इकाई 6 गणन रहित गणन

इकाई की रूपरेखा | पृष्ठ संख्या

6.1 प्रस्तावना 43

उद्देश्य

6.2 समांतर श्रेढ़ी 44

समांतर श्रेढ़ी का nवाँ पद

एक समांतर श्रेढ़ी के n पदों तक का योगफल

6.3 गुणोत्तर श्रेढ़ी 52

गुणोत्तर श्रेढ़ी का nवाँ पद

एक गुणोत्तर श्रेढ़ी के n पदों तक का योगफल

6.4 कुछ विशेष अनुक्रम 59

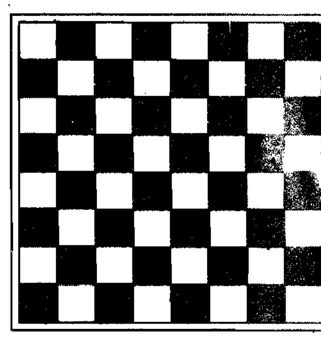
कुछ रोचक अनुक्रम

6.5 सारांश 65

6.6 हल/उत्तर 66

6.1 प्रस्तावना

संभवत: आपने शतरंज अवश्य खेला होगा या अन्य को खेलते हुए देखा होगा। इस खेल की उत्पत्ति के संबंध में एक दंतकथा प्रसिद्ध है। भारत में एक राजा रहा करता था जिसने बहुत सी लड़ाइयाँ लड़ीं थीं और विजय प्राप्त की थी। वह अपना मनोरंजन करना चाहता था। इसके लिए उसने अपने मंत्री से मनोरंजन के लिए एक खेल प्रस्तुत करने के लिए कहा। उसके इस आदेश पर मंत्री ने शतरंज का खेल प्रस्तुत किया। यहाँ हम यह दावे के साथ नहीं कह सकते कि यह दंतकथा सही है या नहीं। शतरंज की उत्पत्ति एक विवादास्पद विषय रहा है और यह बाद हम इतिहासकारों पर छोड़ देते हैं कि वे इसका समाधान निकालें। फिर भी, हमारी रुचि इस बात में है कि बाद में कौन-सी घटना घटी। दंतकथा के अनुसार इस खेल को लेकर राजा बहुत प्रसन्न हुआ और उसने मंत्री से पूछा कि पुरस्कार के रूप में वह क्या लेना चाहता है। (यदि आपने शतरंज बोर्ड पहले कभी नहीं देखा है तो दायीं ओर के हाशिया में दिए गए शतरंज बोर्ड को आप देख सकते हैं)। राजा के पूछने पर चतुर मंत्री ने इस प्रकार अपना उत्तर दिया। "नीचे की दायीं ओर वाले खाने में गेहूँ का एक दाना रखिए। उसके साथ वाले खाने में दो गुना अर्थात् 2 दाने रखिए। फिर, उसके साथ वाले खाने में इसका दोगुना अर्थात् 4 दाने रखिए और इए प्रकार प्रक्रिया तब तक चलाते रहिए जब तक सभी 64 खाने भर नहीं जाते। ऐसा करने पर जितना अनाज आपको मिलेगा, वही मेरा पुरस्कार होगा।" क्या आप बता सकते हैं कि उसे कुल कितना अनाज पुरस्कार के रूप में प्राप्त हुआ होगा? इस इकाई के अंत में इस प्रश्न का उत्तर आपको अवश्य मिल जाएगा।



शतरंज बोर्ड

यहाँ हमें संख्याओं का एक **प्रतिरूप** (pattern) प्राप्त होता है जो एक विशिष्ट क्रम में आती हैं पहले 1, इसके बाद 2, इसके बाद 4, इसके बाद 8, आदि आदि। विशिष्ट क्रम में संख्याओं के होने के कारण इसे हम **अनुक्रम** (sequence) या श्रेढ़ी (progression) कहते हैं। जैसा कि आगे चलकर इस इकाई में आप देखेंगे कि अनुक्रम 1, 2, 4, ... एक गुणोत्तर श्रेढ़ी (geometric progression) है। राजा को कुल कितना अनाज मंत्री को देना होगा। इसके लिए ऊपर दिए गए गुणोत्तर श्रेढ़ी का 64 पदों तक योगफल करना होगा। इसे हम भाग 3 में ज्ञात करेंगे। परन्तु इसके पहले हम भाग 2 में समांतर श्रेढ़ी (arithmetic progression) पर, जो कि संख्याओं

का एक अन्य प्रतिरूप या अनुक्रम है, चर्चा करेंगे। अंतिम भाग में, हम प्रायः प्रयुक्त कुछ अन्य रोचक अनुक्रमों पर चर्चा करेंगे।

उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ लेने के बाद, आप

- समांतर श्रेढ़ी पहचान सकेंगे;
- समांतर श्रेढ़ी के n वाँ पद और n पदों का योगफल ज्ञात कर सकेंगे;
- गुणोत्तर श्रेढ़ी पहचान सकेंगे;
- गुणोत्तर श्रेढ़ी का n वाँ पद और n पदों का योगफल ज्ञात कर सकेंगे;
- अन्य सरल श्रेढ़ियों का योगफल ज्ञात कर सकेंगे।

6.2 समांतर श्रेढ़ी

मान लीजिए आप अपने मित्र से बिना ब्याज के रु. 3,000/- उधार लेते हैं। आप इस राशि को रु. 200/- की मासिक किश्तों में लौटाने के लिए सहमत हो गए हैं। इसके अनुसार पहले, दूसरे, तीसरे महीने आदि में लौटाई गई राशि 200, 400, 600 ... होगी। कितने महीने में, ऋण का भुगतान हो जाएगा? सातवें महीने तक आप कितनी राशि का भुगतान कर चुके होंगे? आइए, हम देखें कि इन प्रश्नों का उत्तर किस प्रकार दे सकते हैं।

अंक 200, 400, 600 को देखिए। पूर्णांकों का अनुक्रम उन संख्याओं का एक समुच्चय है जो एक विशिष्ट क्रम में रखी हुई हैं। उदाहरण के लिए, प्रत्येक महीने में भुगतान की गई राशि को 200, 400, 600 ... 3000 के रूप में लिखा जा सकता है। अनुक्रम की संख्याओं को अनुक्रम का **पद** (term) कहा जाता है।

क्योंकि यहाँ अनुक्रम एक परिमित अनुक्रम हैं और हमने अनुक्रम के अंतिम पद 3000 को लिख दिया है। हम अनुक्रम की संख्याओं को उनके क्रम के अनुसार पहला पद, दूसरा पद आदि कहते हैं। उदाहरण के लिए, अनुक्रम 200, 400, 600, ..., 3000 में पहला पद 200 है, दूसरा पद 400 है और तीसरा पद 600 है, आदि आदि।

ध्यान दीजिए कि प्रत्येक महीने के अंत में आप पिछले महीने में भुगतान की गई राशि से रु. 200/- अधिक भुगतान करते हैं। दूसरे शब्दों में, संख्याओं 200, 400, 600, ... का यह गुणधर्म है कि पिछली संख्या में 200 जोड़ देने पर प्रत्येक संख्या प्राप्त की जा सकती है। संख्याओं 200, 400, 600, ... से **एक समांतर श्रेढ़ी** (arithmetic progression) प्राप्त होती है।

आइए, अब हम आगे की चर्चा के लिए कुछ संकेत नियत कर दें। हम संख्या **a** से प्रारंभ कर सकते हैं और उसमें एक अन्य संख्या d जोड़ कर a + d प्राप्त कर सकते हैं। इसमें d जोड़कर a + 2d प्राप्त कर सकते हैं और इस प्रकार हम अनुक्रम

$$a, a + d, a + 2d \ldots. \qquad (1)$$

प्राप्त कर सकते हैं।

इसे समांतर श्रेढ़ी कहा जाता है दूसरे शब्दों में,

समांतर श्रेढ़ी एक ऐसा अनुक्रम होती है जिसमें प्रथम पद के बाद के प्रत्येक पद को पिछले पद में एक नियत संख्या जोड़कर प्राप्त किया जा सकता हो।

हम समांतर श्रेढ़ी (arithmetic progression) को संक्षेप में A.P. कहेंगे। $a, a+d, a+2d, \ldots$ का प्रत्येक पद समांतर श्रेढ़ी का एक पद है। **प्रथम पद** a है और **सार्वअंतर** (common difference) d है। आगे चर्चा करने से पहले आइए, हम एक उदाहरण देख लें।

उदाहरण 1: निम्नलिखित अनुक्रमों में कौन-कौन अनुक्रम समांतर श्रेढ़ी हैं।

क) 1, 4, 7, 10, ...

ख) 7, 12, 19, 24 ...

ग) $\frac{1}{5}, \frac{12}{35}, \frac{17}{35}, \frac{22}{35} \ldots$

हल :

क) आइएँ, हम पदों के बीच का अंतर देखें।

दूसरा पद – पहला पद $= 4 - 1 = 3$

तीसरा पद – दूसरा पद $= 7 - 4 = 3$

चौथा पद - तीसरा पद $= 10 - 7 = 3$

जैसा कि हम देख सकते हैं, किन्हीं दो क्रमागत (consecutive) पदों के बीच का अंतर 3 है। अत: दूसरे पद से प्रत्येक पद पिछले पद में 3 जोड़कर प्राप्त किया जा सकता है।

अत: दी गई अनुक्रम एक समांतर श्रेढ़ी है।

ख) आइए, हम पदों के बीच का अंतर देखें।

दूसरा पद – पहला पद $= 12 - 7 = 5$

तीसरा पद – दूसरा पद $= 19 - 12 = 7$

चौथा पद – तीसरा पद $= 24 - 19 = 5$

यहाँ पहले पद और दूसरे पद में 5 का अंतर है। परन्तु तीसरे पद और दूसरे पद में अंतर 7 है। अत: यहाँ ऐसी कोई नियत संख्या नहीं हैं जिसे प्रत्येक पद में जोड़कर अगला पद प्राप्त किया जा सके। अत: यह एक समांतर श्रेढ़ी नहीं है।

ग) आइए, हम पदों के बीच का अंतर देखें।

दूसरा पद – पहला पद $= \frac{12}{35} - \frac{1}{5} = \frac{1}{7}$

तीसरा पद – दूसरा पद $= \frac{17}{35} - \frac{12}{35} = \frac{1}{7}$

चौथा पद – तीसरा पद $= \frac{22}{35} - \frac{17}{35} = \frac{1}{7}$

यहाँ किन्हीं दो क्रमागत पदों के बीच का अंतर $\frac{1}{7}$ है। अत: यह एक समांतर श्रेढ़ी है।

* * *

समांतर श्रेढ़ी को आप कितना समझ पाए हैं, इसके लिए आप नीचे दिए गए प्रश्न हल कीजिए।

E1) निम्नलिखित अनुक्रमों में कौन-कौन समांतर श्रेढ़ी हैं?

