निस्संदेह यह प्रायिकता दो प्राचलों μ और σ के मानों पर निर्भर करती है। लेकिन, प्रसामान्य बंटन के उपर्युक्त उल्लिखित समाकल (integral) को हल करना बहुत कठिन है। इसी कारण विभिन्न अंतरालों में प्रसामान्य चर के मानों की तत्काल प्रायिकताओं की प्राप्ति के लिए प्रसामान्य वक्र क्षेत्रफल की सारणी बनाना ज़रूरी है। लेकिन μ और σ के मानों के प्रत्येक विचारणीय संयोजन के लिए अलग सारणी निर्मित करना पूरी तरह निरर्थक है। सौभाग्यवश इस जटिलता को हल करने में सांख्यिकी में मानक परिणाम का अनुप्रयोग सार्थक सिद्ध होता है और पिछली इकाई में हमने यह देखा भी और इसे सिद्ध भी किया। आइए अब परिणाम को संक्षेप में दोहराए। हमने देखा कि *दिए गए माध्य और मानक विचलन वाले किसी चर के लिए, जब कभी भी माध्य को चर से घटाया जाता है तो प्राप्त परिणाम को मानक विचलन से विभाजित किया जाता है; तो परिणामी चर का माध्य शून्य के बराबर और मानक विचलन एक के बराबर होता है।*

अतः यदि X, माध्य (प्रत्याशा) μ और मानक विचलन σ वाला चर है तब $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ का माध्य शून्य के बराबर और मानक विचलन एक के बराबर है।

इसका अर्थ है कि μ और σ के विभिन्न संयोजन वाले प्रसामान्य चरों को माध्य 0 और मानक विचलन 1 वाले अनोखे प्रसामान्य चर के रूप में परिवर्तित किया जा सकता है।

अतः, यदि X माध्य (प्रत्याशा) μ और मानक विचलन σ वाला प्रसामान्य चर है तब μ और σ के किसी भी संयोजन के लिए $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ सदैव 0 माध्य और 1 मानक विचलन वाला प्रसामान्य चर है।

सांकेतिक रूप से, यदि $X \sim N(\mu, \sigma)$

तो किसी भी μ और σ के लिए

$z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$ होगा।

ऐसे परिवर्तित प्रसामान्य चर को मानक प्रसामान्य विचर (Standard normal variate) कहते हैं। *मानक प्रसामान्य विचर* z का प्रायिकता घनत्व फलन है;

$$p(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} \qquad -\infty < z < \infty$$

एक बार आप मानक प्रसामान्य विचर प्राप्त कर लेने पर μ और σ के विभिन्न संयोजनों के लिए प्रायिकता क्षेत्र प्राप्त करने का जटिल कार्य बहुत ही सरल बन जायेगा। आइए देखें कि यह कैसे होगा। हमें पता होना चाहिए कि मानक प्रसामान्य विचर का अनूठा माध्य 0 और अनूठा मानक विचलन 1 है। इसका अर्थ है कि हम ऐसे अनूठे मानक प्रसामान्य विचर के प्रायिकता क्षेत्रफलों के लिए सारणी बना सकते हैं और माध्य और मानक विचलन के किसी भी संयोजन वाले सामान्य चर की प्रायिकता प्राप्त करने में उसका प्रयोग किया जा सकता है। यहाँ ध्यान रखना चाहिए कि दिए गए प्रसामान्य चर को मानक प्रसामान्य विचर में परिवर्तित किया जाना है। विभिन्न क्षेत्रफलों (या प्रायिकताओं) के लिए ऐसी सारणी को मानक प्रसामान्य विचर के लिए संकलित किया जा चुका है (पुस्तक के अंत में दिया गया

परीशिष्ट सारणी A1 देखें)। मानक प्रसामान्य वक्र के नीचे का क्षेत्रफल हम सांख्यिकी में कितनी ही दशाओं में प्रयोग करते है। अतः कुछ माध्य और मानक विचलन वाले किसी प्रसामान्य चर की अपेक्षित प्रायिकता के परिकलन के लिए, दिए गए अंतराल की ऊपरी और निम्न सीमा (मान लीजिए $x = x_1$ और $x = x_2$) को z-मानों ($z = z_1$ और $z = z_2$) में परिवर्तित कर दिया जाता है। और इस पुस्तक के अंत में दी गई परीशिष्ट सारणी A1 से सुसंगत क्षेत्रफल की प्राप्ति की जाती है।

याद रखिए कि मानक प्रसामान्य वक्र सममित है और इसका क्षेत्रफल 1.0 है। चूंकि z मान का परिसर $-\infty$ और ∞ के बीच का है तो हम पाते हैं, कि $0 < z < \infty$ के बीच क्षेत्रफल 0.5 (अर्थात मानक प्रसामान्य वक्र के नीचे क्षेत्रफल का आधा) है। इसी तरह, $-\infty < z < 0$ के बीच का क्षेत्रफल 0.5 है। चूंकि मानक प्रसामान्य वक्र सममित है, इसलिए हमें इसका एक फायदा है : वक्र के नीचे क्षेत्रफल दोनों तरफ से समान हैं। परीशिष्ट सारणी A1 में z के अलग–अलग मानों का क्षेत्रफल दिया गया है।

यदि हम परीशिष्ट सारणी A1 के स्तंभ 1 में देखें तो हम पायेंगे कि z के मानों का परिसर 0.0 से 3.0 तक है। हरेक मान के तदनुरूप ऐसे 10 स्तंभ हैं जो .00, .01, ...09 के रूप में हैं। ये स्तंभ दशमलव के बाद के दूसरे अंक को दर्शाते हैं। जैसे यदि $z = 0.45$ है तब हम 0.4 के तदनुरूप वाली पंक्ति को देखेंगे। इस पंक्ति में हम दायें ओर बढ़ेंगे और ऐसे स्तंभ को देखेंगे जो 0.05 को दर्शाता है। परीशिष्ट सारणी A1 में हम पायेंगे कि जब $z = 0.45$ है तब ढ़का हुआ क्षेत्र 0.1736 है। ध्यान दीजिए जब $z = -0.45$, तब मानक प्रसामान्य वक्र के नीचे क्षेत्रफल दुबारा से 0.1736 है। एक अन्य उदाहरण में, जब $z = 1.31$ है तब मानक प्रसामान्य वक्र के नीचे क्षेत्रफल 0.4049 है। सैद्धांतिक रूप से $-\infty$ और ∞ के बीच z का कोई भी मान हो सकता है। इसलिए, जब $z = 3.00$ तब ढ़का हुआ क्षेत्र 0.4990 है। इसलिए परीशिष्ट सारणी A1 में $z > 3.00$ के लिए क्षेत्रफल नहीं दिए गए।

आइए अब प्रसामान्य क्षेत्रफल सारणी (normal area table) के अनुप्रयोग के लिए, कुछ उदाहरणों पर विचार करें;

उदाहरण 9.1

मानक प्रसामान्य वक्र के नीचे क्षेत्रफल वाली तालिका के प्रयोग से निम्नलिखित प्रत्येक मामले में मानक प्रसामान्य वक्र के नीचे क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

क) $z = 0$ और $z = 1.8$ के बीच

ख) $z = -0.25$ और $z = 0$ के बीच

ग) $z = -0.25$ और $z = 2.25$ के बीच

उत्तर :

क) परीशिष्ट सारणी A1 में आइए z कॉलम के नीचे की तरफ बढ़े जब तक कि हम 1.8 तक न पहुंच जायें। अब दाहिने और 0 के नीचे वाले स्तंभ में देखें। यहाँ हम 0.4641 अंकित पाते हैं। यही आपेक्षित क्षेत्रफल है।

ख) मानक प्रसामान्य वक्र अपने माध्य के संदर्भ में सममित है; तब $z = -0.25$ और $z = 0$ के बीच की आपेक्षित प्रायिकता की प्राप्ति तालिका से $z = 0$ और $z = 0.25$ के बीच का क्षेत्रफल ज्ञात करके की जा सकती है। आइए अब z लिखे कॉलम के नीचे, नीचे की तरफ 0.2 तक पहुंचने तक बढ़ते रहें। अब हम .05 लिखे स्तंभ के दायें ओर देखते हैं। यहाँ हम 0.0987 के बराबर की प्रविष्टि प्राप्त करते हैं। यह आपेक्षित क्षेत्रफल है।

ग) यह स्पष्ट है कि आपेक्षित क्षेत्र है; ($z = -0.52$ और $z = 0$ के बीच का क्षेत्रफल) + ($z = 0$ और $z = 2.25$ के बीच का क्षेत्रफल)

= ($z = 0$ और $z = 0.52$ के बीच का क्षेत्रफल) (सममिता द्वारा) + ($z = 0$ और $z = 2.25$ के बीच का क्षेत्रफल)

$= 0.1985 + 0.4878 = 0.6863$

उदाहरण 9.2

किसी फैक्टरी में 120 मज़दूरों के प्रतिदर्श में दैनिक मज़दूरी प्राप्त करने का माध्य और मानक विचलन क्रमशः 11.35 रुपए और 3.03 रुपए हैं। फैक्टरी में 9 रु. और 17रु. के बीच की मज़दूरी प्राप्त करने वाले मज़दूरों का प्रतिशत बताइए। मान लीजिए कि मज़दूरी प्रसामान्य बंटित है।

मान लीजिए x मज़दूरी (दर्शाने वाला) यादृच्छिक चर है। तब x एक प्रसामान्य चर है जिसका माध्य $\mu = 11.35$ और मानक विचलन $\sigma = 3.03$ मानक प्रसामान्य विचर है।

$$z = \frac{x - 11.35}{3.03}$$

जब $x = 9,\ z = \frac{9 - 11.35}{3.03} = \frac{-2.35}{3.03} = -0.78$

जब $x = 17,\ z = \frac{17 - 11.35}{3.03} = \frac{5.65}{3.03} = 1.86$

$\therefore\ P(9 \le x \le 17) = P(-0.78 \le z \le 1.86)$

$= P(-0.78 \le z \le 0) + P(0 \le z \le 1.86)$

$= P(0 \le z \le 0.78) + P(0 \le z \le 1.86)$

$= 0.2823 + 0.4686$

$= 0.7509.$

अतः 9 रु. और 17 रु. के बीच मज़दूरी पाने वाले 75.09% मज़दूर हैं।

9.2.2 द्विपद बंटन का प्रसामान्य सन्निकटन

कभी–कभी सांख्यिकी में एक बंटन को दूसरे बंटन के सीमित रूप में देखा जाता है। जैसे, इकाई 8 में हमने सीखा कि द्विपद बंटन में सफलता की प्रायिकता, P काफी कम है और अभिप्रयोगों की संख्या n काफी अधिक है तब प्रत्याशा $\mu = np$ परिमित परिमाण हो जाती है। ऐसे मामलों में द्विपद बंटन पाइसो बंटन की ओर प्रवृत है। आपको याद होगा कि द्विपद बंटन और पाइसो बंटन दोनों सतत् बंटन है। लेकिन, आवश्यक नहीं है कि सतत् द्विपद बंटन का सीमित स्वरूप सदाढंग से सतत् पाइसो बंटन ही हो। दरअसल जब n काफी अधिक हो और p, 0 और 1 के बहुत ही निकट न हो तब द्विपद बंटन, सतत् प्रसामान्य बंटन का अनुसरण करता है। इसी कारण प्रसामान्य बंटन का अक्सर द्विपद बंटन के सन्निकटन प्रयोग किया जाता है।