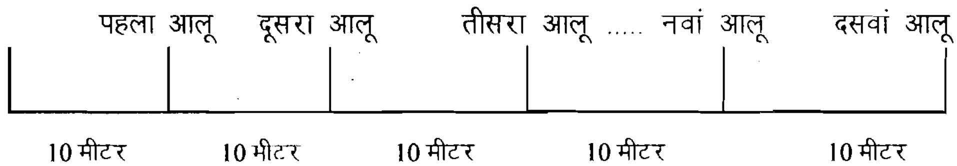
क) 3, 9, 15, 21, 27, ...

ख) 6, 13, 15, 22, ...

दिया हुआ अनुक्रम समांतर श्रेढ़ी है या नहीं यह पहचानना अब तक आपने सीख लिया होगा। कभी-कभी हमें श्रेढ़ी दी नही जाती बल्कि एक स्थिति दी जाती है जो समांतर श्रेढ़ी से संबंधित है। आपको यह जाँचना आना चाहिए कि दी हुई स्थिति से AP प्राप्त होती है कि नहीं इस बात को ध्यान में रखकर हम कुछ ऐसी स्थितियों पर चर्चा करेंगे जो समांतर श्रेढ़ी से संबंधित हैं।

उदाहरण 2: बताइए कि निम्नलिखित स्थितियों से एक समांतर श्रेढ़ी प्राप्त होती है या नहीं।

क) आलू दौड़ में आलुओं को 10-10 मीटर के अंतराल पर रखा गया है (देखिए चित्र 1)। 1 आलू, 2 आलू, 3 आलू आदि को उठाने से पहले प्रतियोगी को कितनी लंबी दौड़ लगानी चाहिए।



चित्र 1: आलू दौड़

ख) **अवमूल्यन** (depreciation) मान लीजिए आप एक फैक्टरी चलाते हैं और आप रु.100000/- की कुछ मशीनरी खरीदते हैं। आप इन मशीनरी का प्रयोग 10 साल कर सकते हैं और उसके बाद इन्हें आप कबाड़ी के रूप में रु. 20,000/- में बेच सकते हैं। वियर-टीयर के कारण मशीन के मूल्य में कमी आ जाती है। मूल्य में हुई इस कमी को **अवमूल्यन** (depreciation) कहा जाता है और इसे आप आयकर के लिए एक खर्च मान सकते हैं। आप मूल्य में आयी गिरावट अर्थात् रु. 80,000/- को 10 भागों में बाँटकर 10 साल तक आयकर में छूट ले सकते हैं। मूल्य में आयी गिरावट को विभाजित करने की एक विधि **सरल रेखा विधि** (straight line method) है। इस विधि में प्रति वर्ष के अवमूल्यन को निम्नलिखित सूत्र से परिकलित किया जाता है।

$$\boxed{\text{प्रति वर्ष अवमूल्यन} = \frac{\text{आदि मूल्य} - \text{अंतिम मूल्य}}{\text{वर्षों की संख्या}}} \qquad (2)$$

सूत्र के अनुसार इस स्थिति में प्रति वर्ष अवमूल्यन $\frac{100000-20000}{10} = 8000$ है। प्रारंभ में मशीन का खाता मूल्य (book value) रु. 100000/- था। पहले वर्ष के अंत में खाता मूल्य रु. 100000 – रु. 8000 = 92000 हो जाता है। दूसरे वर्ष, तीसरे वर्ष, ..., दसवें वर्ष के अंत में खाता मूल्य क्या होगा?

हल :

क) प्रतियोगी को अपने पहले आलू को उठाने के लिए 10 मीटर, दूसरे आलू के उठाने के लिए 20 मीटर, तीसरे आलू के उठाने के 30 मीटर, चौथे आलू को उठाने के लिए 40 मीटर आदि दौड़ना होता है। दो आलुओं के बीच की दूरी का अंत 10 मीटर है। देखिए

तालिका 1 अतः प्रत्येक आलू को उठाने के लिए पिछले आलू को उठाने के लिए तय की गई दूरी में 10 जोड़ देने पर उसके द्वारा तय की गई दूरी प्राप्त हो जाती है। अतः जो अनुक्रम हमें प्राप्त होता है वह एक समांतर श्रेढ़ी है जिसका सार्व अंतर (common difference) 10 है।

ख) आइए, हम मशीन के खाता मूल्य की सूची से संबंधित एक तालिका बनाएं। तालिका 2 की पहली पंक्ति में मूल मूल्य है। दूसरी पंक्ति में रु. 8000 के अवमूल्यन को घटा लेने के बाद पहले वर्ष के अंत में मशीन का मूल्य है। अन्य पंक्तियों का परिकलन भी इसी प्रकार किया गया है। एक विशेष वर्ष के अंत के खाता मूल्य का परिकलन पिछले वर्ष के खाता मूल्य से यह रु. 8000 घटाकर किया जा सकता है। यह एक समांतर श्रेढ़ी है जिसका सार्व अंतर ऋणात्मक अर्थात् – 8000 है।

तालिका 1: आलू दौड़

आलू संख्या	तय की गई दूरी
1	10 m
2	20 m
3	30 m
4	40 m
5	50 m
6	60 m
7	70 m
8	80 m
9	90 m
10	100 m

तालिका 2: सरल रेखा विधि के अनुसार अवमूल्यन

वर्ष	खाता मूल्य (रुपयों में)
0	10,0000
1	92,000
2	84,000
3	76,000
4	68,000
5	60,000
6	52,000
7	44,000
8	36,000
9	28,000
10	20,000

* * *

यहाँ हल करने के लिए एक प्रश्न दिया जा रहा है।

E2) आपने समाचार पत्रों में निकले नौकरी के विज्ञापन अवश्य देखें होंगे। कभी-कभी नौकरी का वेतन मान 10750 – 300 – 16750 भी दिया होता है। क्या आप बता सकते हैं कि इस वेतन मान का अर्थ क्या होता है? इसका अर्थ यह है कि पहले वर्ष में आपका मूल वेतन रु. 10,750/- है। इसके बाद के वर्षों में आपके मासिक मूल वेतन में रु. 300/- की वृद्धि हो जाएगी। अतः दूसरे वर्ष में आपका मूल वेतन रु. 11050/- हो जाएगा। तीसरे वर्ष में मूल वेतन रु. 11350/- हो जाएगा और चौथे वर्ष में रु. 11,560/- हो जाएगा। आपको मिलने वाला पर्क आपके कुल वेतन पर आधारित होता है। पहले वर्ष, दूसरे वर्ष, आदि में कुल मूल वेतन क्या होगा? क्या ये समांतर श्रेढ़ी में होगा? इस श्रेढ़ी का सार्व अंतर क्या है।

प्रायः हमे समांतर श्रेढ़ी का एक विशेष पद ज्ञात करना होता है। अगले उपभाग में हम यह देखेंगे कि एक समांतर श्रेढ़ी का एक विशिष्ट पद किस प्रकार ज्ञात किया जाता है।

6.2.1 समांतर श्रेढ़ी का nवाँ पद

आइए, हम इस भाग के प्रारंभ में चर्चित स्थिति पर फिर विचार करें। आपने अपने मित्र से रु. 3000/- उधार लिया है और रु. 200/- के मासिक किश्त पर भुगतान करने का वादा किया

है। 5 महीने, 8 महीने और 10 महीने के बाद आपको कितने ऋण का भुगतान किया होगा? ये एक समांतर श्रेढ़ी के 5वाँ, 8वाँ और 10वाँ पद है। आप समांतर श्रेढ़ी का nवाँ पद किस प्रकार ज्ञात करते हैं। nवाँ पद ज्ञात करने का सूत्र यह है।

$$\boxed{\text{पहला पद} + (n-1) \times \text{सार्व अंतर}} \qquad (3)$$

दूसरे शब्दों में, यदि समांतर श्रेढ़ी का पहला पद a हो और सार्व अंतर d हो, तो nवाँ पद यह होता है।

$$\boxed{a + (n-1)\,d} \qquad (4)$$

आइए, अब हम एक उदाहरण लें।

उदाहरण 3:

क) समांतर श्रेढ़ी 3, 14, 25, 36, ... का 12वाँ पद ज्ञात कीजिए।

ख) इस भाग के प्रारंभ में चर्चित स्थिति पर विचार कीजिए। आपने अपने मित्र से रु. 3000/- उधार लिया है, और आपने इसका भुगतान रु. 200/- के मासिक किश्त पर करने का वादा किया है। सात महीने बाद आप कितनी राशि का भुगतान कर देंगे?

ग) मान लीजिए आप रु. 250000/- की लागत पर फैक्टरी का भवन बनाते हैं। इस भवन का जीवन-काल 15 वर्ष है और इसके बाद इसे तोड़ देना है। यदि आप अवमूल्यन के लिए सरल रेखा विधि लागू करते हैं, तो बताइए कि अवमूल्यन-दर कितनी होनी चाहिए?

हल :

क) यहाँ पहला पद 3 है और सार्व अंतर 14 – 3 = 11 है, अत: 12वाँ पद 3 + (12 – 1) × 11 = 124 होगा।

ख) यहाँ पहला पद 200 है और सार्व अंतर 200 है। अत: समीकरण 3 लागू करने पर 7वाँ पद 200 + (7 – 1) × 200 = 200 + 1200 = 1400.

अत: सात महीने बाद आपने रु. 1400/- का भुगतान कर दिया होगा।

ग) आपको याद होगा कि सरल रेखा विधि के अधीन खाता मूल्य से एक समांतर श्रेढ़ी प्राप्त होती है। यहाँ आदि मान रु. 250000/- है और अंतिम मान 0 है क्योंकि 15 साल के बाद आप भवन को तोड़ देंगे। अत: समीकरण (2) का प्रयोग करने पर हमें यह प्राप्त होता है।

$$\text{अवमूल्यन} = \frac{250000}{15} = \frac{50000}{3} = 16666\frac{2}{3} = 16666.67$$

क्योंकि $\dfrac{100 \times \frac{50000}{3}}{250000} = \dfrac{20}{3} = 6\dfrac{2}{3}$. अत: अवमूल्यन-दर $6\frac{2}{3}\%$ है। पहले वर्ष के अंत में खाता मूल्य 250000 – 16666.67 = 233333.33 है। चौदह वर्षों के अंत में यह 233333 + (14 – 1) × (– 16666.67) = 16666.62 हो जाएगा जो कि अवमूल्यन रु. 16666.67 **अवमूल्यन** से 5 पैसा कम है। अत: अंतिम वर्ष में अवमूल्यन रु. 16666.62 का होगा न कि रु. 16666.67 का। क्या आप बता सकते हैं कि ऐसा क्यों हुआ है? ऐसा इसलिए हुआ है, क्योंकि हमने $16666\frac{2}{3}$ को 16666.67 से सन्निकटित किया है।

* * *

अब आप नीचे दिया गया प्रश्न हम कीजिए।

E3) i) समांतर श्रेढ़ी 23, 38, 53, ... का 9वाँ पद ज्ञात कीजिए।

ii) मान लीजिए आप अपने मित्र से रु. 4000/- उधार लेते हैं। आप पहले महीने में रु. 300/- लौटाते हैं और आगे के प्रत्येक महीने में रु. 200/- का भुगतान करते हैं। 8 महीने बाद आप कितने ऋण का भुगतान कर चुके होंगे?