हम पहले भी देख चुके हैं कि मानक प्रसामान्य सारणी, निश्चित अंतराल के भीतर आने वाले प्रसामान्य चर की प्रायिकता प्राप्त करने में काफी उपयोगी है। अब हम ऐसा परिणाम दे सकते हैं जो यादृच्छिक चर के द्विपद गुणधर्मों को सन्निकट करने के लिए मानक प्रसामान्य वक्र के नीचे वाले क्षेत्रफल के प्रयोग में हमारे लिए सहायक होगा।

यदि X द्विपद चर है जिसका माध्य $\mu = np$ और प्रसरण $\sigma^2 = npq$ तब

$$z = \frac{X - np}{\sqrt{npq}}$$

प्रसामान्य बंटन की ओर प्रवृत है और जिसका माध्य 0 और मानक विचलन 1 है, क्योंकि n अनंत संख्याओं की ओर प्रवृत है।

सांकेतिक रूप से $\lim_{n\to\infty} \frac{X-np}{\sqrt{npq}} \sim N(0,1)$

यह देखा गया है कि प्रसामान्य बंटन द्विपद बंटन के लिए अच्छा सन्निकटन प्रदान करता है चाहे n की संख्या काफी अधिक न हो और p भी किसी वजह से 0.5 के निकट हो। आइए यहां एक उदाहरण पर विचार करें।

उदाहरण 9.3

मान लीजिए किसी विशेष प्रकार की मशीन के दोषपूर्ण होने की प्रायिकता 0.4 है। गुणवत्ता नियंत्रण इंस्पैक्टर दोषपूर्ण मशीनों की पहचान करने के लिए ऐसी 15 मशीनों की जांच करता है। प्रायिकता बताइए कि इंस्पैक्टर 4 दोषपूर्ण मशीनों की पहचान कर लेगा।

जैसा कि हम जानते हैं कि इकाई 8 में द्विपद बंटन पर आधारित हमारी चर्चा में, हमने देखा था कि उपलब्ध मशीनों में दोषपूर्ण मशीनों का बंटन द्विपद चर है। यहाँ $n = 15, p = 0.4$ और $q = 1 - p = 0.6$

इसलिए 4 दोषपूर्ण मशीनों की प्रायिकता है।

$^{15}C_4 (0.4)^4(0.6)^{11} = (0.4)^4(0.6)^{11} = 1365 \times 0.0256 \times 0.0036279 = 0.1268$

अब मान लीजिए, हम प्रसामान्य सन्निकटन द्वारा अपेक्षित प्रायिकता ज्ञात करना चाहते हैं।

तब

$np = 15 \times 0.4 = 6$, $npq = np(1-p) = 15 \times 0.4 \times 0.6 = 3.6$ और $\sqrt{npq} = \sqrt{3.6} = 1.897$

यहाँ

$$z = \frac{X - np}{\sqrt{npq}}$$

जो सन्निकटतः मानक प्रसामान्य चर है। लेकिन मानक प्रसामान्य विचर सतत् यादृच्छिक चर है, हम जानते हैं कि ऐसे यादृच्छिक चर के लिए कि यह किसी विशिष्ट मान को ले, इसकी प्रायिकता का निर्धारण नहीं किया जा सकता। केवल अंतराल के भीतर वाले यादृच्छिक चर की प्रायिकता की प्राप्ति की जा सकती है। अतः इसकी प्रायिकता कि द्विपद चर का मान 4 हो इसे अपेक्षित असामान्य सन्निकटन के लिए, ऐसे प्रसामान्य चर की प्रायिकता में परिवर्तित करना होगा जो मान 4 के आसपास के अंतराल में है। चूंकि द्विपद चर शून्य और धनात्मक पूर्णांक है। इसलिए 4 से तुरंत पहले का मान और 4 के तुरंत आगे का मान जोकि विचाराधीन द्विपद चर ले सकता है, क्रमशः 3 और 5 है। जिसके फलस्वरूप मान 4 के बराबर का मान लेने वाले द्विपद चर की प्रायिकता को तार्किक रूप से अंतराल (3.5, 4.5) के बीच आने वाले प्रसामान्य चर की प्रायिकता के सन्निकट किया जा सकता है। तब अपेक्षित प्रायिकता $x_1 = 3.5$ और $x_2 = 4.5$ कोटियों के बीच के प्रसामान्य वक्र के नीचे क्षेत्रफल के सन्निकटतः बराबर होगी। यदि z- मानों को संसोधित किया जाए तो प्राप्त होगा।

$$z_1 = \frac{x_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{3.5 - 6}{1.897} = -1.32$$

और

$$z_2 = \frac{x_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{4.5 - 6}{1.897} = -0.79.$$

यदि X द्विपद चर है और z मानक प्रसामान्य विचर, तब

$P(X = 4) = P(-1.32 \leq z \leq -0.79) = 0.1214$ (मानक प्रसामान्य सारणी A1 से प्राप्त)

हम देख सकते हैं कि 0.1214 का प्रसामान्य सन्निकटन, द्विपद बंटन से प्राप्त 4 दोषपूर्ण मशीनों के लिए 0.1268 की वास्तविक प्रायिकता के काफी निकट है।

बोध प्रश्न 1

1. निम्नलिखित स्थितियों में प्रसामान्य वक्र के नीचे क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
   क) $z = 1.55$ और $z = 2.55$ के बीच
   ख) $z = -1.5$ के बायें तरफ
   ग) $z = 2.5$ के दायें तरफ

   .....
   .....
   .....
   .....
   .....

2. 1000 पुरुषों की माध्य ऊँचाई 68 इंच और मानक विचलन 5 इंच है। यदि ऊँचाई प्रसामान्य रूप से बंटित है तो बताइए कि कितने पुरुषों की ऊँचाई 67 इंच और 69 इंच के बीच है?

   .....
   .....
   .....
   .....
   .....

3. एक कंपनी एक वर्ष में 5,000 बैटरियों की बिक्री करती है और इन बैटरियों की 24 महीनों की गॉरंटी है। यदि बैटरियों की जीवन अवधि (life span) 34 महीनों के बराबर के प्रसामान्य माध्य और 5 महीनों के बराबर के मानक विचलन के संन्निकटतः प्रसामान्य रूप से आकलित है। तो ऐसी बैटरियों की संख्या बताइए जिन्हें गॉरंटी की समयावधि के दौरान बदला जाना है।

   .....
   .....
   .....
   .....

9.3 कुछ अन्य सतत् बंटन

कुछ ऐसे अन्य सतत् प्रायिकता बंटन भी हैं जिनका सांख्यिकी की विविध शाखाओं में विशेष महत्व है। खंड 4 में हम सांख्यिकीय अनुमितियों का अध्ययन करेंगे। इस खंड में हम प्रसामान्य बंटन के अलावा, बहुधा तीन अन्य सतत् बंटनों की संकल्पनाओं का भी प्रयोग करेंगे। जो हैं; काई स्क्वैयर (χ^2) **बंटन**, स्टूडैन्ट–'टी' बंटन, और एफ (F) बंटन। इस अनुभाग में हम इन बंटनों की संक्षेप में चर्चा करेंगे। सर्वप्रथम हम स्वतंत्रता की कोटि अर्थात इसकी सामान्य संकल्पना पर नज़र डालेंगे क्योंकि उपर्युक्त सभी बंटनों में इसका प्रयोग किया जाता है।

9.3.1 स्वतंत्रता की कोटि

उपर्युक्त लिखित बंटनों के संदर्भ में बहुधा हम स्वतंत्रता की कोटि (Degrees of Freedom)नामक शब्द को पढ़ते हैं। आइए शब्द को समझने का प्रयास करें। सामान्य शब्दों में *स्वतंत्रता की कोटि का अर्थ अलग–अलग प्रकार* की स्वतंत्र सूचना से है जिससे किसी प्रेक्षणों के समुच्चय की कुछ विशेषता (जैसे, प्रसरण) को परिकलित करना है। यहाँ हम एकउदाहरण पर विचार करेंगे।

आइए 5 प्रेक्षणः 4, 7, 12, 3 और 15 पर गौर करें। समांतर माध्य $\bar{X}$, 8 है। प्रसरण के परिकलन में माध्य से प्रेक्षणों के वर्गों का योगफल प्रयोग किया जाता है :

$(4–8)^2 + (7–8)^2 + (12–8)^2 = (3–8)^2 + (14–8)^2$

$= (-4)^2 + (–1)^2 + (4)^2 + (–5)^2 + (6)^2$

समांतर माध्य ($\bar{X}$) के विशेषता से, हम जानते हैं कि कोष्ठकों के भीतर के मानों का योगफल शून्य के बराबर होना चाहिए अर्थात सामान्य रूप में $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{X}) = 0.$ इसका अर्थ है कि प्रसरण के परिकलन में, यदि कोष्ठकों के भीतर पहले चार पद, क्रमशः –4, –1, 4 और –5 है तो पाँचवां पद कुछ और नहीं बल्कि 6 ही होगा। अतः इस उदाहरण में, कोष्ठकों के भीतर हमारे पास पांच अलग–अलग सूचनाएं नहीं हैं। कोष्ठक के भीतर पांचवी सूचना अर्थात '6' अपने से संबंधित कोष्ठकों के भीतर की पहली चार सूचनाओं पर आधारित है।

यदि इसका और विस्तार करें तो हम ऐसे व्यक्ति के बारे में सोच सकते हैं जिसे किसी एक प्रेक्षण की जानकारी नहीं है। उसे केवल इतना ही बताया गया है कि कुल 5 प्रेक्षण हैं और पांच प्रेक्षणों के माध्य से प्राप्त मानों के पहले 4 विचलन हैं क्रमशः –4, –1, 4 और –5 अब उसे 5 प्रेक्षणों के प्रसरण को परिकलित करने को कहा जाता है। यदि वह नियम जानता है कि चर के मानों के विचलन का योगफल जो उनके समांतर माध्य से प्राप्त होता है, सदैव शून्य के बराबर होता है तो वह 5वें मान के विचलन को उसके समांतर माध्य से प्राप्त करके 6 बताएंगा। इसके बाद वह इन विचलनों के वर्गमूल प्राप्त करके उन्हें जोड़ देगी और यही अपेक्षित प्रसरण के परिकलन का अंतिम चरण है। अंतिम चरण में उनके समांतर माध्य के लिए मानों के औसत परिक्षेपण के अनुमान लगाने के लिए इन्हें प्रेक्षणों की संख्या से विभाजित करना होता है। (यहाँ अपेक्षित माप के रूप में हम प्रसरण को लेते हैं) ऐसा सन्निकट मान कौन सा है जिसे, उसे प्रेक्षणों की संख्या के लिए लेना चाहिए? क्या यह 5 है? आइए इस पर गौर करें। हमने देखा कि पांचवां विचलन, पहले चार विचलनों से निर्धारित किया जाता है जिसका अर्थ है, कि ऐसी पांच विभिन्न सूचनाएं हैं, जो उनके समांतर माध्य के लिए, दिए गए पांच मानों का परिक्षेपण बनाती हैं। इसलिए