संभवत: इस बात पर आपको आश्चर्य हो रहा होगा कि हमने nवाँ पद प्राप्त करने के सूत्र को दो विभिन्न रूपों अर्थात् (3) और (4) में क्यों दिया है। समीकरण (3) में दिए गए सूत्र को लागू करना आप जानते हैं।

आइए, एक उदाहरण लेकर यह देखें कि सूत्र 4 कहाँ उपयोगी सिद्ध होता है।

उदाहरण 4: मान लीजिए कि रु. 10750 – 300 – 16750 के वेतन मान पर आपको एक नौकरी दी गई है। बताइए कि कितने वर्षों बाद आप 16750 का मूल वेतन प्राप्त करेंगे?

हल : पहले, दूसरे और तीसरे वर्ष में मासिक वेतन 10750, 11050, 11350, 16750 से एक समांतर श्रेढ़ी प्राप्त होती है जिसका पहला पद 10750 है और सार्व अंतर 300 है। मान लीजिए x वर्षों में आप वेतन 16750 प्राप्त कर लेते हैं। तब समांतर श्रेढ़ी 11050, 11350, ... का xवाँ 16750 है और हमें x का मान ज्ञात करना है।

$$10750 + (x - 1) \times 300 = 16750$$

या $(x - 1) = \dfrac{16750 - 10750}{300} = \dfrac{6000}{300} = 20$

$\therefore x = 20 \times 1 = 21$

अत: 21वें वर्ष में आपका मूल वेतन 16750 होगा।

* * *

यहाँ नीचे कुछ प्रश्न दिए जा रहे हैं।

E4) मान लीजिए 4500 – 125 – 7000 पर आपको एक नौकरी दी गई हैं। बताइए कि कितने वर्षों बाद आपका मूल वेतन 7000 हो जाएगा।

प्राय: हमें एक समांतर श्रेढी के nवें पद तक का योगफल ज्ञात करना होता है। अगले भाग में हम इसे ज्ञात करने की विधि पर चर्चा करेंगे।

6.2.2 एक समांतर श्रेढ़ी के n पदों तक का योगफल

मान लीजिए आप 10750 – 300 – 16750 के वेतन मान पर एक नौकरी कर रहे हैं और प्रति माह अपने वेतन का 20% भाग बचाना चाहते हैं। 10 वर्षों बाद आप कितनी धनराशि बचा पाएंगे, जिसमें ब्याज नहीं मिलाया गया हो। पहले वर्ष में आप प्रतिमाह 10750 पाते हैं। प्रत्येक माह आप 10750 के 20% की बचत करेंगे जो कि $10750 \times \dfrac{20}{100} = 2150$. 12 महीने में आप $2150 \times 12 = 25800$ की वचत करेंगे। दूसरे वर्ष में आपका मूल वेतन $10750 + 300 = 11050$ हो जाएगा और इसका 20% यह होगा। $11050 \times \dfrac{20}{100} = 2210$ और दूसरे वर्ष में आप $2210 \times 12 = 26520$ की बचत करेंगे। तीसरे वर्ष में आपका मूल वेतन $11050 + 300 = 11350$ होगा और इसका 20% यह होगा $11350 \times \dfrac{20}{100} = 2270$. अत: आप

$2270 \times 12 = 27240$ की बचत करेंगे। अत: पहले तीन वर्षों में आप 25800, 26520 और 27240 की बचत करेंगे। अंतर है $26520 - 25800 = 720$, $27240 - 26520 = 720$ क्योंकि ये दोनों समान हैं, तो क्या आप यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि प्रत्येक वर्ष बचत की राशियों से एक समांतर श्रेढ़ी प्राप्त होती है जिसका सार्व अंतर 720 है? इसका उत्तर है नहीं। केवल तीन पदों से यह निर्णय नहीं लिया जा सकता कि श्रेढ़ी समांतर श्रेढ़ी है या नहीं। आइए, इस विषय पर और अधिक सघनता से विचार करें। प्रति माह बचत में कितनी वृद्धि है? प्रत्येक वर्ष मूल वेतन में रु. 300/- की वृद्धि होती है। अत: एक महीने में बचत की गई राशि में $300 \times \frac{20}{100} = 60$ की वृद्धि होगी। अत: एक वर्ष में $60 \times 12 = 720$ की वृद्धि होगी। इस तरह हमें एक समांतर श्रेढ़ी प्राप्त होती है जिसका पहला पद 25800 है और सार्व अंतर 720 है। 10 वर्षों में बचत की गई धनराशि ज्ञात करने के लिए हमें योगफल

$$\underbrace{25800 + 26520 + \cdots}_{\text{दस पदों तक}} \tag{5}$$

अत: अब पूरा प्रश्न (5) की श्रेणी का योगफल ज्ञात करना हो जाता है। मान लीजिए हम एक समांतर श्रेढ़ी के, जिसका पहला पद a है और सार्व अंतर d है। प्रथम n पदों का योगफल ज्ञात करना चाहते हैं। आइए, हम प्रथम n पदों को S_n से प्रकट करें, अर्थात्

$a + (a + d) + \ldots + \{a + (n - 1) d\}$ का अर्थ है मानों $a, a + d, a + 2d$ और इसी प्रकार $a + (n - 1) d$ को जोड़ना।

$$S_n = a + (a + d) + (a + 2d) + \ldots + \{ a + (n - 1) d\} \text{ तब}$$

$$\boxed{S_n = \frac{n}{2}\ \{2a + (n - 1)d\}} \tag{6}$$

आइए, अब हम इस सूत्र की सहायता से इस भाग के प्रारंभ में दिए गए प्रश्न को हल करें।

उदाहरण 5: इस भाग के प्रारंभ में दी गई स्थिति लीजिए और 10 वर्षों में की गई कुल बचत ज्ञात कीजिए।

हल : जैसाकि हम पहले यहाँ देख चुके हैं यहाँ $a = 25800$, $d = 720$ और $n = 10$. अत: समीकरण (6) का प्रयोग करने पर हमें यह प्राप्त होता है।

$$\begin{aligned}\frac{10}{2}\times\{2\times25800+(10-1)\times720\} &= 5 \times (51600 + 6480)\\ &= 5 \times 58080 = 290400\end{aligned}$$

* * *

अब, आप नीचे दिया गया प्रश्न हल कीजिए।

E5) मान लीजिए आप 4500 – 125 – 7000 के वेतन मान पर एक नौकरी कर रहे हैं और आप प्रतिमाह मूल वेतन का 15% बचाना चाहते हैं। बताइए कि 12 वर्षों में आप कितनी बचत कर लेंगे?

यदि आपको अंतिम पद भी ज्ञात हो, तो S_n ज्ञात करने के लिए आप इस सूत्र का भी प्रयोग कर सकते हैं।

$$\boxed{\text{पदों की संख्या} \times \frac{\text{पहला पद} + \text{अंतिम पद}}{2}} \tag{7}$$

एक महत्त्वपूर्ण विशेष स्थिति है जहाँ (6) और (7) दोनों लागू होते हैं। यह प्रथम n प्राकृतिक संख्याओं का योगफल है। आप भी इस बात से सहमत होंगे कि प्राकृतिक संख्याओं 1, 2, 3, ...

से एक समांतर श्रेढ़ी प्राप्त होती है जिसका पहला पद 1 है और सार्व अंतर 1 है। अत: प्रथम n प्राकृतिक संख्याओं का योगफल निम्नलिखित सूत्र से प्राप्त हो जाता है।

$$\boxed{1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}} \qquad (8)$$

इन्हें और अधिक स्पष्ट रूप से समझने के लिए आइए, अब हम कुछ उदाहरण लें।

उदाहरण 6:

क) नीचे दी गई समांतर श्रेढ़ियों के प्रथम दस पदों का योगफल ज्ञात कीजिए।

i) 7, 22, 37, ...

ii) 8, 20, 32, 44, ...

ख) नीचे दिए गए समांतर श्रेढ़ियों का योगफल ज्ञात कीजिए।

i) 7, 12, ..., 67

ii) 6, 19, 32, ... 188

हल :

क) i) पहला पद $a = 7$ और $22 - 7 = 15$. अत: सार्व अंतर $d = 15$. यहाँ हमें 10 पदों का योगफल ज्ञात करना है अर्थात् यहाँ $n = 10$. अत: सूत्र (6) लागू करने पर हमें यह प्राप्त होता है।