औसत परिक्षेपण अर्थात प्रसरण का पता लगाने के लिए, पांच विचलनों के वर्गमूल के योग को 5 की बजाए 4 से विभाजित करना चाहिए। अतः इस उदाहरण में स्वतंत्रता की कोटि 4 है। यदि हम उपर्युक्त उदाहरण को n प्रेक्षणों के प्रसरण की प्राप्ति के लिए व्यापक करें तो $\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{X}) = 0.$ प्रतिबंध के कारण यहाँ n–1 स्वतंत्रता की कोटियाँ हैं। जिसके परिणाम स्वरूप, प्रसरण के लिए $\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{X})^2$ को n–1 से विभाजित किया जाता है अर्थात $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}(x_i - \bar{X})^2$, जहाँ, S^2 प्रसरण है।

उपर्युक्त चर्चा से हम कह सकते हैं कि किसी भी लक्षण के परिकलन से संबंधित हमें प्राप्त स्वतंत्रता की कोटियाँ, ऐसी संख्या के बराबर है, जो हमें (प्रेक्षणों की संख्या – अपेक्षित अभिलक्षण के परिकलन के लिए लगाई गई प्रतिबंधों की संख्या) प्राप्त करके मिलती है। सांकेतिक रूप से $d.f. = n - r$ जहाँ $d.f.$ स्वतंत्रता की कोटि है, n प्रेक्षणों की संख्या है और r प्रतिबंधों की संख्या है।

हमें यहाँ ध्यान देना चाहिए कि जब प्रसरण या इसके धनात्मक वर्गमूल, अर्थात मानक विचलन के परिकलन के लिए उपलब्ध प्रेक्षणों की संख्या बहुत बड़ी होतब हम n–1 की बजाए, बहुधा n से $\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{X})^2$ को विभाजित करते हैं। लेकिन, कड़े शब्दों में हमें n–1 से $\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{X})^2$ को विभाजित करना चाहिए विशेषरूप से जब n छोटा हो।

9.3.2 χ^2 (काई–स्क्वैयर) बंटन

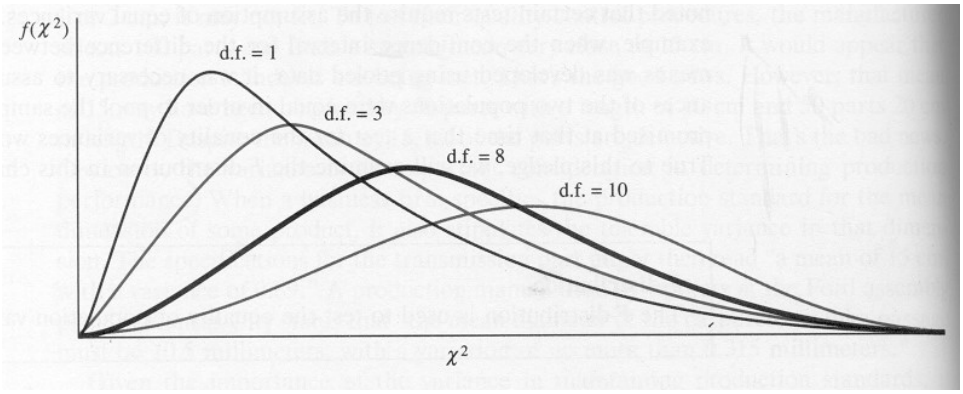
मान लीजिए, X प्रसामान्य चर है जिसकी माध्य (प्रत्याशा) μ और मानक विचलन σ है, तब $z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ मानक प्रसामान्य विचर अर्थात $z \sim N(0,1)$ है। यदि हम zका वर्ग करें अर्थात $z^2 = \left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^2$, तब z^2 ऐसे x^2 चर के रूप में बंटित है जिसकी स्वतंत्रता की कोटि 1 है और इसे χ_1^2 के रूप में अभिव्यक्त किया जाता है।

यह स्पष्ट है कि चूंकि χ_1^2 वर्गित पद है; अतः $-\infty < z < -\infty$ के लिए χ^2 का मान 0 तथा ∞ के बीच रहेगा (क्योंकि वर्गित पद के नकारात्मक मान नहीं हो सकते)। आगे, चूंकि z का माध्य, 0 के बराबर है इसलिए z के अधिकतम मान 0 के सन्निकट होंगे। जिसके परिणामस्वरूप χ^2 चर के अधिकाधिक प्रायिकता घनत्व शून्य के निकट हो।

उपर्युक्त परिणाम को यदि सामान्य रूप में दें तो यदि $z_1, z_2, \ldots, z_k$ स्वतंत्र मानक प्रसामान्य विचर (अर्थात 0 माध्य और 1 प्रसरण वाले प्रसामान्य चर हैं) तब

$$z = \sum_{i=1}^{ki} z_1^2$$

z = ऐसा χ^2 चर है जिसकी स्वतंत्रता की कोटि k है और जिसे χ_k^2 द्वारा सूचित किया जाता है। चित्र 9.3 विभिन्न स्वतंत्रता की कोटि वाले χ^2 चरों के लिए प्रायिकता वक्रों को दर्शाता है।



चित्र 9.3: काई स्क्वैयर प्रायिकता वक्र

हमें x^2 बंटन की निम्नलिखित विशेषताओं को ध्यान में रखना चाहिए।

1. जैसा कि चित्र 9.3 दर्शाता है, χ^2 धनात्मक विषम बंटन है। इसकी विषमता (तिरछेपन) की कोटि, इसकी स्वतंत्रता की कोटियों पर निर्भर करती है। निम्न स्वतंत्रता की कोटियों के लिए बंटन काफी विषम है। स्वतंत्रता की कोटियों की संख्या जैसे–जैसे बढ़ती जाती है, बंटन भी धीरे धीरे सममित होता चला जाता है। असल में, 100 से अधिक स्वतंत्रता की कोटियों के लिए, $\sqrt{2\chi^2} - \sqrt{(2k-1)}$ चर को मानक प्रसामान्य विचर के रूप में देखा जा सकता है जहाँ k स्वतंत्रता की कोटि है।
2. काई–स्क्वैयर बंटन का माध्य k है और इसका प्रसरण $2k$ है जहाँ k स्वतंत्रता की कोटि है।
3. यदि Z_1 और Z_2 दो स्वतंत्र काई–स्क्वैयर बंटन हैं जिनकी स्वतंत्रता की कोटि क्रमशः k_1 और k_2 है, तब $Z_1 + Z_2$ भी काई–स्क्वैयर चर है जिसकी स्वतंत्रता की कोटि $k_1 + k_2$ के बराबर हैं।

प्रसामान्य बंटन के मामले की भांति x^2 बंटन के लिए भी इसी तरह की सारणी बनाई गई है (पुस्तक के अंत में दिया गया परीशिष्ट सारणी A2 देखें)। हमें स्वतंत्रता की विभिन्न कोटि के लिए, x^2 चर की अपेक्षित प्रायिकता की प्राप्ति के लिए इस तालिका को सिर्फ देखना होता है।

परीशिष्ट सारणी A2 में df स्वतंत्रता की कोटियों को दर्शाता है। जबकि स्तंभ $\chi^2_{0.05}$ और $\chi^2_{0.01}$ क्रमशः 5% और 1% (सार्थकता के लिए) χ^2 मानों को सूचित करता है। सार्थकता के स्तर की संकल्पना का वर्णन हम इकाई 12 में करेंगे।

निम्नलिखित उदाहरण, काई–स्क्वैयर सारणी के प्रयोग को दर्शाता है।

उदाहरण 9.4

34 या अधिक के χ^2 मान प्राप्त करने की प्रायिकता क्या होगी यदि स्वतंत्रता की कोटि 25 है?

परीशिष्ट सारणी A2 से हम देख सकते हैं कि यदि हम 25 के अंक तक पहुंचने के लिए स्वतंत्रता की कोटि कॉलम में नीचे की ओर जाते हैं तो 34 से निकटतम अंक, वहाँ 34. 08747 है और 34.08704 की प्रायिकता 0.10 है। अतः अपेक्षित प्रायिकता 0.10 है।

9.3.3 स्टूडैन्ट–'टी' बंटन

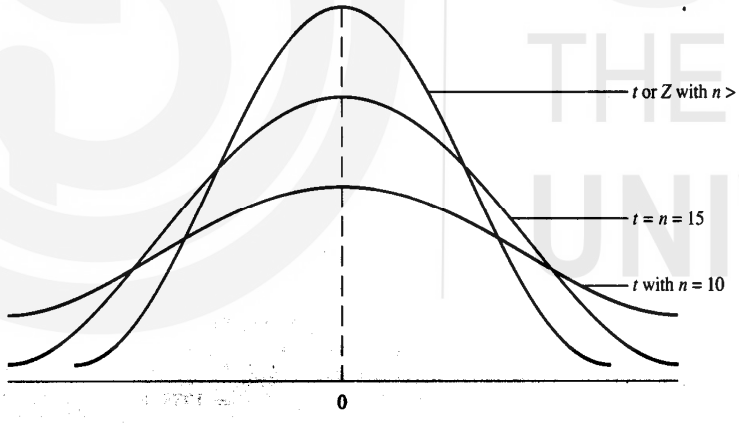
डब्ल्यू. एस. गौसेट (W.S. Gosset) ने टी–बंटन की प्रस्तुति की। यह एक रोचक कहानी है कि गौसेट, आयरलैंड में किसी ब्रीवरी में कर्मचारी थे और कंपनी के नियम के अनुसार कोई भी कर्मचारी अपने शोध परिणामों को अपने नाम से प्रकाशित नहीं कर सकता था। तब गौसेट ने उपनाम 'स्टूडैंट' को अपनाया और इस बंटन के बारे में अपने अध्ययन पर आधारित परिणामों को इस नाम के से प्रकाशित कराया। तभी से इस बंटन को स्टूडैंट–टी बंटन या सरल रूप में टी (t) बंटन के नाम से जाना जाता है।