क्योंकि यहाँ यह स्पष्ट है कि दी हुई श्रेढ़ी समांतर श्रेढ़ी है अत: तीन पद ही पर्याप्त होते हैं।

$$S_{10} = \frac{10}{2}\{2 + 7 + (10 - 1) \times 15\}$$

$$= 5\{14 + 135\} = 745$$

ii) पहला पद $a = 8$ और $20 - 8 = 12$. अत: सार्व अंतर $d = 12$ यहाँ $n = 10$. अत: सूत्र (6) लागू करने पर हमें यह प्राप्त होता है।

$$S_{10} = \frac{10}{2}\{2 \times 8 + 9 \times 12\}$$

$$= 5 + \{16 + 108\} = 5 \times 124 = 620$$

ख) i) पहला पद $a = 7$ और $12 - 7 = 5$. अत: सार्व अंतर $d = 5$. (6) और (7) में से कोई भी सूत्र यहाँ हम क्यों न लागू करें, हमें पदों की संख्या अवश्य ज्ञात होनी चाहिए। उदाहरण 4 में हमने यह देखा है कि किस प्रकार प्रथम पद, अंतिम पद और सार्व अंतर ज्ञात होने पर पदों की संख्या ज्ञात हो जाती है। यहाँ भी हम समीकरण (4) लागू करेंगे। मान लीजिए पदों की संख्या x है। तब

$$7 + 5(x - 1) = 67$$

या $$x - 1 = \frac{67 - 7}{5} = 12$$

$$\therefore x = 13$$

आइए, अब हम (7) लागू करें। यहाँ अंतिम पद 67 है। अत:

$$S_{13} = 13\left(\frac{67 + 7}{2}\right)$$

$$= 13 \times 37 = 481.$$

ii) पहला पद $a = 6$ और सार्व अंतर $d = 19 - 6$. आइए, अब हम ऊपर की भांति पदों की संख्या ज्ञात करें।

$$6 + 13(x-1) = 188$$

$$\therefore (x-1) = \frac{188-6}{13} = 14$$

$$\text{या } x = 15$$

समीकरण (7) को पुन: लागू करने पर हमें यह प्राप्त होता है।

$$S_{15} = 15 \times \left(\frac{188+6}{2}\right)$$

$$= 15 \times 97 = 1455$$

* * *

अब आप नीचे दिए गए प्रश्न हल कीजिए।

E6) क) नीचे दी गई समांतर श्रेढ़ियों के प्रथम बारह पदों का योगफल ज्ञात कीजिए।

i) $1\frac{2}{5}, 4, 6\frac{3}{5}, \ldots$

ii) $1000, \frac{4993}{5}, \frac{4986}{5}, \ldots$

ख) नीचे दी गई समांतर श्रेढ़ियों का योगफल ज्ञात कीजिए।

i) $19, 27, \ldots, 131$

ii) $17, 31, \ldots, 241$

अब तक हमने एक प्रकार की श्रेढ़ी, समांतर श्रेढ़ी का अध्ययन किया है। अब हम भाग 5.3 में एक अन्य प्रकार के अनुक्रम, जिसे गुणोत्तर श्रेढ़ी कहा जाता है, पर चर्चा करेंगे।

6.3 गुणोत्तर श्रेढ़ी (Geometric Progressions)

इस इकाई के प्रस्तावना में हमने शतरंज की उत्पत्ति से संबंधित एक दंतकथा का उल्लेख किया है। वहाँ हमने यह देखा कि उत्तरोत्तर खानों में गेंहूँ के दानों के संख्या $1, 2, 4, 8, \ldots$ है। यहाँ आप यह देख सकते हैं कि दूसरे पद से प्रारंभ करके प्रत्येक पद को, पिछले पद को 2 से गुणा करके प्राप्त किया जा सकता है।

हम अपनी चर्चाओं में कुछ संकेत स्थापित करेंगे। हमें गुणोत्तर श्रेढ़ी किस प्रकार प्राप्त होती है? हम एक संख्या से, मान लीजिए वह संख्या a है, प्रारंभ कर सकते हैं। यह गुणोत्तर श्रेढ़ी (GP) का **पहला पद** या **आदि पद** (initial term) है। इसे हम एक नियत संख्या r से जिसे **सार्व अनुपात** (common ratio) कहा जाता है, गुणा करके दूसरा पद ar प्राप्त करते हैं। हम दूसरे पद को पुन: r से गुणा करके तीसरा पद ar^2 प्राप्त करते हैं और इस तरह हमें एक अनुक्रम

$$\boxed{a, ar, ar^2 \ldots} \quad (9)$$

प्राप्त होता है। हम ऐसे अनुक्रमों को गुणोत्तर श्रेढ़ी कहते हैं और इसका संक्षिप्त रूप GP मानते हैं।

> वह अनुक्रम जिसके दूसरे पद से प्रारंभ करके प्रत्येक पद को, पिछले पद को एक नियत संख्या से गुणा करके प्राप्त किया जा सकता है, **गुणोत्तर श्रेढ़ी** होता है।

आइए, अब हम कुछ उदाहरण लें,

उदाहरण 7: नीचे दिए गए अनुक्रम में कौन-कौन अनुक्रम गुणोत्तर श्रेढ़ी में हैं?

क) 2, 6, 18, 24, ...

ख) 4, 16, 64, 256, ...

ग) $25, 5, 1, \frac{1}{5}, \ldots$

हल : गुणोत्तर श्रेढ़ी में दूसरे पद से प्रारंभ करके प्रत्येक पद को, पिछले पद को एक नियत संख्या से गुणा करके प्राप्त किया जा सकता है। इसलिए उत्तरोत्तर पदों के बीच का अनुपात सदा एक ही होगा। आइए, हम देखें कि यहाँ यह स्थिति है या नही। यहाँ उत्तरोत्तर अनुपात ये हैं।

$$\frac{\text{दूसरा पद}}{\text{पहला पद}} = \frac{6}{2} = 3$$

$$\frac{\text{तीसरा पद}}{\text{दूसरा पद}} = \frac{18}{6} = 3$$

$$\frac{\text{चौथा पद}}{\text{तीसरा पद}} = \frac{24}{18} = \frac{4}{3}$$

यहाँ, दूसरे पद और पहले पद का अनुपात तथा चौथे पद और तीसरे पद का अनुपात समान अर्थात् 3 है। परन्तु चौथे पद और तीसरे पद का अनुपाद $4/3$ है। अत: यह अनुक्रम एकं गुणोत्तर श्रेढ़ी नहीं है।

ख) यहाँ उत्तरोत्तर अनुपात ये हैं।

$$\frac{\text{दूसरा पद}}{\text{पहला पद}} = \frac{16}{4} = 4$$

$$\frac{\text{तीसरा पद}}{\text{दूसरा पद}} = \frac{64}{16} = 4$$

$$\frac{\text{चौथा पद}}{\text{तीसरा पद}} = \frac{256}{64} = 4$$

यहाँ सभी अनुपात समान हैं। अत: यह एक गुणोत्तर श्रेढ़ी (GP) है।

ग) यहाँ उत्तरोत्तर अनुपात ये हैं :

$$\frac{\text{दूसरा पद}}{\text{पहला पद}} = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$$

$$\frac{\text{तीसरा पद}}{\text{दूसरा पद}} = \frac{1}{5}$$

$$\frac{\text{चौथा पद}}{\text{तीसरा पद}} = \frac{\frac{1}{5}}{1} = \frac{1}{5}$$

यहाँ भी अनुक्रम एक गुणोत्तर श्रेढ़ी हैं।

* * *

गुणोत्तर श्रेढ़ी को आप अच्छी तरह से पहचान सकें इसके लिए यहाँ हम कुछ उदाहरणों पर चर्चा करेंगे।

उदाहरण 8

क) **चक्रवृद्धि ब्याज** (Compound interest)

मान लीजिए आप एक उधारदाता से 3% की मासिक चक्रवृद्धि ब्याज की दर पर रु. 5000/- उधार लेते हैं। इससे क्या अर्थ निकलता है? 5000 का तीन प्रतिशत $\frac{5000\times3}{100} = 150$ है। अत: पहले महीने के अंत में आप पर उधारदाता का 5000 + 150 = 5150 रुपया ऋण हो जाएगा? दूसरे महीने के अंत में आप पर कितना ऋण हो जाएगा? इसके लिए आपको रु. 5150 पर 3% ब्याज परिकलित करना होता है। आप पर उधारदाता का यह ब्याज और रु. 5150 योगफल ऋण हो जाएगा। यह है रु. $5150 + \frac{5150\times3}{100} = 5304.50$ तीसरे, चौथे महीनों आदि में ऋण कितना होगा? क्या इनसे एक समांतर श्रेढ़ी प्राप्त होगी?

ख) पिछले भाग में हमने अवमूल्यन (depreciation) का परिकलन करने के लिए हमने सरल रेखा विधि पर चर्चा की थी। अवमूल्यन परिकल करने की एक और विधि है, जिसे **ह्रासित मूल्य** विधि (written down value method), कहा जाता है। मान लीजिए आपने अपनी कंपनी के लिए रु. 10000 का फर्नीचर खरीदा है और फर्नीचर का जीवन काल 10 वर्ष है। दस साल के बाद आप कबाड़ के रूप में फर्नीचर को रु. 2000/- में बेच सकते हैं। ह्रासित मूल्य विधि से आप अवमूल्यन परिकलित कर सकते हैं। इस विधि के अधीन अवमूल्यन परिकलित करने का सूत्र यह है।

$$\boxed{\text{अवमूल्यन} = 1 - \left(\frac{\text{कबाड़ी मूल्य}}{\text{लागत मूल्य}}\right)^{1/n}} \qquad (11)$$

यहाँ यह अवमूल्यन है, $1 - \left(\frac{2000}{10000}\right)^{1/10} = 1-(0.2)^{1/10} \simeq 1 - 0.85 = 0.15$, अर्थात 15% है।

अवमूल्यन किस प्रकार परिकलित करते हैं? अवमूल्यन 15% है और 10,000 का 15% रु. 1500/- है। अत: पहले वर्ष का अवमूल्यन रु. 1500/- है और खाता मूल्य (book value) रु. 8500 है। दूसरे वर्ष में अवमूल्यन पहले वर्ष के अंत में खाता मूल्य का 15% होता है जो कि रु. 1275 है। अत: दूसरे वर्ष के अंत में खाता मूल्य रु. 8500 – रु. 1275 = रु. 7225 होगा। उत्तरोत्तर वर्षों का खाता मूल्य लीजिए। क्या यह एक गुणोत्तर श्रेढ़ी बनते हैं?

हल : (तीसरे महीने के अंत में, रु. 5304.50 पर ब्याज है $\frac{5304.5\times3}{100} = 159.4$ अत: कुल ऋण है 5304.5 + 159.14 = 5463.64. अब देखते हैं कि यह एक गुणोत्तर श्रेढ़ी बनते हैं या नहीं। पहले महीने के शुरू में रु. 5000 ऋण है। पहले महीने के अंत में आप पर यह ऋण होगा।

$$5000 + 5000 \times \frac{3}{100} = 5000 \times \left(1+\frac{3}{100}\right)$$

दूसरे महीने के अंत में आप पर यह ऋण होगा

$$5000 \times \left(1+\frac{3}{100}\right) + 5000\times\left(1+\frac{3}{100}\right)\times\frac{3}{100}$$

$$= 5000 \times \left(1+\frac{3}{100}\right)\times\left\{1+\frac{3}{100}\right\}$$

$$= 5000 \times \left\{1+\frac{3}{100}\right\}^2$$

तीसरे महीने के अंत में आप पर यह ऋण होगा

$$5000 \times \left\{1+\frac{3}{100}\right\}^2 + 5000\times\left(1+\frac{3}{100}\right)^2 \times \frac{3}{100}$$

$$= 5000 \times \left\{1+\frac{3}{100}\right\}^2 \times \left\{1+\frac{3}{100}\right\}$$

$$= 5000 \times \left(1+\frac{3}{100}\right)^3$$

अत: पहले, दूसरे, तीसरे महीने आदि के अंत में आप पर ये ऋण होंगे।

$$5000\left(1+\frac{3}{100}\right), 5000\left(1+\frac{3}{100}\right)^3, 5000\left(1+\frac{3}{100}\right)^3 \ldots \qquad (12)$$

जैसा कि आप समीकरण (12) में देख सकते हैं कि प्रत्येक महीने के ऋण की राशि पिछले महीने के ऋण की राशि को $\left(1+\frac{3}{100}\right)$ से गुणा करके प्राप्त की जा सकती है। अत: (10) के अनुसार इन राशियों से एक गुणोत्तर श्रेढ़ी प्राप्त होती है। इस श्रेढ़ी का सार्व अनुपात (common ratio) $1+\frac{3}{100}$ है।

ख) पहले वर्ष के अंत में खाता मूल्य यह होगा

$$10000 - 10000 \times \frac{15}{100} = 10000\left(1-\frac{15}{100}\right)$$

दूसरे वर्ष के अंत में ख़ाता मूल्य यह होगा

$$= 10000\left(1-\frac{15}{100}\right) - 10000\left(1-\frac{15}{100}\right)\frac{15}{100}$$

$$= 10000\left(1-\frac{15}{100}\right)\left\{1-\frac{15}{100}\right\}$$

$$= 10000\left(1-\frac{15}{100}\right)^2$$

तीसरे वर्ष के अंत में खाता मूल्य यह होगा

$$10000\left(1-\frac{15}{100}\right)^2 - 10000\left(1-\frac{15}{100}\right)^2\frac{15}{100}$$

$$= 10000\left(1-\frac{15}{100}\right)^2\left\{1-\frac{15}{100}\right\}$$

$$= 10000\left(1-\frac{15}{100}\right)^3.$$

अत: उत्तरोत्तर वर्ष के खाता मूल्यों से एक-एक गुणोत्तर श्रेढ़ी प्राप्त होती है, जिसका सार्व अनुपात $1-\frac{15}{100}=\frac{85}{100}$ है। परन्तु 10वें वर्ष के अन्त का खाता मूल्य वही होना चाहिए जो कि कबाड़ मूल्य है? आइए, हम इसकी जांच करें। 10 वर्षों के बाद खाता मूल्य $10000 \times \left(\frac{85}{100}\right)^{10} \approx 1968.74$ है जो कि कबाड़ी मूल्य से किंचितमात्र कम है। अत: 10वें वर्ष के अंत में अवमूल्यन 15% नही है अपितु किंचितमात्र कम है। ऐसा होने का कारण यह है कि हमने $(2)^{1/10}$ के मान को सन्निकटित कर दिया है।

* * *

अब आप निम्नलिखित प्रश्न हल कीजिए।

E7) मान लीजिए आप तीन पर्सनल कंप्यूटर ख़रीदते हैं जिनमें प्रत्येक की कीमत रु. 40,000 है। 3 वर्ष के बाद में कंप्यूटर अप्रचलित हो जाते हैं और आप इन्हें रु. 5000/- में बेच देते हैं। क्या खाता मानों से एक गुणोत्तर श्रेढ़ी प्राप्त होती है? यदि हाँ, तो इस गुणोत्तर श्रेढ़ी के प्रथम पद और सार्व अनुपात क्या होंगे?

प्राय: हमें एक गुणोत्तर श्रेढ़ी का nवाँ पद ज्ञात करना होता है। अगले भाग में हम ऐसी कुछ स्थितियों पर चर्चा करेंगे।

6.3.1 गुणोत्तर श्रेढ़ी का nवाँ पद

इस इकाई के प्रस्तावना में उल्लेखित उस स्थिति को लीजिए जिसमें हम शतरंज बोर्ड के दायें कोने वाले खाले में एक दाना रखते हैं, अगले खाने में दो दानें रखते हैं और उसके अगले खाने में चार दाने रखते हैं आदि आदि। मान लीजिए हम 16वें खाने में रखे दानों की संख्या ज्ञात करना चाहते हैं। इसे हम कैसे ज्ञात कर सकते हैं? व्यापक रूप में एक गुणोत्तर श्रेढ़ी का nवाँ पद क्या होता है? एक गुणोत्तर श्रेढ़ी का nवाँ पद यह होता है।

$$\boxed{ar^{n-1}} \qquad (13)$$

यहाँ a पहला पद है और r सार्व अनुपात है।

उदाहरण 9

क) 16वें खाने में रखें दानों की संख्या ज्ञात कीजिए।

ख) उदाहरण 8 में उल्लेखित उधारदाता से संबंधित समस्या लीजिए जहाँ आपने 3% की चक्रवृद्धि ब्याज की दर पर रु. 5000/- उधार लिया है। मान लीजिए आप तीन महीने बाद रु. 1000/- का भुगतान कर देते हैं। वर्ष के अंत में आप पर उधारदाता का कितना ऋण बचा रहेगा?

हल :

क) यहाँ पहला पद, a, 1 है और सार्व अनुपात 'r, 2 है। अत: (13) को लागू करने पर 16वाँ पद यह होगा

$$a \times r^{n-1} = 1 \times 2^{15} = 32768$$

ख) आइए, पहले हम यह ज्ञात करें कि तीन महीने बाद आप पर कितना ऋण बचा रहता है। जैसा कि उदाहरण 8 के भाग क में हमने यह देखा है कि उत्तरोत्तर महीनों में ऋण

की राशि से एक गुणोत्तर श्रेढ़ी प्राप्त होती है जिसका सार्व अनुपात $\left(1+\frac{3}{100}\right) = 1.03$ और पद $5000 \times 1.03 = 5150$ है। सूत्र (13) का प्रयोग करने पर तीसरा पद $5150 \times (1.30)^{3-1} = 5415.89$ होता है। रु. 1000/- का भुगतान कर देने के बाद आप पर 4415.89 ऋण बच रहेगा। चौथे महीने, पाँचवे महीने आदि के बाद बच रही ऋण की राशियों से एक गुणोत्तर श्रेढ़ी प्राप्त होती है जिसका पहला पद 4415.89 है और सार्व अनुपात 1.03 है। वर्ष के अंत में बच रहे ऋण की राशि ज्ञात करने के लिए हमे इस गुणोत्तर श्रेढ़ी का 7वाँ पद ज्ञात करना होता है। अर्थात् $4415.89 \times (1.03)^8 = 5761.37 \approx 5762$

* * *

अब आप नीचे दिया गया प्रश्न हल कीजिए।

E8) उदाहरण 8 वाली स्थिति लीजिए जहाँ हमने फर्नीचर का अवमूल्यन परिकलित किया था। 5 साल बाद खाता मूल्य क्या होगा?

यदि किसी गुणोत्तर श्रेढ़ी का पहला पद और सार्व-अनुपात न दिया हो, परन्तु गुणोत्तर श्रेढ़ी के बारे में कुछ अन्य जानकारी दी हुई हो, तो क्या हम गुणोत्तर श्रेढ़ी प्राप्त कर सकते हैं? इसका उत्तर 'हाँ' है। इससे संबंधित एक उदाहरण हम यहाँ दे रहे हैं।

उदाहरण 10: एक गुणोत्तर श्रेढ़ी के दूसरा और पाँचवें पद क्रमशः 10 और 1250 हैं। इस श्रेढ़ी का पहला पद और सार्व-अनुपात ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए पहला पद a है और सार्व अनुपात r है। दूसरा पद क्या है? सूत्र (13) के अनुसार यह पद ar है। इसी प्रकार 5वाँ पद ar^4 है। अतः

$$\frac{\text{5वाँ पद}}{\text{दूसरा पद}} = \frac{ar^4}{ar}$$

$$= \frac{1250}{10}$$

अर्थात् $r^3 = 125 = 5 \times 5 \times 5$

$\therefore r = 5$

अतः सार्व अनुपात r, 5 है। आइए, अब हम a ज्ञात करें। यहाँ $10 = ar = 5a$ क्यों कि $r = 5$. इस तरह $a = 2$.

* * *

अपने GP के बारे में ज्ञान को और अधिक प्रबल करने के लिए आप इसी प्रकार का एक प्रश्न हल कीजिए।

E9) एक गुणोत्तर श्रेढ़ी का तीसरा पद और 6वाँ पद 18 और 486 हैं। इस गुणोत्तर श्रेढ़ी का पहला पद और सार्व-अनुपात ज्ञात कीजिए।

कुछ ऐसी स्थितियाँ भी आती हैं जहाँ हमें एक गुणोत्तर श्रेढ़ी के परिमित पदों (finite terms) का योगफल ज्ञात करना होता है। अगले भाग में हम इन कुछ स्थितियों पर चर्चा करेंगे।

6.3.2 एक गुणोत्तर श्रेढ़ी के n पदों तक का योगफल

आइए, हम इस इकाई के प्रस्तावना में उल्लेखित स्थिति को फिर से लें। अपनी इच्छाओं को पूरा करने के लिए मंत्री को कितना अनाज राजा को देना चाहिए। यह योगफल

$1 + 2 + 2^2 \dots + 2^{63}$। एक गुणोत्तर श्रेढ़ी, जिसका पहला पद a है और सार्व-अनुपात r है के n पदों का योगफल $a\,\frac{r^{n-1}}{r-1}$ होता है। अर्थात्

$$\boxed{a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} = a\,\frac{r^n - 1}{r-1}} \qquad (14)$$

आइए, हम सूत्र से संबंधित एक उदाहरण लें।

उदाहरण 11

क) निम्नलिखित गुणोत्तर श्रेढ़ी का योगफल ज्ञात करें।

i) $6 + 12 + \cdots$ 7 पदों तक

ii) $2 + 8 + 32 + \cdots + 2048$

ख) मंत्री को कितना अनाज राजा को देना चाहिए।

ग) मान लीजिए 1995 से 1999 तक प्रत्येक वर्ष के 31 मार्च को एक बैंक में आप रु. 1000/- जमा करते हैं और आपको अपनी जमा राशि पर 7% का चक्रवृद्धि ब्याज प्राप्त होता है। बैंक को 1999 के पहली अप्रैल को कितनी धनराशि आपको देनी होगी?