यदि z_1 मानक प्रसामान्य विचर अर्थात $z_1 \sim N(0, 1)$ है और z_2 अन्य स्वतंत्र प्रसामान्य विचर है जो ऐसे काई स्क्वैयर बंटन का अनुगमन करता है जिसकी k (स्वतंत्रता की कोटि) है अर्थात $z_2 \sim X_k^2$, तब चर

$$t = \frac{z_1}{\sqrt{(z_2/k)}} = \frac{z_1\sqrt{k}}{\sqrt{z_2}}$$

k कोटि बंटन वाले स्टूडैंट–टी बंटन का अनुगामी है।

अलग–अलग स्वतंत्रता की कोटि वाले स्टूडैंट–टी बंटन से संबंधित प्रायिकता वक्रों को चित्र 9.4 में दर्शाया गया है;



चित्र 9.4: स्टूडैन्ट–टी प्रायिकता वक्र

इस बंटन की मुख्य विशेषताएं हैं;

1) जैसा कि चित्र 9.4 में हम देख सकते हैं प्रसामान्य बंटन की भांति ही, स्टूडैन्ट–टी बंटन भी सममित है और इसके विचरण का परिसर भी $-\infty$ से $+\infty$ के बीच का ही है; लेकिन प्रसामान्य बंटन की तुलना में यह अधिक सपाट है। हमें यहाँ ध्यान देना चाहिए कि जैसे जैसे स्वतंत्रता की कोटि बढ़ोत्तरी बढ़ेगी वैसे–वैसे स्टूडैन्ट–'टी' बंटन प्रसामान्य बंटन का अनुगमन करेगा।

2) स्टूडैन्ट–'टी' बंटन का माध्य शून्य है और इसका प्रसरण $\frac{k}{(k-2)}$ है जहाँ k स्वतंत्रता की कोटि है।

प्रसामान्य बंटन की भांति, स्टूडैन्ट–टी बंटन का भी प्रयोग बहुधा सांख्यिकीय अनुमितियों और परिकल्पना–परीक्षण के लिए किया जाता है। इस कार्य में इसके धनत्व फलन का समाकलन शामिल है और जो एक लंबा कार्य है। जिसके फलस्वरूप इस मामले में भी, प्रसामान्य बंटन की भांति, संदर्भ तालिकाएं निर्मित की गई है (पुस्तक के अंत में दिया गया परीशिष्ट सारणी A3 देखें)। इस सारणी का प्रयोग सीखने के लिए अब हम एक उदाहरण पर विचार करेंगे;

उदाहरण 9.5

यदि स्वतंत्रता की कोटि 10 के बराबर है तो (i) 2.764 या अधिक (ii) –2.764 या निम्न के t मान प्राप्त करने की प्रायिकता क्या है?

उत्तर

i) स्टूडैंट–टी बंटन वाली परीशिष्ट सारणी A3 में, हम स्वतंत्रता की कोटि वाले कॉलम में नीचे की ओर जाते हैं और 10 के अंक तक पहुंचते हैं तब साथ वाली पंक्ति में 2.764 के अंक का पता लगाते हैं। 0.01 वाला निम्न प्रायिकता अंक, आपेक्षित प्रायिकता है।

ii) चूंकि स्टूडैंट– टी बंटन सममित है, इसलिए –2.764 या इससे कम का t मान प्राप्त करने की प्रायिकता भी 0.01 है।

9.3.4 एफ (F) बंटन

इस इकाई में अंतिम सतत्प्रायिकता बंटन जिस पर अब हम विचार करेंगे, वह F बंटन है। यदि z_1 और z_2 दो काई–स्क्वैयर चर हैं और जो स्वतंत्रता की कोटि क्रमशः k_1 और k_2 से स्वतंत्र रूप से बंटित हैं, तब चर

$$F = \frac{z_1/k_1}{z_2/k_2}$$

F बंटन का अनुगमन करता है जिसकी स्वतंत्रता की कोटि क्रमशः k_1 और k_2 है। चर को $F_{k1,k2}$ से सूचित किया जाता है जहाँ पादांक k_1 और k_2 काई–स्क्वैयर चरों से संबंद्ध स्वतंत्रता की कोटि हैं।

यहाँ हम देखते हैं कि k_1 अंश स्वतंत्रता की कोटि है और इसी तरह k_2 हर स्वतंत्रता की कोटि है।

F बंटन के कुछ महत्वपूर्ण गुणधर्मों का उल्लेख इस प्रकार है;

1. काई–स्क्वैयर बंटन की भांति, F बंटन भी दायें ओर विषम है। लेकिन जैसे–जैसे k_1 और k_2 बढ़ते हैं, F बंटन, प्रसामान्य बंटन का अनुगामी बन जाता है।

2. F बंटन का माध्य $k_1 (k_2 - 2)$ है जो $k_2 > 2$ के लिए परिभाषित है और इसका प्रसरण $\frac{2k_2^2(k_1 + k_2 - 2)}{k_1(k_2 - 2)^2(k_2 - 4)}$ है जो $k_2 > 4$ के लिए परिभाषित है।

3. ऐसा Fबंटन जिसकी अंश और हर स्वतंत्रता की कोटि क्रमशः I और k है, स्टूडैंटी–टी बंटन का वर्ग है और जिसकी स्वतंत्रता की कोटि k है। सांकेतिक रूप से, $F_{1,k} = t_k^2$

4. बड़े हर वाली स्वतंत्रता की कोटि k_2 के लिए स्वतंत्रता की कोटि k_1 के अंश और F मान का गुणनफल सन्निकटतः ऐसे काई–स्क्वैयर मान के बराबर होगा जिसकी स्वतंत्रता की कोटि k_1 अर्थात $k_1 F = \chi^2_{k_1}$. है।