हल :

क) i) क्योंकि दूसरे पद और पहले पद का अनुपात $\frac{12}{6} = 2$ है, अत: सार्व-अनुपात 2 है।

सूत्र (14) को लागू करने पर इस श्रेढ़ी के 7 पदों का योगफल $6 \times \frac{2^6 - 1}{2-1} = 378.$

ii) दूसरे पद और पहले पद का अनुपात $\frac{8}{2} = 4$ है। मान लीजिए nवाँ पद 2048 है। यहाँ हमें n का मान ज्ञात करना है। तब, $2 \times 4^{n-1} = 2048$ या $4^{n-1} = 1024$, क्योंकि $4^5 = 1024$. इसलिए $n = 6$ अत: ऊपर की गुणोत्तर श्रेढ़ी का 6वाँ पद 2048 होगा। और, सूत्र (14) को लागू करने पर योगफल यह होगा।

$$2\,\frac{4^6 - 1}{4-1} = 2 \times 341 = 2730$$

ख) यह गुणोत्तर श्रेढ़ी $1, 2, 2^2, \dots, 2^{63}$ के n पदों का योगफल है अर्थात्,

$$1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{63}$$

जैसा कि हम पहले देख चुके हैं यह एक गुणोत्तर श्रेढ़ी है जिसका पहला पद 2 है और सार्व-अनुपात 2 है। सूत्र (14) को लागू करने पर

$$\frac{2^{64} - 1}{2-1} = 18446744073709551615.$$

यदि आपके पास काफी धैर्य है, तो आप निश्चित रूप से जाँच कर सकते हैं कि यह सही है। फिर भी यदि आप जाँच नहीं पा रहे हैं, तो चिन्ता करने की कोई आवश्यकता नहीं है।

ग) क्योंकि बैंक में धनराशि जमा करने के बाद एक वर्ष पूरा नहीं हुआ है इसलिए 31 मार्च, 1999 को जमा की गई राशि पर अर्थात् रु. 1000/- पर कोई ब्याज नहीं मिलेगा। परन्तु वह रु. 1000/- जो आपने मार्च 31, 1998 को जमा किया है उस पर आपको 7% का ब्याज मिलेगा। अप्रैल 1, 1999 को इसका मूल्य $1000 \times \left(1 + \frac{7}{100}\right)$ होगा यह परिकलन उदाहरण 8 के (क) के परिकलन के समान है। मार्च 31, 1997 को जमा किए गए हजार रुपयों का दो वर्ष के ब्याज सहित मूल्य $1000 \times \left(1 + \frac{7}{100}\right)^2$ होगा। इसी प्रकार

हम अन्य वर्षों में जमा की गई धनराशि का मूल्य भी परिकलित कर सकते हैं। देखिए तालिका 3, अत: बैंक में कुल जमा राशि यह होगी।

तालिका 3: जमा की गई धनराशि का मूल्य

जमा करने की तिथि	अवधि (वर्षों में)	**1 अप्रैल 1999 को मूल्य**
31 मार्च 1999	0	1000
31 मार्च 1998	1	$1000 \times \left(1+\frac{7}{100}\right)$
31 मार्च 1997	2	$1000 \times \left(1+\frac{7}{100}\right)^2$
31 मार्च 1996	3	$1000 \times \left(1+\frac{7}{100}\right)^3$
31 मार्च 1995	4	$1000 \times \left(1+\frac{7}{100}\right)^4$

$$1000 + 1000 \times \left(1+\frac{7}{100}\right) + 1000 \times \left(1+\frac{7}{100}\right)^2$$

$$+ 1000 \times \left(1+\frac{7}{100}\right)^3 + 1000 \times \left(1+\frac{7}{100}\right)^4$$

यह उस गुणोत्तर श्रेढ़ी के पांच पदों का योगफल है जिसका पहला पद 1000 है और सार्व-अनुपात 1.07 है। अत: (14) का प्रयोग करने पर हमें यह योगफल प्राप्त होता है।

$$1000 \times \frac{(1.07)^5 - 1}{1.07 - 1} = 5750.74$$

* * *

अब आप नीचे दिए गए प्रश्न हम कीजिए।

E10) नीचे दी गई GP का योगफल ज्ञात कीजिए।

i) $3 + 12 + \cdots$ 7 पदों तक

ii) $2 + 6 + \cdots + 1456$

E11) यदि आप 2001 से प्रारंभ करके प्रति वर्ष मार्च की पहली तारीख को बैंक में रु. 2000/- जमा करते हों और जमा की गई राशि पर 5% का चक्रवृद्धि ब्याज मिलता हो, तो 2 मार्च 2006 को आपको बैंक द्वारा कितनी धनराशि देय होगी।

हम इस भाग को यहीं समाप्त कर रहे हैं। अगले भाग में हम कुछ और अनुक्रमों पर विचार करेंगे।

6.4 कुछ विशेष अनुक्रम

इस भाग में हम कुछ रोचक अनुक्रमों पर विचार करेंगे। समीकरण (8) में हमने प्रथम n प्राकृतिक संख्याओं का योगफल ज्ञात करने का सूत्र प्रस्तुत किया है। प्राकृतिक संख्याओं के वर्गों के अर्थात् $1, 2^2 = 4, 3^2 = 9, 4^2 = 16, \ldots$ का योगफल ज्ञात करने का सूत्र क्या है?

सूत्र यह है

$$\boxed{1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}} \quad (15)$$

प्रथम n प्राकृतिक संख्याओं के घन का योगफल ज्ञात करने के बारे में आपका क्या विचार है? क्या इसका भी कोई सूत्र है? हाँ है। प्रथम n प्राकृतिक संख्याओं के kवें घात का योगफल ज्ञात करने का एक व्यापक सूत्र है। परन्तु हम अपने पाठ्यक्रम में प्रथम n प्राकृतिक संख्याओं के घनों से संबंधित सूत्र तक ही अध्ययन करेंगे। प्रथम n प्राकृतिक के घनों के योगफल का सूत्र यह है।

$$\boxed{1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2} \quad (16)$$

यहाँ हम एक उदाहरण दे रहे हैं, जिससे यह पता चलता है कि इन सूत्रों को किस प्रकार लागू किया जाता है।

उदाहरण 12: निम्नलिखित योगफल ज्ञात कीजिए :

i) $1^2+2^2+3^2+\cdots+256$

ii) $1^3+2^3+3^3+\cdots+729$

हल : i) यहाँ हम समीकरण (15) का प्रयोग करेंगे। क्योंकि $16^2=256$, हमें $n=16$ पर (15) लागू करना होता है। अत:

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+16^2=\frac{16\times(16+1)\times(32+1)}{6}=1496$$

ii) यहाँ हमें समीकरण (16) का प्रयोग करना है। क्योंकि $9^3=729$, इसलिए हमें 9 पदों तक का योगफल ज्ञात करना है। अत:

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+9^3=\left[\frac{9\times10}{2}\right]^2=45^2=2025$$

* * *

अब आप नीचे दिया गया प्रश्न हल कीजिए।

E12) निम्नलिखित योगफल ज्ञात कीजिए।

i) $8^2+2^2+3^2+\cdots+324$

ii) $3^3+4^3+\cdots+2197$

आइए, अब हम विभिन्न प्रकार के कुछ और अनुक्रमों का योगफल ज्ञात करने पर चर्चा करेंगे। यहाँ हम योगफल लिखने के लिए प्रयुक्त होने वाले 'सिग्मा संकेत' पर चर्चा करेंगे। इसका प्रयोग हम एक उदाहरण लेकर करेंगे।

उदाहरण 13: सिग्मा संकेत का प्रयोग करके निम्नलिखित योगफल लिखिए।

i) $1^5+2^5+3^5+4^5$

ii) $2.3+3.4+4.5+5.6+6.7$

हल :

i) यहाँ हमें कुछ 5वें घातों का योगफल ज्ञात करना है। हम एक व्यापक 5वें घात को k^5 से प्रकट कर सकते हैं। यदि हम k को अलग-अलग मान दें, तो हमें अलग-अलग 5वें घात

प्राप्त होंगे। यदि हम व्यंजक k^5 में k को मान 1 दें, तो हमें 1^5 प्राप्त होता है, यदि हम k को मान 2 दें तो हमें 2^5 प्राप्त होता है, आदि आदि। क्योंकि यहाँ k का मान 1 से 4 तक है, इसलिए हमें k^5 के भिन्न-भिन्न मानों को जोड़ना होता है। इसे इस प्रकार लिखा जा सकता है।

$$\sum_{k=1}^{4} k^5$$

ii) यहाँ प्रत्येक पद दो क्रमागत पूर्णांकों का एक गुणनफल है। उदाहरण के लिए, पहला पद 2 और 3 का गुणनफल है। हम दो क्रमागत पूर्णांकों के व्यापक गुणनफल को $k(k + 1)$ से प्रकट कर सकते हैं। $k(k + 1)$ में हम k के भिन्न-भिन्न मान देकर हम $2.3 + 3.4 + 4.5 + 5.7$ में विभिन्न मान प्राप्त होते हैं जहाँ k के मान 2 से 6 तक है। इस तरह इसे इस प्रकार लिखा जा सकता है।

$$\sum_{k=2}^{6} k(k+1)$$

* * *

आइए, अब हम सिग्मा संकेत के प्रसार करने से संबंधित कुछ उदाहरण लें।

$\sum$ ग्रीक अक्षर सिग्मा है जो योगफल प्रकट करता है।

उदाहरण 14: निम्नलिखित योगफलों को प्रसार रूप में लिखिए :

i) $\sum_{k=1}^{7} k^3$

ii) $\sum_{k=2}^{25} (3k+1)$

iii) $\sum_{k=1}^{n} \left(k^2+1\right)$

हल :

i) यहाँ हमें व्यंजक k^3 में k को 1 से 7 तक का मान देकर सभी मानों को जोड़ना होता है। अलग-अलग मान $1^3, 2^3, 3^3, \ldots 7^3$ हैं। अत: यह योगफल $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3$ है।

ii) यहाँ हमें व्यंजक में 2 से 25 तक k के अलग-अलग मान देकर सभी मानों को जोड़ना होता है। $k = 1$ पर मान $3.1 + 1 = 4$ है, $k = 2$ पर मान $3.2 + 1 = 7$ है और $k = 3$ पर मान $3.3 + 1 = 10$ है, आदि आदि। यहाँ योगफल में 24 पद हैं और हम सभी 24 पदों को यहाँ लिखना नहीं चाहते। अत: हम इसे प्रसार रूप में $4 + 7 + 10 + \cdots + 76$ के रूप में लिख सकते हैं।

iii) यहाँ व्यंजक $k^2 + 1$ में k को 1 से n तक अलग-अलग मान देना होता है। ये मान 2, 5, 10, 17 आदि हैं। अत: इसे हम विस्तृत रूप में $2 + 5 + 10 + \cdots (n^2 + 1)$ लिख सकते हैं।

* * *

सिग्मा संकेत का प्रयोग करके हम उन सूत्रों को पुन: लिख सकते हैं जिन्हें हम पहले भी देख चुके हैं। एक समांतर श्रेढ़ी के योगफल के सूत्र को इस प्रकार लिखा जा सकता है।

$$\boxed{\sum_{0}^{k=n-1} \{a+(n-1,d)\} = \frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}} \qquad (17)$$

एक गुणोत्तर श्रेढ़ी के योगफल के सूत्र को इस प्रकार लिखा जा सकता है।

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n-1} ar^k = a\sum_{k=0}^{n-1} r^k = a\frac{r^n-1}{r-1}} \qquad (18)$$

अब आप नीचे दिए प्रश्न हल कीजिए।

E13) सिग्मा संकेत का प्रयोग करके $3 + 11 + 19 + 27 + 35$ लिखिए।

E14) विस्तृत रूप में $\sum_{k=1}^{7} 3^k$ लिखिए।

E15) विस्तृत रूप में $\sum_{k=3}^{26} k(k+2)$ लिखिए।

ऐसे दो सरल नियम हैं जो सिग्मा संकेत को लागू करने में उपयोगी होते हैं।

नियम 1: $\sum(f(k)+g(k)) = \sum f(k) + \sum g(k)$
जबकि $f(k)$ और $g(k)$, k पर आश्रित व्यंजक हैं।

उदाहरण के लिए,

$$\sum_{k=1}^{n}(k^2+k) = \sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k$$

नियम 2: $\sum a\,f(k) = a\sum f(k)$, जहाँ a, k से स्वतंत्र एक अचर है।

उदाहरण के लिए, $\sum 3k^2 = 3\sum k^2$. अभी तक हमने जो पढ़ा है उसका प्रयोग हम सरल श्रेणियों का योगफल ज्ञात करने में करेंगे। इस संबंध में यहाँ एक उदाहरण दिया जा रहा है।

उदाहरण 15: निम्नलिखित श्रेढ़ी का यौगफल ज्ञात कीजिए।

क) $1.3 + 2.4 + 3.5 + \cdots + 10.12$

ख) $1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + \cdots + 9.10.11$

ग) $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \cdots + \frac{1}{10.11}$

हल : प्रत्येक पद ऐसी दो संख्याओं का गुणनफल है जिनके बीच 2 का अंतर है। अत: व्यापक पद को $k(k+2)$ के रूप में लिखा जा सकता है। और क्योंकि योगफल 1 से 10 तक है, इसलिए

$$\sum_{k=1}^{10} k(k+2) = \sum_{k=3}^{k=10}(k^2+2k)$$

$= \sum_{k=1}^{10} k^2 + 2\sum_{k=1}^{10} k$ (ऊपर बताए गए नियम 1 को लागू करने पर)

$= (1^2 + 2^2 + \ldots + 10^2)$

$+ 2(1 + 2 + \ldots + 10)$ (नियम 2 लागू करने पर)

समीकरण (15) और समीकरण (8) का प्रयोग करने पर हमें यह प्राप्त होता है।

$$= \frac{10\times11\times21}{6} + 2\frac{10\times11}{2} = 385 + 110 = 495$$

ख) प्रत्येक पद तीन क्रमागत प्राकृतिक संख्याओं का गुणनफल है। अतः व्यापक पद को $k(k+1)(k+2)$ के रूप में लिखा जा सकता है। योगफल 1 से 9 तक है। अतः योगफल यह है।

$$\sum_{k=1}^{9}(k^3+3k^2+2k)=\sum_{k=1}^{9}k^3+\sum_{k=1}^{9}k^2+\sum_{1}^{9}2k \text{ (नियम 1 लागू करने पर)}$$

$$=\sum_{k=1}^{9}k^3+3\sum_{k=1}^{9}k^2+2\sum_{1}^{9}k \text{ (नियम 2 लागू करने पर)}$$

समीकरण (16), समीकरण (15) और समीकरण (8) का प्रयोग करने पर हमें यह प्राप्त होता है।

$$\sum_{k=1}^{9}(k^3+3k^2+2k)=\left(\frac{9\times10}{2}\right)^2+3\frac{9\times10\times19}{6}+2\frac{9\times10}{2}$$

$$=2025+8553+90=2970$$

ग) यहाँ व्यापक पद दो क्रमागत पूर्णांकों के गुणनफल का व्युत्क्रम (reciprocal) है अर्थात् $\frac{1}{k(k+1)}$ है और योगफल 1 से 10 तक है। यहाँ हमें एक ट्रिक अपनाना होता है। हम $\frac{1}{k(k+1)}$ हम $\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$ के रूप में लिखते हैं। अतः

$$\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{k(k+1)}$$

$$=\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{1}-\cancel{\frac{1}{2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)+\cdots\left(\cancel{\frac{1}{10}}-\frac{1}{11}\right)$$

$$=1-\frac{1}{11}=\frac{10}{11}$$

यह अंतःसर्पी योगफल (telescopic sum) का एक उदाहरण है। ऐसा इसलिए है, क्योंकि इसे हम उसी प्रकार फोल्ड कर सकते हैं, जैसे टेलिस्कोप को फोल्ड करते हैं।

* * *

अब आप नीचे दिए गए प्रश्न हल कीजिए।

E16) निम्नलिखित श्रेढ़ी का योगफल ज्ञात कीजिए।

i) $2.5+3.6+4.7+\cdots+11.14$

ii) $2.4.7+3.5.8+4.6.9+\cdots 12.14.17$

iii) $\frac{1}{1.3}+\frac{1}{2.4}+\cdots+\frac{1}{13.15}$

6.4.1 कुछ रोचक अनुक्रम

इस भाग में हम कुछ रोचक अनुक्रमों पर चर्चा करेंगे। पहला अनुक्रम जिसपर हम चर्चा करने जा रहे हैं वह है **फिबोनाशी अनुक्रम** यह अनुक्रम किस प्रकार परिभाषित होता है? मान लीजिए एक द्वीप में आपके पास खरगोशों का एक जोड़ा है जिनमें एक नर है और एक मादा है। दो महीने बाद वे प्रजनन प्रारंभ कर देते हैं और इसके बाद प्रत्येक महीने के अंत में खरगोशों के एक जोड़ा पैदा होते हैं। यदि किसी खरगोश की मृत्यु नहीं हुई हो, तो बताइए कि **n**वें महीने के प्रारंभ में द्वीप में खरगोशों की संख्या क्या होगी? मान लीजिए **n** महीने के अंत में खरगोश

के जोड़ों की संख्या f_n है। f_1 क्या है? खरगोश एक महीने के बाद कोई प्रजनन नहीं करते हैं। अत: एक महीने के बाद केवल एक ही जोड़ा रहेगा।

दो महीने बाद ये प्रजनन करना प्रारंभ कर देते हैं अत: $f_2 = 2$. तीसरे महीने के अंत में वे खरगोशों का एक जोड़ा पैदा करेंगे। अत: तीन महीने बाद खरगोशों की कुल संख्या 2 होगी। n महीने बाद खरगोशों के कितने जोड़े हो जाएंगे? इसे प्राप्त करने के लिए हमें $(n-1)$ वें महीने और nवें महीने के बीच पैदा हुए बच्चों के साथ $(n-1)$ वर्षों के बाद के जोड़ों की संख्या को जोड़ना होता है। $(n-2)$ वें महीने के सभी जोड़े $(n-1)$ वें महीने के बाद (न कि $n-1$वें महीने के अंत में) एक जोड़ा पैदा करेंगे। अत: इन्हें f_{n-1} में सम्मिलित नही किया जाएगा। हमें n महीने के अंत में खरगोशों की संख्या प्राप्त करने के लिए इसे हमें f_{n-1} में जोड़ना होता है। अत: $n \geq 3$ के लिए f_n निम्नलिखित संबंध को संतुष्ट करता है।

$$\boxed{f_n = f_{n-1} + f_{n-2}} \tag{19}$$

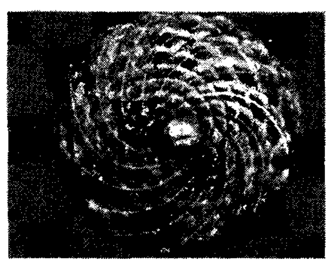
अब हम f_n का एक स्पष्ट सूत्र (explicit formula) प्रस्तुत कर सकते हैं जो यह है।

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right] \tag{20}$$

अब आप नीचे दिया गया प्रश्न हल कीजिए।

E17) समीकरण (19) की सहायता से प्रथम 5 फिबोनाशी संख्याएं ज्ञात कीजिए। समीकरण (20) की सहायता से f_2 ज्ञात कीजिए और देखिए कि समीकरण (19) की सहायता से प्राप्त किया गया मान सही है या नहीं।

एक रोचक तथ्य यह है कि फिबोनाशी संख्याएं प्रकृति में फूलों की पंखुड़ियों की संख्या पत्तों का विन्यास; पाइन कोन में बीजों के सर्पिल विन्यासों की संख्या देखने को मिलती है। यहाँ हम एक उदाहरण दे रहे हैं। आप यहाँ यह देख सकते हैं कि चित्र 2 में दक्षिणावर्त दिशा में 13 सर्पिल हैं।

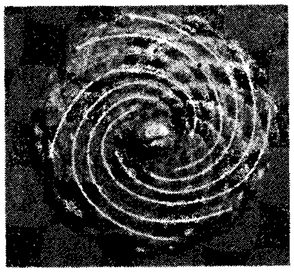


चित्र 2: दक्षिणावर्त दिशा में सर्पिलों की संख्या

यदि आपने (E17) हल किया है तो आपने यह अवश्य देखा होगा कि 7वीं फिबोनाशी संख्या 13 है। चित्र 3 में वामावर्त दिशा (anticlockwise direction) में सर्पिलों की संख्या 8 है जो कि 6वीं फिबोनाशी संख्या है। संख्या $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ को स्वर्ण अनुपात (golden ratio) कहा जाता है और इसके अनेक रोचक गुणधर्म हैं।

संख्याओं का एक अन्य रोचक अनुक्रम **परिपूर्ण संख्या** (perfect numbers) है। परिपूर्ण संख्याएं वे संख्याएं होती हैं जिनका यह गुणधर्म होता है कि ये संख्याएं अपने भाजकों के योगफल के बराबर होती हैं। उदाहरण के लिए, 6 एक परिपूर्ण संख्या है क्योंकि 6 के भाजक 1, 2, 3, हैं और $1 + 2 + 3 = 6$. यूक्लिड ने यह दिखाया था कि $2^{p-1}(2^p-1)$ के रूप की संख्या एक परिपूर्ण संख्या होती है जहाँ p और $2^p - 1$ अभाज्य संख्याएं हैं। उदाहरण के लिए, यदि हम $p = 2$ लें तो हमें $2^{2-1}(2^2-1) = 2 \times 3 = 6$ प्राप्त होता है जो एक परिपूर्ण संख्या है। एक अन्य महान