जैसा कि अन्य संतत प्रायिकता बंटनों के संदर्भ में हमने उल्लेख किया था, F बंटन का भी सांख्यिकीय अनुमितियों और परिकल्पना परीक्षणों में विस्तृत प्रयोग किया जाता है और ऐसे प्रयोगों के लिए, F प्रायिकता वक्र के नीचे क्षेत्रफल प्राप्त करने की और इसके बाद F घनत्व फलन के समाकलन की आवश्यकता पड़ती है। लेकिन इस स्थिति में भी F सारणी के होने से से हमारा कार्य आसान बन जाता है (पुस्तक के अंत में दिया गया परीशिष्ट सारणी A4 देखें)।

9.3.5 प्रसामान्य बंटन से संबंधित बंटन

हम काई–स्क्वैयर, स्टूडैन्ट–टी बंटन और एफ (F) बंटनों की विशेताओं को पहले ही समझ चुके हैं कि अधिक संख्या वाली स्वतंत्रता की कोटि के लिए, ये बंटन, प्रसामान्य बंटन के अनुगामी हैं। जिसके फलस्वरूप, इन बंटनों को प्रसामान्य बंटन से संबंधित बंटनों के रूप में भी देखा जाता है। एक तरफ काई–स्क्वैयर बंटन, स्टूडैंटी–टी बंटन और F बंटन के बीच का यह संबंध और दूसरी तरफ प्रसामान्य बंटन अर्थात इनके महत्वपूर्ण व्यावहारिक निहितार्थ हैं। जब स्वतंत्रता की कोटि अधिक होती है तो हम प्रायः काई–स्क्वैयर बंटन या स्टूडैंटी–टी बंटन या F बंटन का अलग से प्रयोग करने के बजाए, प्रसामान्य बंटन का प्रयोग कर सकते हैं।इससे कार्य अपेक्षाकृत सरल हो जाता है।

बोध प्रश्न 2

1. 8 या अधिक वाले x^2 मान प्राप्त करने की प्रायिकता क्या है, यदि स्वतंत्रता की कोटि 20 है?

   .....

   .....

   .....

   .....

   .....

2. यदि स्वतंत्रता की कोटि 25 के बराबर है तो 1.708 या अधिक का tमान प्राप्त करने की प्रायिकता क्या है?

   .....

   .....

   .....

   .....

   .....

3. यदि $k_1 = 10$ और $k_2 = 8$ है तो 5.8 या अधिक का F मान प्राप्त करने की प्रायिकता क्या है?

.....

.....

.....

.....

9.4 सार संक्षेप

इस इकाई में हमने कुछ सतत् प्रायिकता बंटनों का अध्ययन किया। इन बंटनों में से प्रसामान्य बंटन को सर्वाधिक महत्वपूर्ण माना गया है। हमने इसकी विशेषताओं का अध्ययन किया और इसके व्यावहारिक निहितार्थों को देखा। हमने मानक प्रसामान्य विचर की महत्वपूर्ण संकल्पना पर विचार किया। हमने प्रसामान्य बंटन से संबंधित समस्याओं के समाधान के लिए मानक प्रसामान्य वक्र के नीचे क्षेत्रफलों को ज्ञात करने के लिए सारणी का प्रयोग सीखा। प्रसामान्य बंटन के अतिरिक्त हमने तीन अन्य सतत् प्रायिकता बंटनों पर भी विचार किया। जैसे, काई–स्क्वैयर बंटन, स्टूडैंटी–t बंटन और f बंटन। इन तीनों बंटनों में, स्वतंत्रता की कोटि का प्रयोग शामिल है। इसलिए हमने स्वतंत्रता की कोटि की संकल्पना को समझाया है। हमने इन बंटनों की विशेषताओं का अध्ययन किया और देखा कि इन बंटनों से संबंधित सारणियों के प्रयोग से कैसे विभिन्न स्थितियों में इन बंटनों को लागू किया जा सकता है। अंत में हमने देखा, कि जब स्वतंत्रता की कोटि काफी अधिक हो, तो ये तीनों बंटन प्रसामान्य बंटन के अनुगामी बन जाते हैं।

9.5 बोध प्रश्नों के उत्तर

बोध प्रश्न 1

1. क) 0.0552
   ख) 0.0668
   ग) 0.0062

2. 67 इंच और 69 इंच की बीच की ऊँचाई वाले पुरुषों का समानुपात है 0.1586 इसलिए 67 इंच और 69 इंच के बीच की ऊचाई वाले पुरुषों की संख्या है

   $= 1000 \times 0.1586 = 159$ (लगभग)

3. $z = \frac{24 - 34}{5} = -2$

मानक प्रसामान्य सारणी से, $z = 0$ और $z = 2$ के बीच का क्षेत्रफल 0.4772 है। इसलिए, $z=0$ और $z = -2$ के बीच का क्षेत्रफल 0.4772 है (क्योंकि मानक प्रसामान्य बंटन सममित है)। जिन बैटरियों को बदला जाना है, उनकी संख्या का पता लगाने के लिए, हमें $z=2$ के बायें ओर का क्षेत्रफल जो $z=2$ के दायें ओर का क्षेत्रफल है, पर विचार करना होगा। अब, $z=2$ के दायें ओर का क्षेत्रफल $0.5 - 0.4772 = 0.0228$ है। इसलिए दोषपूर्ण बैटरी होने की प्रायिकता 0.0228 है। अतः 5000 बैटरियों में से जिन बैटरियों को बदला जाना है, उनकी संख्या होगी $= 0.0228 \times 5000 = 114$

बोध प्रश्न 2

1. 0.99
2. 0.05
3. 0.01