गणितज्ञ एल. अयलर ने यह सिद्ध किया था कि यदि n कोई सम परिपूर्ण संख्या हो, तो n इस प्रकार का अवश्य होगा। दूसरे शब्दों में, यदि n एक सम परिपूर्ण संख्या है, तो $n = 2^{p-1}(2^p-1)$ जहाँ p और 2^p-1 अभाज्य संख्याएं हैं।



चित्र 3: वामावर्त दिशा में सर्पिलों की संख्या

यहाँ प्रथम कुछ सम परिपूर्ण संख्याओं की एक सूची दी गई है। इस बात की ओर आपने यह अवश्य ध्यान दिया होगा कि हमने केवल सम परिपूर्ण संख्या पर ही चर्चा की है।

तालिका 4: प्रथम 10 सम परिपूर्ण संख्याएं

–p	$2^{p-1}(2^p-1)$
2	6
3	28
5	496
7	8128
13	33550336
17	8589869056
19	137438691328
31	2305843008139952128
61	2658455991569831744654692615953842176
86	191561942608236107294793378084303638130997321548169216

विषम परिपूर्ण संख्याओं (odd perfect number) के बारे में हम क्या जानते हैं? क्या इनका अस्तित्व है? यह कोई नहीं जानता है। 10^{300} तक की संख्याओं की जांच की गई है, परन्तु अभी तक किसी विषम परिपूर्ण संख्या का पता नहीं चला है। अत: यदि किसी विषम परिपूर्ण संख्या का अस्तित्व हो भी, तो वह बहुत वृहत संख्या होगी।

अब हम इस इकाई की समाप्ति पर आ गए हैं। इस भाग में इस इकाई के तथ्यों का संक्षिप्त विवरण देंगे।

6.5 सारांश

इस इकाई में आपने देखा है कि किस प्रकार

1) यह जाँच की जाती है कि संख्याओं का दिया हुआ अनुक्रम समांतर श्रेढ़ी (AP) में है या नहीं।

2) सूत्र $a + (n - 1)d$ को लागू करके एक समांतर श्रेढ़ी का nवाँ पद ज्ञात किया जाता है जिसका पहला पद a है और सार्व अंतर d है।

3) सूत्र $S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$ लागू करके एक समांतर श्रेढ़ी के n पदों का योगफल ज्ञात किया जाता है जिसका पहला पद a है और सार्व अंतर d है।

4) यह जाँच करते हैं कि संख्याओं का दिया हुआ अनुक्रम एक गुणोत्तर श्रेढ़ी (GP) है या नहीं।

5) सूत्र ar^{n-1} लागू करके एक गुणोत्तर श्रेढ़ी का nवाँ पद ज्ञात किया जाता जिसका पहला पद a है और सार्व-अनुपात r है।

6) सूत्र $a\frac{r^n - 1}{r-1}$ लागू करके एक गुणोत्तर श्रेढ़ी के n पदों का योगफल ज्ञात किया जाता है जिसका पहला पद a है और सार्व-अनुपात d है।

7) सूत्र $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ लागू करके प्रथम n प्राकृतिक संख्याओं के वर्गों का योगफल ज्ञात किया जाता है।

8) सूत्र $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$ लागू करके प्रथम n प्राकृतिक संख्याओं के घनों का योगफल ज्ञात किया जाता है।

9) ऊपर बताए गए सूत्रों को लागू करके कुछ सरल श्रेणियों का योगफल ज्ञात किया जाता है।

10) फिबोनाशी अनुक्रम और परिपूर्ण संख्याओं के अनुक्रम के कुछ रोचक गुणधर्मों की व्याख्या की जाती है।

6.6 हल/उत्तर

E1) क) आइए हम पदों के बीच का अंतर देखें

दूसरा पद – पहला पद = 9 – 3 = 6

तीसरा पद – दूसरा पद = 15 – 9 = 6

चौथा पद – तीसरा पद = 21 – 15 = 6

पांचवाँ पद – चौथा पद = 27 – 21 = 6

जैसा हम देख सकते हैं कि किन्ही दो क्रमागत पदों के बीच का अंतर 6 है। अतः, दूसरे पद से, पिछले पद में 6 जोड़कर प्रत्येक पद प्राप्त किया जा सकता है।

ख) आइए हम पदों के बीच का अंतर देखें।

दूसरा पद – पहला पद = 13 – 6 = 7

तीसरा पद – दूसरा पद = 15 – 13 = 2

चौथा पद – तीसरा पद = 22 – 15 = 7

यहाँ दूसरे पद और पहले पद में 7 का अंतर है जबकि तीसरे पद और दूसरे पद में 2 का अंतर है। अत: ऐसी कोई नियत संख्या नहीं है जिसे प्रत्येक पद में जोड़कर अगला पद प्राप्त किया जा सकता हो। अत: यह समांतर श्रेढ़ी नहीं है।

E2) पहले वर्ष में आपका वेतन 10750 × 12 = 129000 होगा। दूसरे वर्ष में आपका मासिक वेतन रु. 11050/- होगा और पूरे वर्ष का कुल वेतन 11050 × 12– रु. 132600/- होगा। क्योंकि मूल वेतन में रु. 300/- की मासिक वृद्धि होती है इसलिए मूल वेतन में 300 × 12 = 3600 की वार्षिक वृद्धि होगी। अत: कुल मूल वेतन समांतर श्रेढ़ी में होगा जिसका सार्व अंतर 3600 होगा।

E3) i) यहाँ $a = 23, d = 38 - 13 = 15$. अत: समांतर श्रेढ़ी का 9वाँ पद यह होगा

$23 + (10 - 1) \times 15 = 23 + 135 = 158.$

ii) यहाँ $a = 300, d = 200$ क्योंकि हम 8 महीने बाद भुगतान की गई धनराशि ज्ञात करना चाहते हैं इसलिए हमें समांतर श्रेढ़ी 300, 500, 700, ... का 8वाँ पद ज्ञात करना है। यह है $300 + (8 - 1) \times 200 = 1700.$

E4) मान लीजिए x वर्षों बाद आपका मूल वेतन रु. 7000/- हो जाता है। तब

$4500 + (x - 1) \times 125 = 7000$

या $(x - 1) = \frac{7000 - 4500}{125} = \frac{2500}{125} = 20$

$x = 20 + 1 = 21$

E5) यदि वेतन 4500 है तो पहले वर्ष के प्रत्येक महीने में आप $4500 \times \frac{15}{100}$

$= 4500 \times \frac{3}{20} = 675$ की बचत कर लेंगे। अत: पहले वर्ष में आप $675 \times 12 = 8100$ की बचत कर लेंगे। यहाँ प्रत्येक वर्ष वेतन में 125 प्रति माह की वृद्धि होती है। अत: प्रति माह बचत में यह वृद्धि होगी।

$125 \times \frac{15}{100} = 125 \times \frac{3}{20} = \frac{75}{6}$ और एक वर्ष में बचत में यह वृद्धि होगी $\frac{75}{4} \times 12 =$ 225. अत: प्रति वर्ष बचत की गई धनराशियाँ एक समांतर श्रेढ़ी में होंगी जिसका पहला पद 8100 और सार्व अंतर 225 है। तब 10 पदों तक का योगफल यह होगा।

$$S_{12} = \frac{12}{2}\{2 \times 8100 + (12 - 1) \times 225\}$$

$$= 6 \times \{16200 + 2475\} = 6 \times 18675 = 112050$$

अत: 12 वर्षों में आप रु. 112050/- की बचत करेंगे।

E6) क) i) यहाँ $a = 1\frac{2}{5} = \frac{7}{5}, n = 12$ और $d = 4 - \frac{7}{5} = \frac{13}{5}$ अत: योगफल यह होगा

$$S_{12} = 6 \left\{\frac{14}{5} + 11 \times \frac{13}{5}\right\}$$

$$= 6 \times \frac{157}{5} = 188\frac{2}{5}$$

ii) यहाँ $a = 1000, d = \frac{4993}{5} - 1000 = \frac{-7}{5}$ और $n = 12$. अत: योगफल होगा

$$S_{12} = 6 \times \left\{2000 + 11 \times -\frac{7}{5}\right\}$$

$$= \frac{59538}{5} = 11907\frac{3}{5}$$

ख) i) यहाँ $a = 19, d = 27 - 19 = 8$. यदि xवाँ पद 131 है,

तो $19 + (x - 1) 8 = 131$

$\therefore x = \frac{131 - 19}{8} + 1 = 15$

15 पदों का योगफल यह होगा

$$S_{15} = 15 \times \left(\frac{131+19}{2}\right) = 1125$$

ii) यहाँ $a = 17, d = 31 - 17 = 14$. यदि xवाँ पद 241 है, तो

$17 + (x - 1)\, 14 = 241$

$$\therefore\ x = \frac{241-17}{14} + 1 = 17$$

$$\text{अत:}\ x = 17\left(\frac{241+17}{2}\right) = 17 \times 129 = 2193$$

b) i) यहाँ $a = 19, d = 27 - 19 = 8$ यदि xवां पद 131 है, तो

$19 + (x - 1)\, 8 = (3)$

$$\therefore\ x = \frac{131-19}{8} + 1 = 15$$

15 पदों का योगफल है

$$S_{15} = 15 \times \left(\frac{131+19}{2}\right) = 1125$$

ii) यहाँ $a = 17, d = 31 - 17 = 14$. यदि xवाँ पद 241 है तो

$17 + (x - 1)\, 14 = 241$

$$\therefore\ x = \frac{241-17}{14} + 1 = 17$$

$$\text{अत:}\ S_{17} = 17\left(\frac{241+17}{2}\right) = 17 \times 129 = 2193$$

E7) 19965

E8) 4432.05

E9) $a = 2, r = 3$.

E10) 728

E11) 2552.6

E12) i) 2109

E13) $\sum_{k=1}^{3}(3+8k)$

E14) $3 + 3^2 + \ldots + 3^7$

E15) $8 + 15 + \ldots + 728$

E16) $\sum_{n=2}^{11} n^2 + 3\sum_{n=2}^{11} n = 507 + 201 + 708$

E17) मान नीचे दिए गए हैं :

$f_3 = f_1 + f_2 = 2$

$f_4 = f_3 + f_2 = 3$

$f_5 = f_4 + f_3 = 5$

$f_6 = f_5 + f_4 = 8$

$f_7 = f_6 + f_5 = 13$